Math
407

Ex Bibliotheca
Collegii Evangelici,
Aug. Vindel.

L. M. Steinberger ſculps. A. V.

Auszug
aus den
Anfangsgründen
und dem Lehrbegriffe
der
Mathematiſchen Wiſſenſchaften.

Aufgeſetzt von

Wencesl. Johann Guſtav Karſten,
der Phil. Doctor, Hofrath und Profeſſor der Mathematik und Naturlehre auf der Univerſität in Halle, der Churf. Academie der Wiſſenſchaften in München, der Holländiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften in Harlem, und der Königl. Däniſchen Geſellſchaft in Copenhagen, auch der öconomiſchen Geſellſchaft in Leipzig Mitgliede.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röſe, 1781.

AUGSBURG

Vorrede.

Schwerlich hätte ich mich entſchloſſen, aus meinen Anfangsgründen und meinem Lehrbegriffe der Mathematiſchen Wiſſenſchaften noch einen Auszug zu machen, wenn mich nicht die Erfahrung überzeugt hätte, daß auch auf den zahlreichſten deutſchen Univerſitäten die Anzahl derer immer noch ſehr klein bleibe, die ſich in der Mathematik über die erſten und leichteſten Anfangsgründe erheben wollen. Bey dem Wunſch, zur mehrern Ausbreitung der gemeinnützlichſten Kenntniſſe nach meinen beſten Einſichten ſoviel als

möglich beyzutragen, habe ich es verſucht, ein dem Wolffiſchen Auszuge ähnliches Handbuch aufzuſetzen, und dabey doch die allgemein anerkannten Mängel deſſelben zu vermeiden.

Soll die Geometrie eine Uebung des Verſtandes ſeyn, ſo muß der Lehrer dieſer Wiſſenſchaft in Anſehung der Gründlichkeit und Schärfe der Beweiſe ſich den Muſtern der alten Griechiſchen Geometer möglichſt zu nähern ſuchen, wenn er gleich die Abſicht damit verbindet, dem Anfänger alles recht leicht und faßlich zu machen. Wie weit ich darin glücklich geweſen bin, beyde Abſichten mit einander zu verbinden, überlaſſe ich Kennern zur Prüfung. Man wird finden, daß ich mir wenigſtens alle Mühe gegeben habe, bey der Kürze, worin ich hier alles einzuſchränken gezwungen war, doch die möglichſte Vollſtändigkeit zu erreichen: die Lehren von den Verhältniſſen und Proportionen, (Geom. §. 154. 169.) vom Kreiſe (187-193. §. 213-221 §. 227-

231. §.) von der Lage der Ebenen (242 u. f. §§.) von der Kugel und ihrer Oberfläche, (334. 347. u. f. §§.) können als Proben davon dienen. H. von Wolff hat in ſeinem Auszuge unter dem Nahmen der Algebra eine kurze Anleitung zur Buchſtabenrechenkunſt und Auflöſung der Gleichungen gegeben: er macht aber damit den Beſchluß des ganzen Buches. Ich habe, ſoviel davon als die hier unumgänglich nothwendige Kürze zuließ, nach der Trigonometrie unter dem Nahmen der allgemeinen Rechenkunſt vorgetragen: denn hier war die natürlichſte Stelle, weil die Wiſſenſchaft doch zur theoretiſchen Mathematik gehört. Ein Lehrer, der es wagen darf, ſeine Zuhörer nach dieſer zwar kurzen aber doch nach ihrer Abſicht vollſtändigen, Anleitung in der Buchſtabenrechnung und Anwendung derſelben bey Auflöſung der Gleichungen zu üben, hat überdem den Vortheil davon, daß er auch in allen Theilen der angewandten Mathematik davon Gebrauch machen kann.

Man wird finden, daß ich beym Vortrage der Angewandten Mathematik eben ſo ſehr dahin geſehen habe, die Gründe ſo vieler hieher gehöriger Wiſſenſchaften richtig feſtzuſetzen, und bey den Beweiſen der vornehmſten Lehrſätze die mathematiſche Schärfe zu erreichen, als auch hiernächſt davon gemeinnützliche Anwendungen zu machen. Zuweilen habe ich es gewagt, weiter zu gehen, als man es vielleicht hier erwartet hätte. Ich habe im 46 u. f. §. der Aerometrie verſucht, die Auflöſung des Problems von den Höhenmeſſungen vermittelſt des Barometers aus Elementarſätzen herzuleiten, welche ſonſt gewöhnlich vermittelſt der Rechnung des Unendlichen gefunden wird. Vielleicht glückt es mir, durch dieſe und ähnliche Proben, wenigſtens einige angehende Gelehrte nicht nur von dem groſſen Nutzen der höhern Mathematik, ſondern auch davon zu überzeugen, daß ſie ſo ſchwer nicht ſey, als viele noch glauben.

Schon in der Vorrede zum zweyten Bande der Anfangsgründe habe ich bemerkt, wie ſehr nothwendig es ſey, die Gründe der mechaniſchen Wiſſenſchaften, und beſonders auch einer gemeinnützlichen Maſchinenlehre mit möglichſten Fleiſſe ins Licht zu ſetzen. Als eine Probe davon, daß noch immer auch in neuen Schriften bald wirkliche Irrthümer, bald fehlſame Anwendungen ſonſt richtiger Sätze angetroffen werden, bezog ich mich auf Herrn Polhelms falſche von den Herrn Büſch und **Schmidt** aber für richtig angenommene Theorie der Schwungräder aus dem IV Bande der **Abhandlungen der Königlich-Schwediſchen Academie der Wiſſenſchaften**. Kaum hätte ich geglaubt, daß Polhems Anſehen auch in der höhern Mathematik geübte Schriftſteller verleiten würde: und doch hat wirklich Herr Mönnich in ſeiner **Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichſten Maſchinen**, Augsb. 1779 Polhems fehlſame Theorie vor-

getragen. Indeſſen war es kaum anders zu erwarten, als daß Herr Mönnich, wie er es in der Vorrede anzeigt, bey weiterer Prüfung ſelbſt finden würde, wie ſehr verworren und fehlerhaft Herr Polhem und mit ihm die Herrn Büſch und Schmidt Huyghens Lehrſätze von der Schwungkraft anwenden. Ich habe hier einen kurzen Aufſatz davon aus dem 42. und 43. Stück der Wöchentlichen Halliſchen Anzeigen vom Jahr 1778, der auch in die Gelehrten Beyträge zu den Meklenb. Schweriniſchen Intelligenzblättern nicht lange vorher eingerückt war, am Ende der Maſchinenlehre wieder abdrucken laſſen. Ueber die Auflöſung des Problems vom vortheilhafteſten Gebrauch der Schwungräder, wie ſie mit Hülfe der höhern Mathematik gefunden werden kann, werde ich an einem andern Orte Unterſuchungen anſtellen.

Am ſchwerſten iſt es mir geworden, den Vortrag der optiſchen und aſtronomiſchen Wiſſenſchaf-

ſchaften hier ſo einzuſchränken, daß die Gränzen nicht überſchritten würden, die ich mir einmahl nun hatte ſetzen müſſen; bey dem allen aber doch auch wenigſtens einige Vollſtändigkeit zu erreichen. Freylich hätte ich mir alles viel bequemer machen können, wenn es nur darum wäre zu thun geweſen, die beſtimmte Bogenzahl zu liefern. Ein Bauersmann in Koſſebude, unweit Dresden, Nahmens Johann Ludewig, hat aus H. von Wolffens Anfangsgründen die Rechenkunſt und Geometrie gelernt; die Optik aber, Aſtronomie, und andre Theile der Mathematik, wozu Inſtrumente gehören, die er nie zu ſehen bekommen, hat er nicht recht begreifen können. (M. ſ. H. Gottſcheds Hiſtoriſche Lobſchrift des Freyherrn von Wolff 32. S. Die Urſache iſt wohl nicht bloß der Mangel der Inſtrumente geweſen, ſondern vorzüglich die daher rührende Unvollſtändigkeit des Vortrages, weil H. von Wolff weder im Auszuge noch in den Anfangsgründen die Lehren von der

Lage der Ebenen gegen einander erklärt hat. Mir iſt es von mehrern andern Perſonen bekannt, die nach dem Wolffiſchen Auszuge und den Anfangsgründen in der Mathematik unterrichtet waren, daß ſie nach der Zeit dieſen Mangel, wie leicht zu erachten iſt, vorzüglich in der Aſtronomie, ſehr gefühlt haben.

Ich weiß nicht, warum man die Beſchreibung der Geſtirne unter dem Nahmen der Aſtrognoſie von der Wiſſenſchaft getrennt hat, die eigentlich den Nahmen, Aſtronomie führen ſoll. Eine richtige Beſchreibung nicht allein der einzelnen Geſtirne, ſondern vornehmlich ihrer ſcheinbaren Lage gegen einander, und der Stellen, wo man ein jedes dieſer Geſtirne an der ſcheinbaren Himmelskugel zu ſuchen hat, iſt nach meiner Ueberzeugung ein Hauptgeſchäfte für die ſphäriſche Aſtronomie, weil eben dieſer Theil der Wiſſenſchaft lehren ſoll, wie das Weltgebäude ſich unſern Sinnen darſtellet. Eine ſolche Beſchrei-

ſchreibung des geſtirnten Himmels, wie ſie der Natur ſelbſt gemäß, und eben deßwegen am leichteſten im Gedächtniſſe zu behalten iſt, vermiſſe ich auch bey ſolchen Schriftſtellern, die unter dem Nahmen der Aſtrognoſie zur Kenntniß der Geſtirne Anleitung geben. Man beſchreibt die Geſtirne einzeln, ohne weitere Ordnung, und richtige Vertheilung nach den Gegenden an der ſcheinbaren Himmelskugel, wie ſie am leichteſten zu finden ſind. Selbſt Herrn Bodens Anleitung zur Kenntniß des geſtirnten Himmels, hilft dieſem Mangel nicht völlig ab. Weil in dieſem ſonſt mit Recht beliebten Buche der geſtirnte Himmel für jedem Monath beſonders beſchrieben wird; ſo muß der Liebhaber der Wiſſenſchaft aus zwölf verſchiedenen Beſchreibungen das kennen lernen, was er aus einer einzigen Beſchreibung viel leichter und beſſer kennen lernen kann. Die allerwenigſten von den angehenden Gelehrten, die ſich auf Univerſitäten mit der Mathematik beſchäftigen, kommen

ſoweit,

ſoweit, daß ſie Rechnungen über den Lauf des Mondes und der Planeten durchführen konnten. Der gewöhnliche Vortrag der Aſtronomie hat um deßwillen auch zu wenig Annehmlichkeit für ſie, weil die Kepleriſche Theorie vom Lauf der Planeten mit der Newtonſchen Theorie von der allgemeinen Schwere verbunden nur von ſolchen in ihrer ganzen Schönheit recht verſtanden werden kann, die ſich bey Erlernung der theoretiſchen Mathematik über die allererſten Anfangsgründe erhoben haben. Dieſerwegen bin ich hier nur bemühet geweſen, dasjenige von der Aſtronomie leicht und faßlich vorzutragen, was allen angehenden Gelehrten angenehm und nützlich ſeyn würde, die doch in dieſer Art Kenntniſſe nicht ganz unwiſſend bleiben wollen. In der Chronologie habe ich zugleich eine kurze Nachricht von der Jobelperiode gegeben, worauf Herr Frank ſein Syſtem der Chronologie gebauet hat. Weil es einmahl gewöhnlich iſt, daß auch zu den architectoniſchen Wiſſenſchaften eine kurze

Anleitung gegeben wird; ſo habe ich ſie nicht ganz weglaſſen wollen: ob es gleich nicht möglich iſt, wenn alles ſo ſehr, als es hier nothwendig iſt, ins Kurze gezogen werden ſoll, einige Vollſtändigkeit zu erreichen.

Halle im März des Jahrs 1781

Inhalt.

Die Rechenkunſt.
Die Geometrie.
Die Trigonometrie.
Die allgemeine Rechenkunſt.
Die Statik.
Die Hydroſtatik.
Die Aerometrie.
Die Hydraulik.
Die Maſchinenlehre.
Die Artillerie.
Die Optik und Perſpectiv.
Die Dioptrik.
Die Catoptrik.
Die Aſtronomie und Geographie.
Die Gnomonik.
Die Chronologie.
Die bürgerliche Baukunſt.
Die Fortification.

Die

Die Theoretiſch-Mathematiſchen Wiſſenſchaften.

Vorbereitungslehren
von der
Mathematik und ihrer Lehrart.

1. §.

Unſre Begriffe davon, was eine Zahl, und überhaupt eine Gröſſe ſey, gehören zu den erſten Grundbegriffen der Mathematik; weil dieſe Wiſſenſchaft lehren ſoll, wie man Gröſſen mit einander vergleichen, und aus bekannten Gröſſen andre unbekannte finden kann. Dabey muß man vorausſetzen, daß jedermann für ſich ſchon einen Begriff davon habe, was insbeſondre bey körperlichen Dingen ihre Gröſſe ausmache: auch weiß jedermann, was die Wörter: Vielheit, Menge, Zahl, Anzahl ſagen wollen.

2. §. Jede Vorſtellung, die wir uns von einer Sache im Verſtande machen, heißt ein Begriff, und unſer Begriff von einer Sache iſt in ſoweit ein klarer Begriff, in wie weit derſelbe hinreichend iſt, die Sache von andern zu unterſcheiden. Wer es weiß, daß der Planet Saturn ein Stern ſey, der wird ihn ſchon vom Monde, auch eben ſo von einer groſſen Menge andrer Dinge, die keine Sterne ſind,

unterſcheiden: vielleicht aber iſt der Begriff doch noch nicht hinreichend, den Saturn von den Fixſternen und andern Planeten zu unterſcheiden. Demnach kann ein klarer Begriff noch in gewiſſer Abſicht dunkel ſeyn.

3. §. Wenn die Sache, wovon wir uns eine Vorſtellung machen, mehrere verſchiedene Merkmahle an ſich hat, und wenn alsdenn unſer Verſtand die Verſchiedenheit dieſer Merkmahle einſiehet; ſo iſt unſer Begriff davon deutlich. Manche Begriffe unſers Verſtandes ſind aber ſehr einfach, und keiner eigentlichen Deutlichkeit fähig. Beyſpiele davon geben die Begriffe von einer Zahl, und einer Gröſſe überhaupt. (1. §.) Daher würde man auch ſchwerlich es jemanden durch eine Erklärung begreiflich machen, was eine Zahl oder eine Gröſſe ſey, wenn er es nicht ohnehin ſchon wüſte.

4. §. Eine **Erklärung** beſtehet in der Erzählung der Merkmahle, woran man eine Sache erkennen und von andern unterſcheiden kann. Sie iſt alſo ein deutlicher Begriff von einer Sache, den man durch Worte ausdrückt. Wenn alsdenn die angezeigten Merkmahle hinreichend ſind, die Sache von allen andern zu aller Zeit zu unterſcheiden; ſo iſt es ein vollſtändig deutlicher Begriff, und das wird eigentlich erfodert, wenn die Erklärung von einer Sache recht brauchbar ſeyn ſoll.

5. §. Wir nennen es ein **Urtheil** des Verſtandes, wenn wir uns vorſtellen, daß eine Sache dieſe oder jene Eigenſchaft an ſich habe, und in der Vernunftlehre nennet man es einen **logiſchen Satz**, wenn ein ſolches **Urtheil** mit Worten ausgedrückt wird.

6. §.

6. §. Grundſätze nennt man ſolche Sätze, deren Wahrheit einem jeden von ſelbſt einleuchtet, ſobald er nur die Worte verſteht: Lehrſätze aber ſind diejenigen, von deren Wahrheit man ſich aus andern Gründen überzeugen muß. Die Erzehlung der Gründe, aus welchen die Wahrheit des Lehrſatzes erhellet, macht den Beweis davon aus. Erfahrungen werden den Grundſätzen gleich geachtet.

7. §. Man unterſcheidet auch practiſche von blos theoretiſchen Sätzen. Ein practiſcher Satz verlanget, daß etwas zu Stande gebracht werden ſoll, wenn der theoretiſche nur ausdrückt, daß etwas ſo und nicht anders beſchaffen ſey. Wenn es für ſich klar iſt, wie man das Verlangte zu Stande bringen könne, ſo heißt der practiſche Satz insbeſondre ein Foderungsſatz, und im entgegengeſetzten Fall eine Aufgabe. Der Inbegriff der Regeln, nach welchen das verlangte zu Stande gebracht wird, heißt die Auflöſung der Aufgabe, und der Beweis davon beſtehet in der Anführung der Gründe, aus welchen die Richtigkeit der Auflöſung begreiflich iſt

8. §. Wenn ein Satz kurz und leicht aus demjenigen folgt, was kurz vorher vorgetragen iſt; ſo erhält er den Nahmen eines Zuſatzes. Was übrigens ſonſt noch zu wiſſen nützlich iſt, ohne daß es eben in den Zuſammenhang der Lehren ſelbſt gehört, welche eigentlich die Wiſſenſchaft ausmachen, das trägt man in Anmerkungen vor.

9. §. Die Ordnung, welche beym Vortrage der Lehren einer Wiſſenſchaft beobachtet wird, heißt die Lehrart. Die mathematiſche Lehrart iſt an ſich von einer richtigen philoſophiſchen Lehrart, ſo wie ſie den Regeln der Vernunftlehre gemäß beſchaffen

ſeyn muß, nicht verſchieden. Man fängt, wo es nöthig iſt, von Erklärungen an, und ſetzet hiernächſt ungezweifelt richtige Grundſätze feſt. Aus den Erklärungen und Grundſätzen werden hiernächſt alle übrige zur Wiſſenſchaft gehörige Lehren durch richtige Vernunftſchlüſſe hergeleitet.

10. §. Weil eine Sache ſo lange rein heißt, als nichts fremdes von den Beſtandtheilen der Sache verſchiedenes damit vermiſcht iſt; ſo hat man den Nahmen der reinen Mathematik in einem ähnlichen Sinne eingeführt. Es ſoll die Mathematik eine Wiſſenſchaft von der Gröſſe ſeyn: demnach iſt die Mathematik ſo lange rein, als man auſſer der Eigenſchaft der Gröſſe keine andre Eigenſchaften der Dinge, welchen eine gewiſſe Gröſſe zugeſchrieben wird, in Betrachtung ziehet. Dieſer Theil der Wiſſenſchaft heißt auch die theoretiſche Mathematik, und man unterſcheidet davon die practiſche oder angewandte Mathematik, welche ſich mit Vergleichung und Ausmeſſung der Gröſſe ſolcher Dinge beſchäftiget, die in der Natur wirklich vorhanden ſind. Die Frage: wie groß iſt eine Kugel im körperlichen Maaß, wenn ihr Durchmeſſer 6 Zoll im Längenmaaſſe beträgt? gehört für die reine Mathematik; die Frage aber: wie groß iſt eine eiſerne ſechs Pfund ſchwere Kugel? gehört für die angewandte Mathematik.

11. §. Man kann zählen, auch Zahlen mit einander vergleichen, und aus bekannten Zahlen andre unbekannte finden, ohne daß es nöthig wäre, die beſondre Beſchaffenheit der zuſammengezählten Dinge mit in Betrachtung zu ziehen: dieſerwegen iſt die Arithmetik oder die Rechenkunſt, welche davon Unter-

Unterricht giebt, als ein Theil der reinen Mathematik zu betrachten.

12. §. Im eigentlichſten Sinne ſchreibt man den Körpern in der Natur eine gewiſſe Gröſſe zu, in wie weit ein ſolcher Körper durch einen gewiſſen Raum nach allen Seiten ausgedehnt iſt. Dieſer Raum, den ein Körper einnimmt, hat allemal ſeine Gränze, welche man ſich als die Oberfläche des Körpers vorſtellet, welche auch dem Körper das giebt, was man ſeine Figur nennt. Die Begriffe von der Lage mehrerer Dinge gegen einander und der Entfernung des einen vom andern, ſetzen ebenfalls voraus, daß man ſich zwiſchen denſelben einen gewiſſen Raum vorſtelle, und daß die Gröſſe deſſelben ſich angeben laſſe. Von dieſer ausgedehnten Gröſſe des Raums, den die Körper einnehmen, den man ſich auch vorſtellt, wenn von der Lage mehrerer Körper gegen einander, oder von ihren Entfernungen die Rede iſt, giebt die Geometrie Unterricht.

13. §. Rechenkunſt und Geometrie ſind die beyden Hauptwiſſenſchaften der reinen Mathematik: einige Anwendungen der Rechenkunſt auf beſondre geometriſche Theorien haben eigene Nahmen als beſondre Wiſſenſchaften erhalten. Die Trigonometrie iſt eine Wiſſenſchaft davon, wie unbekannte Seiten und Winkel eines Dreyecks gefunden werden können, und ſie wird wegen Verſchiedenheit der Dreyecke wiederum in die ebene und ſphäriſche oder körperliche Trigonometrie eingetheilet.

14. §. Es giebt gewiſſe allgemeine Kunſtgriffe, um aus dem bekannten das unbekannte zu finden, indem man das unbekannte ſo anſiehet, als wenn es ſchon gefunden wäre, und nun rückwärts auf dasje-

nige durch Schlüſſe geleitet wird, was eigentlich, um das unbekannte zu finden, vorgenommen werden muß. Dieſe Kunſtgriffe machen eigentlich die allgemeine mathematiſche Erfindungskunſt aus, welche auch die mathematiſche Analyſis heißt. Man trägt ſie bey dem jetzigen Zuſtande der Wiſſenſchaft am beſten in Verbindung mit der Buchſtabenrechenkunſt und Algebra vor, welches Erweiterungen der Rechenkunſt ſind. Vermittelſt einer geſchickten Verbindung ganz kurzer Zeichen von ſehr allgemeiner Bedeutung iſt man im Stande, die Auflöſung nicht nur arithmetiſcher ſondern auch geometriſcher und ſelbſt ſolcher Aufgaben zu finden, die zur angewandten Mathematik gehören. Mehrere dahin gehörige beſondre Wiſſenſchaften, wovon der eigentliche Inhalt ſich hier noch nicht einmahl verſtändlich würde erklären laſſen, haben den gemeinſchaftlichen Nahmen der höhern theoretiſchen Mathematik erhalten.

15. §. Eigentlich iſt alles, deſſen Gröſſe ſich ausmeſſen und berechnen läſſet, ein Vorwurf der angewandten Mathematik: alſo vornemlich die Körperwelt, ſowohl im ganzen und im groſſen, als auch im kleinen, und in ihren einzelnen Theilen. Sehr viele Erfolge in der Körperwelt hängen von den Bewegungen ab, und von den bewegenden Kräften: daher ſind unter dem Nahmen der mechaniſchen Wiſſenſchaften beſondre Anwendungen der Mathematik entſtanden. Andre Erfolge in der Körperwelt, vornemlich in wie weit wir ſie vermittelſt des Geſichts wahrnehmen, rühren von dem eigenen oder anderswoher entlehnten Licht her, welches die Körper nach allen Seiten umherſtrahlen, und das hat

die

die Bearbeitung der optiſchen Wiſſenſchaften veranlaſſet.

16. §. Die bürgerliche und Kriegsbaukunſt, auch die Schiffsbaukunſt und die Steuermanskunſt ſind Anwendungen der Geometrie und Rechenkunſt mit beſondern Theorien aus den mechaniſchen Wiſſenſchaften verbunden: bey der wirklichen Ausübung hievon hat man jedoch noch viele andre Kenntniſſe nöthig, die nicht eigentlich mathematiſch ſind. Man kann alles, was hieher gehört, unter dem allgemeinen Nahmen der architectoniſchen Wiſſenſchaften begreifen.

17. §. Die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften lehren die Ausmeſſung der Körperwelt im groſſen, ſie ſtellen Unterſuchungen über die wirklich vorhandene Zuſammenordnung und Verbindung der Weltkörper unter einander an, und ſuchen es aufzuklären, wie alles das daher erfolgen könne, was am geſtirnten Himmel vorzugehen ſcheint. Beſondre Theile davon haben wiederum die Nahmen beſondrer Wiſſenſchaften erhalten. Die Geographie lehrt die Ausmeſſung der Erde, und die Eintheilung der darauf befindlichen Länder und Meere im groſſen. Die Chronologie giebt Unterricht von der Berechnung der Jahre, Monathe und Tage, auch der Abwechſelungen der Jahrszeiten, nicht allein ſoweit ſie nothwendig iſt, um die Geſchäfte im bürgerlichen Leben darnach zu ordnen, ſondern auch ſoweit ſie dem Geſchichtforſcher dient, um die Jahrrechnungen alter und neuer Völker zu vergleichen. Die Gnomonik lehrt Sonnenuhren, auch allenfalls Mond- und Sternenuhren zu verzeichnen.

18. §. Dieſe ſehr kurze Vorſtellung von dem Umfange der mathematiſchen Wiſſenſchaften wird ſchon dazu dienen, von dem ſehr groſſen und ungemein weit ausgebreiteten Nutzen der dahin gehörigen Kenntniſſe einige Ueberzeugung zu geben. Man hat in keiner Wiſſenſchaft von den Regeln einer richtigen philoſophiſchen Lehrart (9. §.) einen getreuern Gebrauch gemacht, als eben in der Mathematik, und eben daher hat dieſe Lehrart auch im vorzüglichen Sinne den Nahmen der mathematiſchen erhalten. Dieſemnach iſt ſie die vortreflichſte ausübende Vernunftlehre: und eben um deßwillen leiſten die Uebungen auch nur in den erſten Anfangsgründen der reinen Mathematik einem angehenden Gelehrten vorzügliche Dienſte.

Anfangsgründe der Rechenkunſt.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Menge von Dingen von einerley Art, die alle für ſich als Ganze betrachtet werden, heißt eine ganze Zahl: eine Menge ſolcher Dinge aber, die man als Theile eines andern Ganzen betrachtet, nennt man einen Bruch, oder eine gebrochene Zahl.

Die 2. Erklärung.

2. Jedes von den zuſammengezählten gleichartigen Dingen, die zuſammen genommen eine ganze Zahl ausmachen, oder auch das Ganze, deſſen Theile

zu-

zuſammen genommen eine gebrochene Zahl ausmachen, heißt die Einheit. Die Urſache iſt, weil man beym Zuſammenzählen mit Eins anfängt, und jedes von den zuſammengezählten Dingen nur Eins iſt, welches noch keine Zahl ausmacht.

Die 3. Erklärung.

3. Gleiche Gröſſen ſind in Anſehung der Menge ihrer Theile, alſo gleiche Zahlen in Anſehung der Menge ihrer Einheiten einerley. Wenn Gröſſen überhaupt, alſo auch Zahlen ungleich ſind, ſo iſt die kleinere ſchon ſo groß, als ein Theil von der gröſſern. Das Zeichen (=) drückt die Gleichheit, und das Zeichen (>) die Ungleichheit aus, jedoch das letztere auf die Art, daß die Oefnung auf das gröſſere, die Spitze auf das kleinere weiſen muß.

Der 1. Grundſatz.

4. Jede Gröſſe iſt ſich ſelbſt gleich, und das Ganze iſt allen ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich: alſo auch gröſſer, als jeder von ſeinen Theilen allein genommen.

Der 2. Grundſatz.

5. Wenn zwey Gröſſen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie einander ſelber gleich. Was aber gröſſer iſt, als eine von zwey gleichen Gröſſen, und um ſo mehr, was noch gröſſer iſt, als die gröſſere von zwey ungleichen Gröſſen, das iſt auch gröſſer, als die andre.

Die 4. Erklärung.

6. Ziffern heiſſen die Zeichen, womit man die Zahlen bezeichnet. Für die erſten neun ganzen Zahlen hat man die folgenden bekannten Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und auſſerdem iſt die Null, 0, das Zeichen einer leeren Stelle, die vermöge des gleich folgenden Geſetzes, nach welchem man die Zif-

fern für gröſſere Zahlen aus den einfachen zuſammen ſetzet, keine von den übrigen einfachen Ziffern einnehmen kann.

Willkührliche Sätze.

7. Man zählet fort von Eins bis Zehn, und fängt alsdenn mit dem Zählen wieder von forne an, nur daß man jedesmahl hinzu ſetzt, wievielmahl ſchon bis zehn iſt gezählt worden. Dabey dienen alsdenn die kurzen Zahlwörter: zwanzig, dreyßig, vierzig, bis neunzig, nach ihren bekannten Bedeutungen: zweymahl zehn, dreymahl zehn, u. ſ. f. fort.

Man ſpricht ferner aus	durch das Wort
zehnmahl hundert - -	tauſend
tauſendmahl tauſend - -	Million
tauſendmahl tauſend Millionen	Billion
tauſendmahl tauſend Billionen	Trillion
tauſendmahl tauſend Trillionen	Quadrillion, u. ſ. w.

Die Ziffern ſchreibt man von der Rechten gegen die linke Hand, und läßt jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmahl mehr bedeuten, als in der nächſtvorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müſſen, ſetzt man die Null.

Die 1. Aufgabe.

8. Eine mit Ziffern geſchriebene Zahl richtig auszuſprechen.

Aufl. Man theile die ganze zuſammengeſetzte Zahl von der Rechten gegen die Linke in Claſſen, und gebe jeder Claſſe ſechs Ziffern, da dann für die höchſte Claſſe vielleicht weniger als ſechs Ziffern bleiben. Wenn man alsdenn oberwärts an der ſiebenten Ziffer einen Strich (′), an der dreyzehnten zwey Striche (″) ſetzt, und ſo fortfährt; ſo weiß man, wo die Millionen, Billionen, u. ſ. f. anfangen, und die

übrige

übrige Ausſprache giebt ſich alsdenn leicht nach den Regeln des 7. §.

Jede Claſſe von ſechs Ziffern kann man noch durch ein Comma theilen, welches man neben der vierten Ziffer ſetzt, von der Rechten gegen die Linke gezählt: ſo erhält man Claſſen von drey Ziffern, nur daß die höchſte Claſſe vielleicht nur eine oder zwo Ziffern erhält. Alsdenn kommt es nur darauf an, daß man jede Claſſe von dreyen Ziffern für ſich ausſprechen könne. Das Comma wird durch tauſend ausgeſprochen, oben ein Strichlein durch Million, zwey Strichlein durch Billion, u. ſ. f.

Man lieſet alſo die Zahl

$$75''''840,937'''528,296''364,709'007,283$$

auf folgende Art:

Fünf und ſiebenzig Quadrillionen, achthundert und vierzig tauſend, neunhundert und ſieben und dreyßig Trillionen, fünfhundert und acht und zwanzig tauſend, zweyhundert und ſechs und neunzig Billionen, dreyhundert und vier und ſechzig tauſend ſieben hundert und neun Millionen, ſieben tauſend zwey hundert und drey und achtzig.

Zuſatz.

9. Es beſtehen demnach alle zuſammengeſetzte Ziffern aus einfachen Ziffern verſchiedener Ordnungen. Die Ziffern in der erſten Stelle bedeuten Einer oder einfache Einheiten. Die Ziffern in der zweyten Stelle, oder in der erſten nach den Einern, bedeuten zehnfache Einheiten, und gehören zur erſten Decimalordnung. Eben ſo gehören die Ziffern in der dritten Stelle, oder der zweyten nach den Einern zur zweyten Decimalordnung, u. ſ. w. allemahl von der Rechten gegen die Linke gezählt.

Die

Die 5. Erklärung.

10. Eine Gröſſe, die zweyen oder mehrern andern zuſammen genommen gleich iſt, heißt ihre Summe. Alle dieſe Gröſſen, wenn ſie zuſammen eine gewiſſe Summe ausmachen ſollen, müſſen von einerley Art ſeyn, und mehrere Gröſſen von einerley Art addiren heiſſet ihre Summe finden. Das Zeichen (+) bezeichnet die Addition, und man ſpricht es durch das Wort plus aus. Wenn man ſchreibt $5 + 3 = 8$, ſo heiſt das, die Summe von 5 und 3 iſt gleich 8.

Die 6. Erklärung.

11. Die Differenz zwoer ungleichen Gröſſen iſt der Ueberſchuß, um welchen die gröſſere die kleinere übertrift. Man nennt ihn auch wohl die Ergänzung, oder das Complement des kleinern zum gröſſern. Das kleinere vom gröſſern ſubtrahiren heißt die Differenz des einen vom andern finden, welche alsdenn auch der Reſt heißt. Dieſe Subtraction bezeichnet man mit dem Zeichen (−) und ſpricht es durch minus aus. Der Ausdruck $5 - 3 = 2$ will ſagen, die Differenz der Zahlen 5 und 3 iſt gleich 2.

Der 3. Grundſatz.

12. Wenn gleiches zu gleichen addirt wird, ſo ſind die Summen gleich, und gleiches von gleichem ſubtrahirt giebt gleiche Reſte. Wenn man dagegen zu ungleichen Gröſſen gleiches addirt, oder von ungleichen Gröſſen gleiches ſubtrahirt; ſo giebt das gröſſere eine gröſſere Summe, auch einen gröſſern Reſt. Alſo iſt auch noch um ſo mehr die Summe des gröſſern zum gröſſern addirt gröſſer, als die Summe des kleinern zum kleinern addirt.

Der

Der 4. Grundſatz.

13. Wenn von gleichen Gröſſen ungleiches ſubtrahirt wird, ſo giebt das gröſſere den kleinern Reſt, das kleinere aber giebt den gröſſern Reſt.

Der 1: Foderungsſatz.

14. Die Summe zwoer oder auch noch mehrerer Zahlen, wenn keine davon gröſſer als 9 iſt, kann man leicht durchs Zuſammenzählen in Gedanken finden. Auch wenn eine kleinere Zahl, die nicht gröſſer als 9 iſt, von einer andern, die nicht gröſſer als 2mahl 9 oder 18 iſt, ſubtrahirt werden ſoll; ſo kann der Reſt gleichfalls leicht in Gedanken durchs Zurückzählen gefunden werden.

Die 2. Aufgabe.

15. Zwo oder noch mehr ganze Zahlen zu addiren.

Aufl. 1. Man ſchreibe die Zahlen von der Rechten gegen die Linke ſo unter einander, daß die Ziffern in einer Columne unter einander kommen, die zu einerley Decimalordnung gehören.

2. Man addire zuerſt alle Einer, und eben ſo jede folgende Columne für ſich, (14. §.) ſchreibe aber jedesmahl unter derſelben Columne nur die niedrigſte Ziffer der Summe nieder. Was in die nächſtfolgende Columne weiter gegen die Linke kommen muſte, behalte man in Gedanken, und zähle es zur nächſtfolgenden Columne. Unter der höchſten Columne ſchreibe man zuletzt die gefundene Summe vollſtändig nieder. Die nachſtehende Rechnung ſetzet alles ins Licht.

```
 75436
   328
  9836
 90629
------
    29
   10
  21
 14
16
------
176229
```

Statt deſſen erhält man gleich kürzer die Summe auf folgende Art.

```
 75436
   328
  9836
 90629
------
176229
```

Die 3. Aufgabe.

16. Eine kleinere ganze Zahl von der gröſſern zu ſubtrahiren.

Aufl. 1. Man ſchreibe die kleinere Zahl unter der gröſſern, wie bey der Addition, und ſubtrahire nach der Ordnung, von der Rechten gegen die Linke gerechnet, in jeder Columne die unten ſtehende Ziffer von der oben ſtehenden. (14. §.)

2. In dem Fall, wenn die obere Ziffer kleiner, als die untere iſt, nehme man von der nächſthöhern Eins weg, oder man borge Eins, und rechne dafür zehn zu der Ziffer, wovon man ſubtrahiren ſollte, wie in dem hiebey ſtehenden Exempel. Oben über der Ziffer, wovon man geborgt hat, mache man einen Punct, der daran erinnert, daß ſie ſchon um Eins vermindert ſey.

```
       ·   ·
       547328
       465296
       ------
Reſt.   82032
```

3. Wenn etwa in der nächſthöhern Stelle die 0 ſtünde, wie in dem beygefügten Exempel; ſo geht man ſoweit gegen die Linke fort,

```
·  ·  ·  10 10 ·  10
7  8  3  0  0  7  0  2
4  9  7  8  5  4  9  9
----------------------
2  8  5  1  5  2  0  3
```

fort, bis man auf eine Ziffer kommt, wovon man Eins borgen kann. Alsdenn erhält man in allen leeren Stellen, über die man wegborgen muſte, 9. Wäre die Ziffer, wovon man ſubtrahiren ſoll, ſelbſt 0; ſo würde man beym Borgen in dieſer Stelle 10 erhalten.

Zuſatz.

17. Die Addition und Subtraction dienen einander in einem gewiſſen Sinn zur Probe, ob man recht gerechnet hat. Wenn man entweder eine, oder die Summe mehrerer von den zuſammen addirten Zahlen von der Totalſumme ſubtrahirt; ſo muß die Summe der übrigen zum Reſt bleiben. Wenn man ferner den Reſt und die ſubtrahirte Zahl zuſammen addirt; ſo muß die Summe der gröſſern Zahl gleich werden.

Die 7. Erklärung.

18. Eine Gröſſe mit einer ganzen Zahl multipliciren, heißt eine neue Gröſſe finden, welche die erſte ſovielmahl enthält, als Eins in der gegebenen Zahl enthalten iſt. Dieſe Zahl heißt der Multiplicator, und was damit multiplicirt werden ſoll, das Multiplicandum, die geſuchte Gröſſe das Product. Multiplicandum und Multiplicator haben auch den gemeinſchaftlichen Nahmen Factoren. Um die Multiplication anzuzeigen, ſetzt man das liegende Kreuz (×) oder ſtatt deſſen nur einen Punct (.) zwiſchen beyden Factoren. Oft iſt es deutlich genug, wenn man den Multiplicator ohne alles weitere Zeichen dem Multiplicando voran ſetzt, wie 3 Thaler, 7 Ellen.

Die 8. Erklärung.

19. Eine Gröſſe mit einer ganzen Zahl dividiren, heißt eine dritte Gröſſe finden, die in der erſten

ſovielmahl enthalten iſt, als Eins in der gegebenen ganzen Zahl. Dieſe Zahl heißt der Diviſor, was damit dividirt werden ſoll, das Dividendum, und die geſuchte Gröſſe der Quotient. Das Zeichen der Diviſion ſind zwey Puncte (:) wie ein Colon.

Der 5. Grundſatz.

20. Gleiches mit gleichen multiplicirt oder dividirt giebt im erſten Fall gleiche Producte, im letzten Fall gleiche Quotienten. Wenn die Multiplicanda und Dividenda ungleich, die Multiplicatoren und Diviſoren aber gleich ſind; ſo giebt das gröſſere Multiplicandum das gröſſere Product, das gröſſere Dividendum den gröſſern Quotienten. Um ſo mehr alſo giebt das gröſſere mit dem gröſſern multiplicirt mehr, als wenn man das kleinere mit dem kleinern multiplicirt.

Der 6. Grundſatz.

21. Wenn das Dividendum einerley bleibt; ſo wird der Quotient 2mahl 3mahl gröſſer, wenn man den Diviſorem ſovielmahl kleiner nimmt, und umgekehrt. Der doppelte oder 3mahl gröſſere Diviſor giebt nur einen halb ſo groſſen, oder 3mahl kleinern Quotienten, u. ſ. f. fort.

Der 2. Foderungsſatz.

22. Das Product zweyer Zahlen, wenn keine von beyden gröſſer als 9 iſt, findet man leicht vermittelſt der Addition. Man addire nur das Multiplicandum ſovielmahl zu ſich ſelbſt, als Eins im Multiplicator enthalten iſt.

Zuſatz.

23. Man kann alle mögliche Producte zweyer Zahlen, wovon keine 9 übertrift, leicht unter dem Nahmen des Ein mahl Eins in die nachſtehende kleine Tabelle bringen, und benöthigten Falles daraus nehmen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Der 7. Grundſatz.

24. Eine Zahl, die aus mehrern Theilen beſtehet, multiplicirt man mit einer gegebenen ganzen Zahl, wenn man nacheinander alle ihre Theile multiplicirt, und zuletzt alle partielle Producte in eine Summe bringt. Auch wird eben ſo eine Zahl, die aus mehrern Theilen beſtehet, mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man jeden Theil für ſich dividirt, und zuletzt alle einzelne Quotienten zuſammen addirt.

Zuſatz.

25. Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000, u. ſ. f. multiplicirt, wenn man zur Rechten eine, zwo, drey oder mehr Nullen beyfügt. Wenn aber eine Zahl zur Rechten Nullen hat, ſo dividirt man ſie mit 10, 100, 1000, u. ſ. f. wenn man eine, zwo, drey, oder mehr Nullen weglöſcht.

Der 8. Grundſatz.

26. Wenn beyde Factoren ganze Zahlen ſind, ſo geben ſie mit veränderter Ordnung einerley Product. Es iſt 7 mahl 8 = 8 mahl 7, und 5 mahl 9 = 9 mahl 5. Wenn alſo auch mehr als zwey ganze Zahlen in einander multiplicirt werden ſollen, ſo kann man die Ordnung der Factoren, wie man will, ändern.

Die 4. Aufgabe.

27. **Eine ganze Zahl mit einer andern ganzen Zahl zu multipliciren.**

Aufl. 1. Fall. Wenn beyde Factoren ſonſt einfache Ziffern ſind, nur aber einer allein, oder alle beyde rechter Hand Nullen haben; ſo multiplicirt man die Ziffern nach dem 23 §, und giebt dem Product ſoviele Nullen, als beyde Factoren zuſammen haben. Denn es iſt 700 × 5000 = 7 × 100 × 5 × 1000 (25. §.) = 7 × 5 × 100 × 1000 (26. §.) = 3500000. (25. §.)

2. Fall. Wenn das Multiplicandum aus mehrern, der Multiplicator aber nur aus einer Ziffer beſteht; ſo multiplicirt man nach der Ordnung die Einer, Zehner, Hunderte u. ſ. w. mit dem Multiplicator, und ſchreibt wie beym addiren jedesmahl die niedrigſte Ziffer des Products in derſelben Columne unter: was aber in die nächſthöhere Columne kommen müſte, behält man in mente, und addirt es zum Product, was man in der nächſten Columne findet.

	5836
	7
Prod.	40852

3. Fall. Wenn auch der Multiplicator aus mehrern Ziffern beſtehet; ſo wird das ganze Multiplicandum nach der Ordnung mit allen Theilen des Multiplicators multiplicirt, und alle einzelne Producte werden hiernächſt zuſammen addirt. (24. §.) Wenn man dabey mit der niedrigſten Ziffer anfängt, und die nächſthöhern folgen läſſet; ſo beobachte man nur, daß die niedrigſte Ziffer eines jeden folgenden Products um eine Claſſe weiter gegen die

26394
9362
52788
158364
79182
237546
247100628

die Linke untergeſchrieben werden müſſe, damit die einzelnen Producte ſo unter einander kommen, wie es den Additionsregeln gemäß iſt.

Der 1. Lehrſatz.

28. **Eine ganze Zahl 48 wird mit einer kleinern ganzen Zahl 8 dividirt, wenn man eine dritte Zahl 6 ſucht, welche angiebt, wievielmahl der Diviſor 8 im Dividendo 48 enthalten ſey.**

Beweis. Wenn man weiß, daß 8 in 48 6mahl enthalten ſey; ſo folgt, es ſey 6mahl 8 = 48 alſo auch 8mahl 6 = 48. (26. §.) Demnach iſt 6 der 8te Theil von 48, oder es iſt die Zahl 6 der geſuchte Quotient.

Zuſatz.

29. Wenn alſo der Quotient richtig gefunden iſt, und man das Dividendum mit dem Quotienten dividirt, ſo muß der vorige Diviſor der Quotient werden.

Die 9. Erklärung.

30. Um einen Bruch auszudrücken, ſind zwo ganze Zahlen nöthig, wovon eine angiebt, in wieviele gleiche Theile das Ganze eingetheilt ſey, die andre aber, wieviele ſolche Theile den Bruch ausmachen. Jene heißt der Nenner, dieſe der Zähler des Bruchs. Beyde Zahlen unterſcheidet man durch einen Strich von einander, den Zähler ſetzt man über, den Nenner unter dem Strich.

Die 10. Erklärung.

31. Ein Bruch heißt ein ächter Bruch, wenn ſein Zähler kleiner als ſein Nenner iſt, im entgegen geſetzten Fall aber ein unächter Bruch.

Zuſatz.

32. Der ächte Bruch iſt kleiner als das Ganze, der unächte Bruch entweder eben ſo groß, oder gröſſer, als das Ganze.

Der 2. Lehrſatz.

33. Wenn der Diviſor gröſſer, als das Dividendum iſt, ſo wird der Quotient ein ächter Bruch: das Dividendum wird ſein Zähler, und der Diviſor ſein Nenner.

Beweis. Wenn man 1 mit 5 dividiren ſoll, ſo iſt für ſich klar, daß der Quotient $\frac{1}{5}$ ſey, alſo iſt 3 $= 1 + 1 + 1$ mit 5 dividirt, ſoviel als $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Eben ſo giebt 7 mit 9 dividirt den Bruch $\frac{7}{9}$, u. ſ. ferner.

Der 1. Zuſatz.

34. Aus dem Beweiſe folgt ganz allgemein, daß jeder Quotient als ein Bruch angeſehen werden könne, wenn das Dividendum der Zähler, der Diviſor der Nenner iſt. Demnach iſt $15 : 8 = \frac{15}{8}$, $37 : 9 = \frac{37}{9}$, u. ſ. f. und man kann jeden Quotienten auf dieſe Art als einen Bruch ſchreiben. Auch iſt umgekehrt jeder Bruch ein Quotient, wenn der Zähler das Dividendum, der Nenner aber der Diviſor wird.

Der 2. Zuſatz.

35. Jeder unächte Bruch iſt entweder ſelbſt eine ganze Zahl, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem ächten Bruch, welche beyde zuſammen eine vermiſchte Zahl ausmachen.

Die 5. Aufgabe.

36. Das Dividendum beſtehet höchſtens aus zwoen, der Diviſor nur aus einer Ziffer; man ſoll den Quotienten finden.

Aufl. 1. Fall. Wenn der Diviſor gröſſer, als die höchſte Ziffer im Dividendo iſt; ſo kann der Quotient

tient nicht gröſſer als 9 ſeyn. Sollte man 79 mit 8 dividiren, ſo kann 10 nicht der Quotient ſeyn, weil 10mahl 8 ſchon 80 macht. Demnach findet man leicht mit Hülfe des Ein mahl Eins, wievielmahl der Diviſor im Dividendo enthalten ſey. Die Zahl, welche dies angiebt, iſt der Quotient, wofern ſie mit dem Diviſor multiplicirt ein Product giebt, das dem Dividendo gleich iſt. In einem ſolchen Fall ſagt man, **der Diviſor gehe im Dividendo auf.** Fände man ein Product, das gröſſer wäre als das Dividendum, ſo müſte man die als Quotienten angenommene Zahl ſo lange um Eins vermindern, bis das Product eben ſo groß oder kleiner, als das Dividendum ausfiele. Im letzten Fall zieht man es vom Dividendo ab, und addirt zum Quotienten noch einen Bruch, deſſen Zähler dem Reſt, der Nenner aber dem Diviſor gleich iſt, wie in nachſtehenden Exempeln

79			50		
8	$9\frac{7}{8}$		7	$7\frac{1}{7}$	
72			49		
7			1		

2. Fall. Wenn der Diviſor kleiner, oder eben ſo groß iſt, als die höchſte Ziffer im Dividendo, und die niedrigſte Ziffer des letztern 0 iſt; ſo ſuche man auf ähnliche Art, wie vorhin, wievielmahl der Diviſor in der höchſten Ziffer des Dividendi enthalten iſt, und ſetze zum Quotienten eine 0. Ob das alsdenn ſchon der ganze Quotient ſey, oder noch ein Bruch hinzu komme, das prüft man eben ſo, wie vorhin.

```
   60|20          70|30
3) 60|        2)  60| 5
   --             --  --
    0             10  35
              2)  10
                  --
                   0
```

Im letzten Exempel muſte man auch den Reſt 10 noch mit 2 dividiren, und was herauskam, zum vorigen Quotienten addiren. Bliebe zuletzt ein Reſt, der kleiner als der Diviſor wäre, ſo müſte man noch einen Bruch zuſetzen, wie in dem nebenſtehenden Exempel.

```
   80|20
3) 60|  6 2/3
   --  -----
   20  26 2/3
3) 18
   --
    2
```

3. Fall. Wenn auch bey eben den Bedingungen des vorigen Falles die letzte Ziffer nicht 0 wäre, ſo würde man doch den Quotienten auf ähnliche Art finden, wie folgende Exempel zeigen.

```
   65|20            75|10
3) 60|  1 2/3   4)  40|  8 3/4
   --  -----        --  -----
    5  21 2/3       35  18 3/4
3)  3           4)  32
   --               --
    2                3
```

Zuſatz.

37. In den beyden letzten Fällen erhält der Quotient zwo Ziffern, die man etwas kürzer findet, wenn man in jeder Columne für ſich allein rechnet, und die zweyte Ziffer des Quotienten gleich zur Rechten neben der erſten ſetzt. Wenn übrigens auch das Dividendum noch mehr Ziffern hätte, ſo würde man die Theile des Quotienten nacheinander leicht eben ſo finden, wie im beygeſ. Exempel.

```
   79368|26456
3) 6....|
   -
   19...
3) 18...
   --...
    13..
3)  12..
    --..
     16.
3)   15.
     --
      18
3)    18
      --
       0
```

Der 3. Lehrſatz.

38. Wenn man vor der Diviſion das Dividendum und den Diviſor mit einer und eben derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt; ſo findet man doch allemahl einerley Quotienten.

Beweis. Wenn 12 mit 4 dividirt 3 giebt, ſo muß 24 mit 4 dividirt nochmahl ſoviel, aber 24 mit 8 dividirt wieder nur halb ſo viel, alſo eben ſo viel, als anfangs geben. (20. 21. §.) Das heiſt 12 × 2 mit 4 × 2 dividirt giebt eben ſoviel, als 12 mit 4 dividirt: mithin auch 24 : 8 eben ſoviel, als die Hälfte von 24 mit der Hälfte von 8 dividirt.

Der 1. Zuſatz.

39. Wenn das Dividendum und der Diviſor rechter Hand Nullen haben, ſo ſtreiche man vor der Diviſion gegen jede 0 im Diviſor auch eine im Dividendo aus: das ändert den Quotienten nicht.

Der 2. Zuſatz.

40. Den Zähler und Nenner eines Bruchs kann man mit einerley dritten Zahl multipliciren oder dividiren, ohne daß es den Werth des Bruchs ändert.

Die 6. Aufgabe.

41. Jede vorgelegte ganze Zahl mit einer kleinern ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. 1. Fall. Wenn beyde Zahlen gleichviele Ziffern haben, ſo ſuche man den Quotienten eben ſo, als wenn alle Ziffern, die erſten ausgenommen, Nullen wären: mache aber die Probe, wie oben 36. und 37. §; ſo zeigt ſich gleich, ob ein Reſt bleibe oder nicht. Es verſteht ſich, daß dieſer Reſt kleiner als der Diviſor ſeyn müſſe, ſonſt hätte man den Quotienten zu klein genommen.

$$\begin{array}{r|l} 534 & \\ 216 & 2\tfrac{102}{216} \,\Big|\, \tfrac{51}{108} \\ \underline{432} & \\ 102 & \end{array}$$

2. Fall. Wenn das Dividendum eine Ziffer mehr, als der Diviſor hat, und der Diviſor gröſſer iſt, als eine Zahl, die aus den höchſten Ziffern im Dividendo allein beſtünde, die niedrigſte weggelaſſen; ſo ſuche man wiederum den Quotienten ſo, als wenn im Dividendo alle Ziffern bis auf die 2 höchſten, im Diviſor aber bis auf die höchſte allein Nullen wären: mache auch hiernächſt die ſchon bekannte Probe, wie im beygefügten Exempel.

```
3847 |
 423 | 9 40/423
3807 |
-----
  40
```

Wäre der Diviſor eben ſo groß, oder kleiner als eine Zahl, die aus eben ſovielen von den höchſten Ziffern im Dividendo allein genommen beſtünde; ſo laſſe man die letzte Ziffer im Dividendo anfangs weg, und rechne nach der erſten Regel. Zum Reſt nehme man die letzte Ziffer des Dividendi, und wiederhohle daſſelbe Verfahren, ſo findet man die zweyte Ziffer des Quotienten.

```
897342  |
26309 . | 34 2836/26309          7713 |
78927 . |                         772 | 9 765/772
-------                          6948 |
108072                           -----
 26309                            765
105236
------
  2836
```

3. Fall. Wenn gleich die Zahl der Ziffern im Dividendo die Zahl der Ziffern im Diviſor um ſoviele, als man will, übertrift; ſo findet man doch leicht den Quotienten, wenn man die bisherigen Regeln, wie im nachſtehenden Exempel anwendet.

78934 |
278.. | $283\frac{260}{278} \Big| \frac{130}{139}$
556.. |
2333. Allemahl muß der Reſt
278. kleiner als der Diviſor
2224. ſeyn.
1094
278
834
260

Der 1. Zuſatz.

42. Wenn der Diviſor 1 mit einer Reihe dran hängender Nullen iſt, ſo ſchneide man im Dividendo rechter Hand vermittelſt eines Strichs ſoviele Ziffern ab, als im Nenner Nullen ſind: dieſe machen den Reſt aus, und was linker Hand des Strichs bleibt, iſt der Quotient, ſoweit er in ganzen Zahlen gefunden wird.

758 | 36947 | $758\frac{36947}{100000}$
100000)

Der 2. Zuſatz.

43. Die Multiplication und Diviſion dienen einander zur Probe, weil das Product mit dem einen Factor dividirt, den andern Factor zum Quotienten, und der Quotient mit dem Diviſor multiplicirt das Dividendum weniger den zuletzt gebliebenen Reſt geben muß.

Die 11. Erklärung.

44. Wenn einerley Zahl 7 in mehrern andern 14, 21, 28, u. ſ. f. zugleich aufgeht; ſo heißt ſie ihr gemeines Maaß. Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, heiſſen unter ſich Primzahlen, und eine Zahl, die mit keiner andern, als mit ſich

 ſelbſt

ſelbſt, und mit Eins aufgeht, heißt eine abſolute Primzahl.

Die 7. Aufgabe.

45. Es ſind zwo Zahlen gegeben, man ſoll ihr gröſtes gemeines Maaß finden.

Aufl. Man dividire die gröſſere Zahl mit der kleinern, ſo findet man, ob vielleicht die kleinere ſelbſt das geſuchte Maaß ſey. Wenn das nicht iſt, ſo iſt das Maaß des Reſtes und des Diviſors zugleich ein Maaß des Dividendi. Demnach dividire man den Diviſor mit dem Reſt, ob derſelbe vielleicht im Diviſor aufgehet. Das Verfahren wiederhohle man, bis endlich ein Reſt kommt, der im letzten Diviſor aufgeht: eben derſelbe iſt das geſuchte gröſte gemeine Maaß. Wenn 28 und 12 die Zahlen ſind, ſo findet man das gröſte Maaß 4. Bliebe endlich 1 zum Reſt, ſo wären die Zahlen unter ſich Primzahlen.

Der 1. Zuſatz.

46. Wenn drey, vier und mehr Zahlen gegeben ſind, ſo ordne man ſie nach ihrer Gröſſe, und ſuche zuerſt für die zwey kleinſten das gemeine Maaß; mit dieſem Maaß nehme man die dritte zuſammen, und ſuche für beyde ein gemeines Maaß, das wird auch in den beyden erſten Zahlen aufgehen. Für dies Maaß der erſten 3 Zahlen, und für die vierte ſuche man wieder ein Maaß, ſo geht daſſelbe in allen vier Zahlen auf. Das Verfahren erſtreckt ſich eben ſo auch auf noch mehr Zahlen.

Der 2. Zuſatz.

47. Wenn man beydes Zähler und Nenner eines Bruchs mit ihrem gröſten gemeinen Maaß dividirt; ſo erhält man einen eben ſo groſſen Bruch, der durch ſeine kleinſten Zahlen ausgedrückt iſt.

Die 8. Aufgabe.

48. Zwo oder noch mehr Brüche, die ungleiche Nenner haben, in andre eben ſo groſſe Brüche mit gleichen Nennern zu verwandeln.

Aufl. 1) Man ſuche zuförderſt eine Zahl, welche die Eigenſchaft hat, daß jeder von den gegebenen Nennern darin aufgeht. Ohne Zweifel hat das Produkt aller Nenner dieſe Eigenſchaft: allein man findet auf folgende Art auch eine Zahl, die noch kleiner als jenes Produkt, ja unter mehrern möglichen die kleinſte iſt.

Man ſetze, daß $\frac{11}{84}$, $\frac{13}{63}$, $\frac{9}{42}$, die gegebenen Brüche ſind, und dividire, wie hier zur Seite alle Nenner mit ihrem gemeinen Maaſſe 21. Weil noch zwey unter den Quotienten das gemeine Maaß 2 haben, ſo ſetze man die Quotienten drunter, laſſe aber 3 unverändert. Die gebrauchten Maaſſe, und die zuletzt herausgebrachten Zahlen multiplicire man in einander; ſo hat das Product 252 die verlangte Eigenſchaft.

21)	84	63	42
2)	4	3	2
	2	3	1

$21 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 = 252.$

2) Nun ſchreibe man die Brüche, wie hier zur Seite unter einander, den Generalnenner oben, dividire ihn mit den Specialnennern, und ſetze die Quotienten 3, 4, 6, zur Seite daneben. Mit dieſen Quotienten multiplicire man die Zähler, ſo geben die Producte die Zähler der geſuchten Brüche.

252		
$\frac{11}{84}$	3	33
$\frac{13}{63}$	4	52
$\frac{9}{42}$	6	54

Die 9. Aufgabe.

49. Zwey oder mehr Brüche zu addiren.

Aufl. Wofern ſie nicht alle gleiche Nenner haben, ſo bringe man ſie nach dem vorigen §. auf

gleiche Benennung: hiernächſt addire man alle Zähler, und ſetze den gemeinen Nenner als Nenner unter der gefundenen Summe. Vielleicht wird das ein unächter Bruch: alsdenn kann man ihn durch die Diviſion in eine gemiſchte Zahl verwandeln.

		252
$\frac{11}{84}$	3	33
$\frac{13}{63}$	4	52
$\frac{9}{42}$	6	54
		$\frac{139}{252}$

Zuſatz.

50. Eine vermiſchte Zahl wie $7\frac{3}{4}$ richtet man ein, wenn man die ganze Zahl mit dem Bruch in einen unächten Bruch zuſammen ziehet. Es iſt $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$.

Die 12. Erklärung.

51. Decimalbrüche heiſſen ſolche Brüche, die keine andre Nenner haben, als die Zahl 10, oder ein Product der Zahl 10 mit ſich ſelbſt, welches allemahl die 1 mit einer Reihe dran hängender Nullen iſt.

Der 1. Zuſatz.

52. Einen Decimalbruch wie $\frac{763}{100}$ kann man mit Weglaſſung des Nenners ſo ſchreiben, daß man im Zähler von der Rechten gegen die Linke durch ein Comma ſoviele Ziffern abſchneidet, als im Nenner Nullen ſind. Alsdenn iſt $\frac{763}{100} = 7,63$. Hätte der Zähler nur eben ſoviele Ziffern, als im Nenner Nullen ſind, ſo müſte man noch eine Null mit dem Comma auf dieſe Art voranſetzen $\frac{63}{100} = 0,63$. Wenn im Nenner mehr Nullen wären, als im Zähler Ziffern ſind, ſo müſte man ſovlele Nullen voran ſetzen, bis man ſoviele Nullen und Ziffern zuſammen hätte, als im Nenner Nullen ſind, voran aber noch eine Null mit dem Comma auf dieſe Art $\frac{74}{100000} = 0,00074$.

Der

Der 2. Zuſatz.

53. Was nun vor dem Comma ſteht, iſt eine ganze Zahl, was nach dem Comma folgt, ein ächter Decimalbruch, und die Ziffern nach dem Comma gehören zu verſchiedenen abnehmenden Decimalordnungen. Es iſt $25,8364 = \frac{258364}{10000} = 25\frac{8364}{10000}$ (42. §.) $= 25 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{4}{10000}$. (49. §.)

Der 3. Zuſatz.

54. Zahlen mit Decimalbrüchen addirt man eben ſo, als wenn es ganze Zahlen wären: nur muß man alles recht unter einander ſchreiben, daß die Einer, bey welchen das Comma ſteht, in einer Columne unter einander kommen, ſo giebt ſich alles übrige von ſelbſt, wenn in der Summe das Comma in der Columne der Einer geſetzt wird.

87,3472
9,78649
382,503
479,63669

Die 10. Aufgabe.

55. **Einen kleinern Bruch vom gröſſern zu ſubtrahiren.**

Aufl. 1) Nachdem man beyde auf einerley Benennung gebracht hat, wenn ſie nicht ſchon einerley Nenner hatten; ſubtrahirt man den kleinern Zähler vom gröſſern, und behält den gemeinen Nenner.

24		
$\frac{5}{8}$	3	15
$\frac{7}{12}$	2	14
	Reſt	$\frac{1}{24}$

2) Wenn es eine Zahl mit Decimalbrüchen iſt, ſo ſetzt man die kleinere unter der gröſſern, wie beym addiren, und ſubtrahirt, als wenn alles ganze Zahlen wären. Denn wirklich ſubtrahirt man ſo den kleinern Zähler vom gröſſern, und

	34,37
	8,5634
Reſt	25,8066

behält

behält den gemeinen Nenner, wenn nur das Comma wieder in die Columne der Einer geſetzt wird.

Die 11. Aufgabe.

56. **Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.**

$$\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8}$$

Aufl. 1) Man multiplicire den Zähler, und behalte den Nenner bey.

2) Wenn der Multiplicator im Nenner des Bruchs aufgeht, ſo dividire man ihn damit, und behalte den Zähler. Denn man macht den Bruch eben ſovielmahl gröſſer, ſoviel mahl der Nenner kleiner wird.

$$\frac{7}{18} \times 2 = \frac{7}{9}$$

3) Wenn das Multiplicandum ein Decimalbruch iſt, ſo multiplicire man ohne Rückſicht auf das Comma, als wenn es eine ganze Zahl wäre, gebe aber dem Product ſoviele Decimalſtellen, als das Multiplicandum hatte. Denn es iſt $7,532 \times 8 = \frac{7532}{1000} \times 8 = \frac{7532 \times 8}{1000} = 60,256$.

Die 12. Aufgabe.

57. **Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.**

Aufl. 1) Man dividire den Zähler mit dem Diviſor, und behalte den Nenner.

$$3)\frac{15}{16} \Big| \frac{5}{16}$$

2) Wenn die Diviſion nicht aufgehen würde, ſo multiplicire man den Nenner mit dem Diviſor, und behalte den Zähler. Denn der Bruch wird eben ſovielmahl kleiner gemacht, als man ſeinen Nenner gröſſer macht.

$$3)\frac{17}{18} \Big| \frac{17}{54}$$

3) Eine Zahl mit Decimalſtellen dividirt man ohne Rückſicht auf das Comma, und giebt dem Quotienten ſoviele Decimalſtellen, als das Divi-

dendum

dendum hat. Denn es iſt $58{,}608 : 8 = \frac{58608}{1000} : 8$ $= \frac{7326}{1000} = 7{,}326$.

Zuſatz.

58. Wenn bey dem Verfahren nach der erſten Regel die Diviſion nicht aufgeht, ſo erhält man einen gebrochenen Bruch, der nach der zweyten Regel vermieden wird, aber bey dem Verfahren nach der dritten Regel nicht allemahl vermieden werden kann, wofern man den Quotienten in Decimaltheilen verlangt.

$3)\frac{17}{18}\Big|\frac{5\frac{2}{3}}{18}$ $\qquad 7)26{,}374\Big|3{,}767\frac{5}{7000}$

Die 13. Aufgabe.

59. Statt eines gemeinen Bruches einen eben ſo groſſen Decimalbruch zu finden.

Aufl. Man füge dem Zähler ſo viele Nullen bey, als man für gut findet, und dividire nun mit dem Nenner. Im Quotienten ſchneide man zur Rechten ſoviele Decimaltheile ab, als im Zähler Nullen beygefügt waren. Denn es iſt $\frac{3}{4} = \frac{300}{100} : 4 = \frac{75}{100}$ $= 0{,}75$.

Zuſatz.

60. Man kann bey der niedrigſten Ziffer im Zähler ein Comma ſetzen, hiernächſt ſoviele Nullen, als man gut findet, beyfügen, und alsdenn nach der dritten Regel des 57 §. rechnen. Es iſt $\frac{3}{4} = \frac{3{,}00}{4}$, $\frac{5}{8} = \frac{5{,}000}{8}$ u. ſ. f. Die Nullen kann man auch eine nach der andern dem Reſt jedesmahl beyfügen, weil ſie beym Rechnen ehe nicht gebraucht werden.

Die

Die 13. Erklärung.

61. Eine Gröſſe mit einem Bruch multipliciren heißt denjenigen Theil von ihr, welchen des Bruchs Nenner anzeigt, mit dem Zähler multipliciren. Eine Gröſſe aber mit einem Bruch dividiren heißt einen ſolchen Quotienten finden, der mit dem gebrochenen Diviſor multiplicirt das Dividendum herſtellt.

Der 1. Zuſatz.

62. Mit einem Bruch dividiren heißt alſo nicht das Dividendum ſelbſt, ſondern ein multiplum davon, welches des Bruchs Nenner anzeigt, mit dem Zähler dividiren. Wenn man die Zahl 6 mit $\frac{2}{3}$ dividiren ſoll, ſo wird eine Zahl geſucht, wovon der 3te Theil 2mahl genommen 6 macht. Wird alſo 6 mit 2 dividirt, und 3 gefunden; ſo iſt das noch nicht der Quotient, ſondern ſein 3ter Theil: folglich iſt der Quotient 3mahl gröſſer, oder 3mahl 3 = 9. Demnach kann man gleich anfangs das Dividendum 3mahl gröſſer machen, und das multiplum 18 mit 2 dividiren.

Der 2. Zuſatz.

63. Eine ganze Zahl multiplicirt man mit einem Bruch, wenn man ſie mit dem Zähler multiplicirt, und das Product mit dem Nenner dividirt. Dagegen wird eine ganze Zahl mit einem Bruch dividirt, wenn man ſie mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Zähler dividirt.

57 mult. $\frac{7}{8}$ 8) 399 | $49\frac{7}{8}$ Prod.	29 div. $\frac{5}{8}$) 5) 232 | $46\frac{2}{5}$ Quot.

Der

Der 3. Zuſatz.

64. Eine ganze Zahl und ein Bruch geben mit veränderter Ordnung einerley Product. (56 26. §.) Wenn alſo das Multiplicandum eine ganze Zahl iſt, und der Multiplicator Decimaltheile enthält, ſo findet die dritte Regel des 56. §. ihre Anwendung.

Der 4. Zuſatz.

65. Wäre das Dividendum eine ganze Zahl, wenn der Diviſor Decimaltheile hat, ſo ſetzt man zum Dividendo ſoviele Nullen zu, als Decimaltheile im Diviſor ſind, und dividirt nachher ohne Rückſicht auf das Comma. So iſt $7 : 3,25 = 7 : \frac{325}{100} = 700 : 325.$ (59. §.)

Die 14. Aufgabe.

66. Einen Bruch mit einem andern Bruch zu multipliciren.

Aufl. 1) Man multiplicire beyde Zähler und beyde Nenner in einander: jenes Product iſt der Zähler, dieſes aber der Nenner des geſuchten Bruchs. Es iſt nemlich $\frac{23}{28} \times \frac{5}{9} = \frac{23}{28} : 9 \times 5$ (61. §.) $= \frac{23}{28 \times 9} \times 5$ (57. §.) $= \frac{23 \times 5}{28 \times 9}$ (56. §.) $= \frac{115}{252}$.

2) Man kann auch kreuzweiſe des Multiplicandi Zähler mit des Multiplicators Nenner, und des erſten Nenner mit des letztern Zähler dividiren. Denn es iſt $\frac{27}{28} \times \frac{2}{3} = \frac{27}{28} : 3 \times 2$ (61. §.) $= \frac{27 : 3}{28} \times 2$ (57. §.) $= \frac{27 : 3}{28 : 2}$ (56. §.) $= \frac{9}{14}$. Wenn die Diviſionen aufgehen, ſo giebt dies Verfahren kleinere Zahlen für den Bruch, als das Verfahren nach der erſten Regel.

3) Wenn eine von beyden Diviſionen allein, die andre aber nicht aufgeht, ſo läßt man die Zahl, welche mit dem Diviſor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicirt was die Diviſion der andern Zahl giebt mit derjenigen, womit man ſonſt die erſte hätte dividiren müſſen. Es iſt nemlich $\frac{32}{37} \times \frac{7}{8}$ $= \frac{32}{37} : 8 \times 7$ (61. §.) $= \frac{32 : 8}{37} \times 7$ (57. §.) $= \frac{32 : 8 \times 7}{37}$ (56. §.) $= \frac{28}{37}$.

4) Decimalbrüche multiplicirt man ohne Rückſicht auf das Comma ſo ineinander, als wenn es ganze Zahlen wären, giebt aber dem Product ſoviele Decimaltheile, als beyde Factoren zuſammen enthalten. Denn es iſt $7,243 \times 3,17 = \frac{7243}{1000} \times \frac{317}{100} = \frac{7243 \times 317}{100000}$ $= 22,96031$.

Zuſatz.

67. Zwey Brüche, alſo auch mehrere, geben mit veränderter Ordnung einerley Product. (26. §.)

Die 15. Aufgabe.

68. **Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.**

Aufl. 1) Man dividire des Dividendi Zähler mit des Diviſors Zähler, und des Dividendi Nenner mit des Diviſors Nenner. Der erſte Quotient iſt der Zähler, der andre aber der Nenner des geſuchten Bruchs. Denn man erhält $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \frac{21}{32}$ $\times 8 : 3$ (62. §.) $= \frac{21}{32 : 8} : 3$ (56. §.) $= \frac{21 : 3}{32 : 8}$ (57. §.) $= \frac{7}{4}$.

2) Wenn

2) Wenn eine von beyden Diviſionen nicht aufgeht; ſo laſſe man die Zahl, welche mit dem Diviſor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicire, was die Diviſion der andern Zahl giebt, mit derjenigen, womit man die erſte hätte dividiren müſſen. Man hat nemlich $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \frac{12}{17} \times 9 : 4$ (62. §.) $= \frac{12 \times 9}{17} : 4 = \frac{12 : 4 \times 9}{17} = \frac{27}{17}$.

3) Allemahl aber kann man kreuzweiſe des Dividendi Zähler mit des Diviſors Nenner, und des Dividendi Nenner mit des Diviſors Zähler multipliciren. Das erſte Product iſt der Zähler, das zweyte aber der Nenner des geſuchten Bruchs. Denn es iſt $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times 9 : 2$ (62. §.) $= \frac{3 \times 9}{4} : 2$ (56. §.) $= \frac{3 \times 9}{4 \times 2}$ (57. §.) $= \frac{27}{8}$.

4) Eine Zahl mit Decimalſtellen dividirt man mit einer andern Zahl, die ebenfalls Decimalſtellen enthält, ohne Rückſicht auf das Comma eben ſo, als wenn es ganze Zahlen wären, giebt aber nach geendigter Rechnung dem Quotienten rechter Hand ſoviele Decimalſtellen, als übrig bleiben, wenn die Anzahl der Decimalſtellen im Diviſor von der Anzahl der Decimalſtellen im Dividendo abgezogen wird.

Wäre noch ein Reſt geblieben, ſo müſte man noch wie ſonſt gewöhnlich einen Bruch zuſetzen, deſſen Zähler der Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt mit ſoviel beygefügten Nullen, als der bis dahin gefundene Theil des Quotienten Decimalſtellen erhält. Es iſt nemlich $2{,}334 : 1{,}6 = \frac{2334}{1000} : \frac{16}{10} =$

$\frac{2334:16}{1000:10}$ (1ſte Regel) $= \frac{145\frac{14}{16}}{100} = 1{,}45\frac{14}{1600}$.

Hätte das Dividendum weniger Decimalſtellen, als der Diviſor, ſo kann man, ſobald die Stelle der Einer feſtgeſetzt iſt, im Dividendo rechter Hand ſoviele Nullen, als man gut findet, beyfügen. Statt 8,7 : 2,324 hat man auch 8,700 : 2,324 = 8700 : 2324. (38. §.)

Zuſatz.

69. Wenn man die Diviſion nach der im 60. §. gegebenen Anleitung fortſetzet; ſo geht zuweilen zuletzt alles auf, und man erhält den Quotienten völlig in Decimalſtellen. So findet man im letzten Exempel 2,334 : 1,6 = 1,45875. In andern Fällen kann man doch die Rechnung in Decimalſtellen ſo weit treiben, daß der noch fehlende Bruch kleiner wird, als jeder gegebene noch ſo kleine Bruch.

Die 14. Erklärung.

70. Ein Product aus zweyen gleich groſſen Factoren heißt die **Quadratzahl**, und ein Product aus drey gleich groſſen Factoren die **Cubiczahl** eines jeden von den Factoren. Jeder von den erſten beyden Factoren heißt die **Quadratwurzel** aus der Zahl, die beyde in einander multiplicirt hervorbringen, und jeder von den drey gleich groſſen Factoren wird die **Cubicwurzel** aus der Zahl genannt, die das Product dieſer drey gleichen Factoren ausmacht. Wenn ein Product aus noch mehrern gleich groſſen Factoren entſtanden iſt, ſo heißt es überhaupt eine **Potenz** des mehrmahl nach einander mit ſich ſelbſt multiplicirten Factors.

Es ſey a die Wurzel, ſo iſt aa die Quadratzahl, und aaa die Cubiczahl. Statt deſſen ſchreibt man kürzer a^2, und a^3.

Der

Der 1. Zuſatz.

71. Wenn die Wurzel rechter Hand Nullen hat, ſo iſt die Quadratzahl gefunden, wenn man der Quadratzahl der Ziffern doppelt ſoviele Nullen, als in der Wurzel ſind, beyfügt; die Cubiczahl aber, wenn man der Cubiczahl der Ziffern dreymahl ſoviele Nullen beyfügt, als die Wurzel enthält.

Der 2. Zuſatz.

72. Wenn die Wurzel aus zweyen Theilen a und b beſteht, ſo findet man $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Der 3. Zuſatz.

73. Die Zahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl beſtehet, iſt nie gröſſer, als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzel: auch nicht kleiner, als die doppelte Zahl der Ziffern der Wurzel weniger Eins.

Es iſt z. E. $324 = 300 + 24$

$$\frac{300}{324^2 = 90000 + 2 \cdot 300 \cdot 24 + 24^2}$$

Die kleinſte von den Zahlen, welche ſieben Ziffern haben, iſt 1000000, davon iſt 1000 die Quadratwurzel, alſo gewiß gröſſer als 324.

Der 4. Zuſatz.

74. Wenn die Quadratzahl von der Rechten gegen die Linke in Claſſen von zwey Ziffern getheilt wird, ſo beſteht die Wurzel aus ſovielen Ziffern, als man Claſſen gemacht hat. Geſetzt, man hat drey Claſſen: ſo kann die Wurzel nicht zwey Ziffern haben, weil ſonſt die Quadratzahl höchſtens vier Ziffern, alſo nur 2 Claſſen hätte. In eben dem Fall kann auch die Wurzel nicht vier Ziffern haben, weil ſonſt die Quadratzahl wenigſtens 7 Ziffern, alſo vier Claſſen hätte.

Der 5. Zuſatz.

75. Wenn die Cubicwurzel aus zweyen Theilen beſtehet, ſo findet man $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Der 6. Zuſatz.

76. Die Zahl der Ziffern, woraus die Cubiczahl beſteht, iſt nie gröſſer, als die dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel; auch nie kleiner, als dieſe dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel weniger zwey. Es iſt z. E. $324 = 300 + 24$, alſo $324^3 = 3000000 + 3 \cdot 300^2 \cdot 24 + 3 \cdot 300 \cdot 24^2 + 24^3$. Die kleinſte von den Zahlen, welche 10 Ziffern haben, iſt 1000000000, und die Cubicwurzel davon 1000 iſt gröſſer, als 324.

Der 7. Zuſatz.

77. Wenn die Cubiczahl von der Rechten gegen die Linke in Claſſen von drey Ziffern getheilt wird, da dann für die höchſte vielleicht nur eine oder zwo übrig bleiben; ſo beſteht die Cubicwurzel aus ſovielen Ziffern, als man Claſſen gemacht hat. Der Beweis iſt dem in 74. §. geführten ganz ähnlich.

Der 8. Zuſatz.

78. Wenn die Summe zwoer Zahlen $a+b$ mit ihrer Differenz $a-b$ multiplicirt wird; ſo iſt das Product der Differenz ihrer Quadratzahlen gleich. Es iſt nemlich $(a+b)(a-b) = (a+b)a - (a+b)b$, und $(a+b)a = aa + ab$, $(a+b)b = ab + bb$; alſo $(a+b)(a-b) = aa - bb$.

Die 16. Aufgabe.

79. Aus einer vorgelegten Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Aufl. 1) Wenn die Quadratzahl nur zwo Ziffern hat, ſo iſt ihre Wurzel nicht gröſſer als 9. Man

findet ſie leicht mit Hülfe des Ein mahl Eins, und wenn es keine vollkommene Quadratzahl iſt, ſo nimmt man die Wurzel aus der nächſtkleinern Quadratzahl, und notirt den Reſt.

$$\begin{array}{r|l} 64 & 8 \\ 64 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \dot{5}7 & 7 \\ 49 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

2) Hätte die Quadratzahl 3 oder 4 Ziffern, ſo kann man zwey Claſſen machen, (74. §.) und die Wurzel hat 2 Ziffern. Die Quadratzahl der erſten ſteckt in der höchſten Claſſe, (71. §.) und in dem Reſt das doppelte Product aus dem 1ſten Theil in den zweyten nebſt der Quadratzahl des zweyten Theils. (72. §.) Wie nun der zweyte Theil gefunden wird, zeigt das nachſtehende Exempel.

$$\begin{array}{rcl|l} a^2 + 2ab + b^2 & = & 44|89 & 60 = a \\ a^2 & = & 36|00 & \quad 7 \\ \hline 2ab + b^2 & = & 889 & 67 = a + b \\ & & 120) & \\ 2ab & = & 840 & \\ b^2 & = & 49 & \\ \hline 2ab + b^2 & = & 889 & \end{array}$$

3) Kommt die dritte Claſſe hinzu, ſo hat die Wurzel drey Ziffern. Die beyden höchſten Ziffern ſucht man aus den beyden höchſten Claſſen der Quadratzahl nach der 2ten Regel, und nimmt alsdenn die beyden höchſten Ziffern der Wurzel zuſammen für den erſten Theil der Wurzel an, ſo läßt ſich die 3te Ziffer als der zweyte Theil der Wurzel anſehen, und wie vorhin finden.

$$\begin{array}{rcl|l} R^2 + 2Rr + r^2 & = & 45|42|76 & R + r \\ R^2 & = & 44|89|00 & 670 + 4 \\ \hline 2Rr + r^2 & = & |53|76 & \\ 2R & = & 1340 & \\ 2Rr & = & 5360 & \\ r^2 & = & 16 & \\ \hline 2Rr + r^2 & = & 5376 & \end{array}$$

4) Kommt die vierte oder noch mehr Claſſen hinzu, ſo wird aus dem ſchon bekannten Theil der Wurzel die folgende Ziffer allemahl wieder auf eben die Art gefunden. Kleine Rechnungsvortheile dabey laſſen ſich am beſten beym mündlichen Vortrage zeigen.

Der 1. Zuſatz.

80. Wenn ein Reſt bleibt, ſo muß derſelbe kleiner ſeyn, als das duplum von der bis dahin gefundenen Wurzel um Eins vermehrt.

Der 2. Zuſatz.

81. Die Quadratzahl eines Bruchs wird gefunden, wenn man die Quadratzahl des Zählers und des Nenners ſucht: alſo wird umgekehrt die Quadratwurzel aus einem Bruch gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner ſucht.

Der 3. Zuſatz.

82. Wenn die Quadratzahl eine grade Zahl von Decimalſtellen bey ſich hat; (und das kann man allemahl durch Beyfügung einer Null zuwege bringen, wenn die Anzahl ungrade wäre) ſo ſucht man die Quadratwurzel ohne Rückſicht auf das Comma, als wenn es eine ganze Zahl wäre, giebt aber der Wurzel halb ſoviele Decimalſtellen, als die Quadrat-

dratzahl hat. Bliebe ein Reſt, ſo kann man demſelben mehrere Nullen paarweiſe beyfügen, und die Wurzel in Decimaltheilen ſo genau als man will finden. Dieſen Regeln gemäß erhält man

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$ $\sqrt{6} = 2{,}4494897$
$\sqrt{3} = 1{,}7320507$ $\sqrt{7} = 2{,}64575131$
$\sqrt{5} = 2{,}2360679$ $\sqrt{10} = 3{,}1622776625$

Das Zeichen $\sqrt{\ }$, welches die Quadratwurzel aus der Zahl bezeichnet, der man es voran ſetzet, iſt von dem Buchſtaben *r* entſtanden, welchen man ſonſt in eben der Abſicht brauchte.

Anmerkung.

Vollſtändiger findet man dieſe Lehren in meinen Anfangsgründen der Mathematiſchen Wiſſenſchaften im XI. Abſchnitt der Rechenkunſt.

Die 17. Aufgabe.

83. Aus einer vorgelegten Zahl die Cubicwurzel zu finden.

Aufl. 1) Wenn die Zahl nicht über 3 Ziffern hat, ſo iſt die Wurzel nicht gröſſer als 9. Um ſie deſto leichter zu finden, kann man ſich ein für allemahl die erſten 9 Cubiczahlen, wie folget, ſuchen.

Wurzeln								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubiczahlen								
1	8	27	64	125	216	343	512	729

Wenn die vorgelegte Zahl keine vollkommene Cubiczahl iſt, ſo nimmt man die Wurzel aus der nächſtkleinern Cubiczahl, und notirt den Reſt.

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 343 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 328 & 6 \\ 216 & \\ \hline 112 & \end{array}$$

2) Beſtehet die vorgelegte Zahl aus 4, 5 bis 6 Ziffern, ſo kann man zwey Claſſen machen, (77. §.) und die Wurzel beſtehet aus zwoen Ziffern. Die Cubiczahl der höchſten Ziffer ſteckt in der höchſten Claſſe, (71. §.) und in dem Reſt die oben im 75. §. angezeigten dreyfachen Producte nebſt der Cubiczahl des zweyten Theils. Wie nun aus dem erſten Theil der Wurzel der zweyte gefunden wird, ſiehet man aus dem nachſtehenden Exempel.

$$
\begin{array}{rcl|l}
(a+b)^3 & = & 421\,|\,875 & a+b \\
a^3 & = & 343\,|\,000 & 70+5 \\
\hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 78875 & \\
3a^2 & = & 14700) & \\
3a^2b & = & 73500 & \\
3ab^2 & = & 5250 & \\
b^3 & = & 125 & \\
\hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 78875 & \\
\hline
 & & \text{Reſt } 0 &
\end{array}
$$

3) Wenn die dritte Claſſe in der Cubiczahl dazu kommt, ſo hat die Wurzel 3 Ziffern. Aus den beyden höchſten Claſſen findet man die beyden höchſten Ziffern der Wurzel, wie vorhin, und nimmt hiernächſt die beyden höchſten Ziffern der Wurzel zuſammen für den erſten Theil der Wurzel an; ſo wird die dritte Ziffer der zweyte Theil, und man findet denſelben durch ein ähnliches Verfahren wie vorhin.

$$\begin{array}{rcl|l}
(R+r)^3 & = & 432\,|\,081\,|\,216 & R+r \\
R^3 & = & 421\,|\,875\,|\,000 & 750+6 \\
\hline
3R^2r+3Rr^2+r^3 & = & 10206216 & \\
3R^2 & = & 1687500) & \\
3R^2r & = & 10125000 & \\
3Rr^2 & = & 81000 & \\
r^3 & = & 216 & \\
\hline
3R^2r+3Rr^2+r^3 & = & 10206216 & \\
\hline
 & & \text{Reſt } 0 &
\end{array}$$

4) Wenn nun gleich die vierte, und noch mehr Claſſen hinzu kämen, ſo kann aus dem ſchon bekannten Theil der Wurzel die folgende Ziffer aufs neue eben ſo gefunden werden: dabey bleibt die Erörterung kleiner Rechnungsvortheile wiederum dem mündlichen Vortrage vorbehalten.

Der 1. Zuſatz.

84. Wenn ein Reſt bleibt, ſo muß derſelbe kleiner ſeyn, als das triplum der Summe der gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt.

Der 2. Zuſatz.

85. Die Cubiczahl eines Bruchs wird gefunden, wenn man die Cubiczahl des Zählers und des Nenners macht: alſo wird umgekehrt die Cubicwurzel aus einem Bruch gefunden, wenn man die Cubicwurzel ſowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner ſucht.

Der 3. Zuſatz.

86. Wenn an der Cubiczahl eine mit 3 theilbare Anzahl Decimalſtellen hängt, oder im entgegengeſetzten Fall durch Beyfügung einer oder zweyer Nullen eine mit 3 theilbare Anzahl von Decimalſtellen

zu-

zuwege gebracht wird; ſo ſucht man die Cubicwurzel ohne weitere Rückſicht auf das Comma, als wenn die Cubiczahl eine ganze Zahl wäre, giebt aber am Ende der Rechnung der Wurzel 3mahl weniger Decimalſtellen, als die Cubiczahl hatte. In dem Fall, wenn ein Reſt bleibt, kann man demſelben mehrmahl nach einander, ſo oft man es gut findet, drey Nullen beyſügen, und die Cubicwurzel in Decimaltheilen ſo genau, als man will finden. Nach dieſen Regeln findet man $\sqrt[3]{2} = 1,259921$, da dann auch in andern Fällen das Zeichen $\sqrt[3]{}$ die Cubicwurzel aus der Zahl bezeichnet, der man es voran ſetzt.

Anmerkung.

Im XII. Abſchnitt der Rechenkunſt im erſten Bande meiner Anfangsgründe der Mathematiſchen Wiſſenſchaften findet man von dieſem allen mehr Unterricht.

Die 15. Erklärung.

87. Die Gröſſe einer Sache, wieweit ſie aus Vergleichung mit der Gröſſe einer andern erkannt wird, heißt das **Verhältniß** der erſten Gröſſe gegen die zweyte. Dabey ſiehet man entweder nur auf den Unterſcheid beyder Gröſſen, den man vermittelſt der Subtraction findet: oder man ſiehet darauf, wievielmahl eins in dem andern enthalten ſey. Im erſten Fall heißt es ein **arithmetiſches**, im zweyten Fall ein **geometriſches** Verhältniß. Die Differenz zweyer Gröſſen heißt auch der **Nahme ihres Verhältniſſes**, der Quotient aber, welcher anzeigt, wievielmahl eins im andern enthalten ſey, der **Exponent** des Verhältniſſes. Gewöhnlich wird das geometriſche Verhältniß verſtanden, wenn vom Verhältniſſe ſchlechthin die Rede iſt.

Die

Die 16. Erklärung.

88. Die Gleichheit zweyer Verhältniſſe macht eine Proportion aus, die alſo entweder eine arithmetiſche oder eine geometriſche Proportion ſeyn kann, nachdem die Verhältniſſe beſchaffen ſind. Iſt von einer Proportion ſchlechthin die Rede, ſo wird die geometriſche Proportion verſtanden. Der Ausdruck $7 - 4 = 11 - 8$ giebt ein Beyſpiel von der arithmetiſchen, und der Ausdruck $28 : 7 = 48 : 12$ ein Beyſpiel von der geometriſchen Proportion.

Der 1. Zuſatz.

89. Wenn A das zweyte Glied, D den Nahmen des Verhältniſſes, B das vierte Glied bezeichnet; ſo iſt $(A + D) - A = (B + D) - B$ der allgemeine Ausdruck für jede arithmetiſche Proportion. Wenn eben ſo m den Exponenten des Verhältniſſes bezeichnet; ſo iſt $mA : A = mB : B$ ein allgemeiner Ausdruck für jede geometriſche Proportion.

Der 2. Zuſatz.

90. Wenn man zwo Zahlen mit einer und eben derſelben dritten Zahl multiplicirt oder dividirt; ſo verhalten ſich im erſten Fall die Producte wie die Multiplicanda, im zweyten Fall die Quotienten wie die Dividenda. (38. §.)

Der 3. Zuſatz.

91. Demnach kann man in der geometriſchen Proportion $mA : A = mB : B$ die mittlern Glieder verwechſeln, und es iſt auch $mA : mB = A : B$ eine richtige Proportion. (90. §.) Daß der Satz auch für die arithmetiſche Proportion gelte, erhellet leicht aus dem allgemeinen Ausdruck $(A + D) - A = (B + D) - B$. (89. §.)

Die

Die 17. Erklärung.

92. Eine ſtetige Proportion iſt diejenige, worin die beyden mittlern Glieder gleich groß ſind, und wenn auch noch mehr als drey Zahlen in einerley Verhältniß fortlaufen, ſo nennt man es eine **Progreſſion**, die wiederum nach Verſchiedenheit der Verhältniſſe entweder arithmetiſch oder geometriſch iſt.

Der 4. Lehrſatz.

93. **In der arithmetiſchen Proportion ſind die Summen der äuſſern und mittlern Glieder, in der geometriſchen aber die Producte der äuſſern und mittlern Glieder gleich groß.**

Beweis. Wenn in dem allgemeinen Ausdruck $(A+D)-A=(B+D)-B$ das erſte und vierte, imgleichen das zweyte und dritte ſummirt werden; ſo erhält man in beyden Fällen $A+D+B$. Wenn dagegen in dem Ausdruck $mA:A=mB:B$ das erſte Glied mit dem vierten, und das zweyte mit dem dritten multiplicirt wird; ſo findet man $m.A.B$ ebenfalls in beyden Fällen.

Zuſatz.

94. In der ſtetigen arithmetiſchen Proportion iſt das doppelte mittelſte Glied ſo groß, als die Summe des erſten und dritten, in der ſtetigen geometriſchen Proportion aber die Quadratzahl des mittlern Gliedes ſo groß, als das Product des erſten mit dem dritten multiplicirt.

Der 5. Lehrſatz.

95. **Wenn zwo Summen, oder zwo Producte zwoer Zahlen gleich groß ſind; ſo ſind im erſten Fall die beyden Theile der einen Summe zwiſchen den beyden Theilen der andern**

dern mittlern arithmetiſche; im zweyten Fall aber die beyden Factoren des einen Products zwiſchen den beyden Factoren des andern mittlern geometriſche Proportionalzahlen.

Beweis. Es ſey $A + D = B + C$, ſo iſt auch $A + D - B = C$, alſo ferner $A - B = C - D$. (12. §.) Es ſey ferner $A . D = B . C$, ſo erhält man $\frac{A . D}{B} = C$, mithin ferner $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (20. §.) oder $A : B = C : D$.

Die 18. Aufgabe.

96. Zwiſchen zwoen gegebenen Zahlen die arithmetiſche oder geometriſche mittlere Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Die halbe Summe der beyden Zahlen iſt die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl, und die mittlere geometriſche Proportionalzahl wird gefunden, wenn man aus dem Product beyder Zahlen ineinander die Quadratwurzel ausziehet.

Zuſatz.

97. Wenn A, B, C, drey ſtetige arithmetiſche Proportionalzahlen ſind, und D die Differenz der Glieder iſt, ſo wird erfodert, daß $B = A + D$, $C = A + 2D$ ſey. Demnach iſt $2D = C - A$, und $D = \frac{1}{2}(C - A)$, mithin auch $B = A + \frac{1}{2}(C - A)$, welches der gegebenen Auflöſung gemäß $B = \frac{1}{2}(A + C)$ giebt.

Die 19. Aufgabe.

98. Es ſind drey Zahlen gegeben: man ſoll zu ihnen die vierte arithmetiſche, oder auch die vierte geometriſche Proportionalzahl finden.

Aufl. 1) Im erſten Fall addirt man die zweyte zur dritten, und ſubtrahirt von der Summe die erſte

Zahl.

Zahl. Denn aus der Proportion $A - B = C - D$ folgt $A + D = B + C$ (87. §.) alſo $D = B + C - A$.

2) Im zweyten Fall multiplicirt man die zweyte Zahl mit der dritten, und dividirt das Product mit der erſten Zahl. Denn aus der Proportion $A : B = C : D$ folgt $A . D = B . C$ (87. §.) mithin ferner $D = \frac{B . C}{A}$.

Zuſatz.

99. Wenn nur zwo Zahlen gegeben wären, und man ſollte die dritte ſtetige Proportionalzahl finden; ſo würde man für die arithmetiſche Proportion von der doppelten zweyten Zahl die erſte ſubtrahiren; für die geometriſche Proportion aber die Quadratzahl der zweyten Zahl mit der erſten dividiren müſſen.

Der 6. Lehrſatz.

100. **Wenn man die halbe Differenz zwoer Gröſſen zu ihrer halben Summe addirt; ſo wird die gröſſere von beyden gefunden. Wenn man aber die halbe Differenz von der halben Summe ſubtrahirt, ſo findet man die kleinere.**

Beweis. Wenn A und C dieſe Gröſſen ſind, und $C > A$ iſt, ſo iſt $\frac{1}{2}(C + A)$ zwiſchen beyden die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl, (96. §.) und die drey Zahlen A, $\frac{1}{2}(C + A)$, C, ſind in ſtetiger arithmetiſchen Proportion. Ferner iſt der Nahme des Verhältniſſes $= \frac{1}{2}(C - A)$, (97. §.) folglich $A = \frac{1}{2}(C + A) - \frac{1}{2}(C - A)$, und $C = \frac{1}{2}(C + A) + \frac{1}{2}(C - A)$.

Allgemeine Anmerkungen, die practiſche Rechenkunſt betreffend.

101. Eine genannte Zahl wird auf einen andern Nahmen gebracht, wenn man eine Zahl mit einem andern Nahmen ſucht, die jedoch mit der vorigen noch einerley Werth hat, ſo wie 2 Thlr. mit 48 Groſchen einerley Werth haben. Dabey muß man nur wiſſen, wieviele Stücke der kleinern Art Eins von der gröſſern Art ausmachen. Die Zahl, welche das angiebt, kann die Reductionszahl heiſſen. Soll alsdenn eine Zahl auf einen gröſſern Nahmen gebracht werden, ſo muß man mit der Reductionszahl dividiren, wie wenn man Groſchen in Thaler verwandeln ſollte: im Gegentheil muß man mit der Reductionszahl multipliciren, um eine genannte Zahl auf den kleinern Nahmen zu bringen.

102. Um genannte Zahlen zu addiren, ſchreibt man alles, was einerley Nahmen hat, in einerley Columne unter einander, man addirt hiernächſt jede Columne für ſich mit Beobachtung deſſen, daß man in jeder Columne, wo es *noch angehet*, die Summe auf den nächſtgröſſern Nahmen bringt. Was unter dieſem gröſſern Nahmen herauskommt, rechnet man zur folgenden Columne mit dem gröſſern Nahmen, und behält in jener Columne nur den Reſt mit dem kleinern Nahmen.

48 thlr.	21 gr.	9 Pf.
29 —	14 —	5 —
7 —	19 —	7 —
	24) 55 / 48 | 2 thlr.	12) 21 | 1 gr.
86 thlr.	7 gr.	9 Pf.

103. Wenn man eine genannte unter mehrern Nahmen vorkommende Zahl mit einer ganzen Zahl multipliciren ſoll; ſo verhält man ſich eben ſo, weil die Multiplication im Grunde nichts anders als eine verkürzte Addition iſt.

7 Pfund	6 Unzen	5 Drachma
		× 9 —
	16) 59 / 48 | 3 Pf.	8) 45 / 40 | 5 Unz.
66 Pfund	11 Unzen	5 Dr.

104. Beym ſubtrahiren einer genannten Zahl von einer andern unter mehrern Nahmen kommt alles darauf an, daß man die Regel des Borgens richtig anwende. Wenn Eins aus der nächſthöhern Columne geborgt wird, ſo zeigt die Reductionszahl, wievielmahl man ſtatt deſſen zur nächſtniedrigern zurechnen müſſe.

	15 Stund.	37 Minut.	8 Secund.
ſubtr.	11 St.	59 Min.	14 Sec.
Reſt	3 Stund.	37 Minut.	54 Sec.

105. Eine unter mehrern Nahmen ausgedrückte genannte Zahl dividirt man mit einer ganzen Zahl am beſten auf folgende Art. Man fängt mit der höchſten Columne an, was in jeder Columne übrig bleibt, bringt man auf den nächſtkleinern Nahmen, und rechnet es alsdenn mit zur nächſtkleinern Columne.

div. 5)	29 thlr.	17 gr.	11 Pf.	
	25	96	36	
	4 thlr.	5) 113	5) 47	5 thl. 22 gr. 9⅖ Pf.
	24	10	45	
	96 gr.	3 gr.	2	
		12		
		36 Pf.		

106. Die Regel, nach welcher man die Aufgabe im 98. §. auflöſen muß, wenn zu dreyen Zahlen eine vierte geometriſche Proportionalzahl geſucht wird, heißt in der ausübenden Rechenkunſt die Regel Detri. Man macht davon Anwendungen bey der Kauf- und Waarenrechnung, der Zinſenrechnung, der Geſellſchafts- Vermiſchungs- und Alligationsrechnung, und in ſehr vielen andern Fällen mehr. Um in allen ſolchen Fällen vortheilhaft zu rechnen, muß man ſich nur daran erinnern, daß man das erſte

ſte und zweyte, oder auch das erſte und dritte Glied, wenn beyde ein gemeines Maaß haben, vor Anwendung der Hauptregel damit dividiren könne, um kleinere Zahlen zu erhalten. Auch iſt es ein Vortheil, wenn Brüche vorkommen, daß man ſie vor Anwendung der Regel des 98. §. wegſchaffe. Wenn nemlich im erſten Gliede ein Bruch iſt, ſo multiplicirt man das erſte und zweyte, oder auch das erſte und dritte Glied mit dem Nenner dieſes Bruchs. Enthält das zweyte Glied einen Bruch, ſo multiplicirt man dieſes und das erſte Glied mit dem Nenner deſſelben. Auch aus dem dritten Gliede ſchaft man einen etwa daſelbſt befindlichen Bruch weg, wenn man dieſes und das erſte Glied mit dem Nenner deſſelben multiplicirt.

107. Gewöhnlich iſt bey den hieher gehörigen Aufgaben eine Zahl mit einer Frage verbunden, und ſie heißt um deßwillen die Fragzahl. Auſſerdem muß noch eine Zahl da ſeyn, die mit der Fragzahl von einerley Art iſt, und eine dritte, die mit der geſuchten Zahl von einerley Art iſt, wie in dem Exempel: 5 Pfund koſten 13 Thaler, wieviel alſo 14 Pfund? Nach gemeiner Art ſetzt man die Zahlen in eben dieſer Ordnung ſo an:

5 Pfund — 13 Thaler — 14 Pfund?

nach der Theorie müſte der Anſatz eigentlich ſo ſtehen:

5 Pf. : 14 Pf. = 13 Thal. : geſ. Zahl.

Weil aber während der Rechnung die Zahlen als ungenannte Zahlen behandelt werden, und bey Anwendung der Regel des 98. §. auf den einen oder den andern Anſatz allemahl einerley gefunden wird; ſo kann man auch bey der gemeinen Art des Anſatzes bleiben.

108. Alle Reductionen der mancherley Maaſſe und Gewichte auf andres Maaß und Gewicht gehören hieher, und ſie ſind dem Mathematiker vorzüglich intereſſant. Man hat dabey Vergleichungstafeln nöthig, weil man ſonſt die Reductionszahl nicht wiſſen kann, und ich habe in den Anfangsgründen der Mathematiſchen Wiſſenſchaften im I. Bande im XV. Abſchnitt der Rechenk. von dem allen vollſtändige Nachrichten mitgetheilt. Die Reductionszahl muß angeben, wieviel Stücke unter dem einen Nahmen Eins unter dem andern Nahmen ausmachen. Wenn dieſe ein Bruch iſt, ſo leitet man leicht einen

Ausdruck daraus her, der es angiebt, wieviele Stücke man unter jedem Nahmen nehmen muß, um am Werth gleichviel zu erhalten. Weiß man, es ſey 1 Hamb. Elle = $\frac{5}{6}$ Brab. Ellen, ſo weiß man auch, es ſey 6 Hamb. Ellen = 5 Brab. Ellen, und letzteres iſt der Reductionsſatz. Frägt man nun 37 Brab. Ell. wieviel ſinds Hamb. Ellen? ſo iſt der Anſatz:

5 Brab. — 6 Hamb. Ell. — 37 Br. Ell.?

109. Aus der Natur der Rechnungsfrage ſelbſt muß es überdem beurtheilet werden, ob die geſuchte Zahl gröſſer herauskommen müſſe, wenn die Fragzahl gröſſer angenommen wird, oder ob im Gegentheil die geſuchte Zahl kleiner herauskommen müſſe, wenn die Fragzahl gröſſer angenommen wird. Mehr Waare koſtet mehr Geld, und weniger Waare weniger Geld. Wenn aber einerley Arbeit in kürzerer Zeit zu Stande kommen ſoll, ſo muß man mehr Leute haben; und wenn man längere Zeit darauf wenden kann, ſo braucht man weniger Leute. In Fällen dieſer Art muß man die drey gegebenen Zahlen in umgekehrter Ordnung anſetzen, die Fragzahl voran, und was mit ihr von einerley Art iſt, in die dritte Stelle, wenn man die Regel des 98. §., ſo wie ſie da lautet, anwenden will. Geſetzt, zu einem Zimmer werden 160 Ellen Tapete *à* $\frac{5}{4}$ Ellen Breite erfodert: wieviel Ellen hätte man nöthig von $\frac{3}{4}$ Ellen Breite? Der Anſatz wäre

$\frac{3}{4}$ Ell. Br.? 160 Ell. Länge — $\frac{5}{4}$ Ell. Br.

110. Bey Handlungsgeſellſchaften gewinnet oder verlieret derjenige doppelt ſoviel, der doppelt ſoviel Capital eingelegt hat, alſo wird der Gewinſt oder Verluſt leicht nach der Regel Detri berechnet, wie das nachſtehende Exempel zeiget.

	Zuſchuß	12
des 1ſten	96øø thlr.	8
des 2ten	60øø	5
des 3ten	48øø	4
des 4ten	36øø	3
	Summe	20

Der Gewinſt iſt 5000 thlr.

Alſo legt zu 20 Thaler der erſte 8, der zweyte 5, der dritte 4, der vierte 3 Thaler.

und

und man findet nach der Regel Detri den

Gewinſt des 1ſten	2000	thlr.
des 2ten	1250	—
des 3ten	1000	—
des 4ten	750	—
Summe	5000	thlr.

111. Bey Vermiſchung ſolcher Sachen, die verſchiedene Werthe haben, läßt ſich eine Sache von mittlern Werth zuwege bringen, wie wenn man Weine von verſchiedener Güte, Silber von verſchiedener Feine mit einander vermiſcht. Wenn der Mittelpreiß beſtimmt iſt, ſo kann man finden, wieviel dem Maaß oder Gewicht nach von jeder Art in die Miſchung kommen müſſe. Geſetzt, man ſoll 10 löthiges mit 15 löthigem Silber zuſammen ſchmelzen, um 13 löthiges zu erhalten: ſo würde man auf jede Mark 10 löthig Silber, die man in den Tiegel ſetzte, 3 Loth fein Silber zu wenig haben: auf jede Mark 15 löthiges aber hätte man 2 Loth fein Silber zuviel. Was dem 10 löthigen fehlt, muß das 15 löthige erſetzen, ſo, daß auf jede Mark 13 Loth fein kommen: was alſo durch Zuſetzung des 15 löthigen zuviel genommen wird, muß grade ſoviel betragen, als was durch Zuſetzung des 10 löthigen zu wenig genommen wird.

Man ſetze, es wären m Mk. 15 löthig und n Mk. 10 löthiges Silber genommen worden; ſo wird erfodert, daß m mahl 2 Loth $=$ n mahl 3 Loth ſey, alſo $m : n = 3 : 2$. (95. §.) Alſo läßt ſich das Exempel ſo anſetzen:

	vorräthig	auf
	15 löthig	3 Mk. 15 löthig
man verlangt 13 löthig)		kommen
	10 löthig	2 Mk. 10 löthig.

Probe

3 Mk. 15 löthig	thun	45 Mk. fein
2 Mk. 10 löthig	—	20 Mk. fein
5 Mk. des mixti	—	65 Mk. fein
alſo 1 Mk. des mixti	—	$\frac{65}{5} = 13$ Mk. fein.

Dieſe Rechnungsregel heißt eigentlich die Alligationsregel.

112. Exempel, die mehr als eine Fragzahl enthalten, gehören zur zuſammengeſetzten Regel Detri. Anſtatt daß man eigentlich die Regel Detri mehr als einmahl, ſovielmahl nemlich als Fragzahlen da ſind, anbringen müſte, ziehet man ſie in einen verkürzten Anſatz zuſammen. Sind zwey Fragzahlen in der Aufgabe vorhanden, ſo müſſen zwey andre Zahlen, die damit von einerley Art ſind, in der Aufgabe vorkommen, und überdem eine fünfte Zahl, die mit der geſuchten Zahl von einerley Art iſt. Daher iſt der Nahme Regel quinque entſtanden, wohin die folgende Aufgabe gehört:

100 thlr.	geben	wieviel 51 thlr.?
in 12 Monath	6 thlr. Zinſe	in 7 Monath?

Die Producte der beyden Zahlen in der erſten und dritten Columne machen mit der Zahl in der mittlern Stelle drey Zahlen aus, womit man nach der Regel des 98. §. umgehen kann, um das Facit zu finden.

113. Es giebt noch eine Art hieher gehöriger Rechnungsfragen, die zwar nur eine Fragzahl enthalten, aber mehrere Verhältniſſe, die gleichſam kettenweiſe unter einander verbunden ſind. Es liegen ebenfalls mehrere Proportionen in einer ſolchen Aufgabe zum Grunde, welche ſich unter dem Nahmen der Regel multiplex oder Kettenregel in einen einzigen Anſatz vortheilhaft zuſammen ziehen laſſen. Eine Probe davon giebt folgende Rechnungsfrage, die hier ſogleich im Anſatz hergeſetzt iſt:

Wieviel thlr.?	koſten	17 Brab. Ellen
wenn 5 Brab. Ellen	gleich ſind	6 Danz. Ellen
und 7 Danz. Ellen	koſten	8 fl.
und 3 fl.	gleich ſind	2 thlr.

Auſſer einigen dabey in acht zu nehmenden Rechnungsvortheilen, die darauf ankommen, daß man Zahlen, die in der erſten und zweyten Columne ein gemeines Maaß haben, gegen einander verkleinert, auch wohl nach der aus dem 106. §. ſchon bekannten Regel die etwa vorkommenden Brüche wegſchaft, kommt das übrige darauf an. Man multiplicire in jeder Columne alle darin befindliche Zahlen ineinander, und dividire hiernächſt das Product aller Zahlen in der Columne zur Rechten mit dem Product aller Zahlen in der zur Linken geſchriebenen Columne, ſo hat man

man das geſuchte Facit. Vollſtändigere Ausführungen von dieſem allen findet man im 1ſten Bande meiner Anfangsgründe der Mathematiſchen Wiſſenſchaften im XVI. Abſchnitt der Rechenkunſt, und im 2ten Theile meines Lehrbegriffes der geſammten Mathematik, im XII. Abſchnitt der Rechenkunſt, woſelbſt auch in den folgenden Abſchnitten noch mehr Anwendungen davon gemacht werden.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie.

Die 1. Erklärung.

1 Ein Raum, der nach allen Seiten ausgedehnt, doch aber in gewiſſen Gränzen eingeſchloſſen iſt, heißt ein geometriſcher Körper: was ihn aber von allen Seiten, als die äuſſerſte Gränze umgiebt, nennt man ſeine Oberfläche.

Die 2. Erklärung.

2. Eine Ausdehnung in die Länge heißt eine Linie, und was an jeder Seite die Linie als das äuſſerſte Ende begränzt, heißt hier ein Punct.

Anmerkung.

Ein Strich mit Dinte oder ſonſt etwas dergleichen auf dem Papier gemacht, bildet eine Linie ab, ein Tüpfelchen bildet einen Punct ab: weil man nur die Länge des Strichs in Betrachtung zieht, auch das Tüpfelchen ſo betrachtet, als wenn es gar nicht ausgedehnt wäre. Der Punct iſt nur die Stelle, wo eine Linie anfängt oder aufhört.

Die 3. Erklärung.

3. Eine grade Linie iſt, deren Theile ſich alle nach einerley Richtung erſtrecken: eine krumme Linie aber iſt eine ſolche, die gar keine gradlinichte Theile hat.

Der 1. Foderungsſatz.

4. Man kann von jedem Punct bis zu einem andern gegebenen Punct in Gedanken eine grade Linie ziehen, und ſelbige nach jeder Seite, ſoweit es jedesmahl nöthig iſt, über ihren Endpunct hinaus, oder auch rückwärts über ihren Anfangspunct hinaus verlängern.

Die 4. Erklärung.

5. Eine Fläche iſt eben, wenn jede grade Linie, die man zwiſchen zweenen in dieſer Fläche liegenden Puncten ziehen kann, ganz in dieſer Fläche liegt: eine krumme Fläche iſt, die gar keine ebene Theile hat.

Zuſatz.

6. Auf dieſer Eigenſchaft einer Ebene beruhet die Art, wie man auf einem ebenen Tiſche oder Reißbrette vermittelſt des Lineals grade Striche als Bilder grader Linien ziehen kann.

Der 1. Grundſatz.

1 Fig. 7. Wenn durch zwey Puncte C und D eine grade Linie AB gezogen iſt; ſo kann man durch dieſelben Puncte nicht noch eine andre grade Linie ziehen, die von der vorigen der Lage nach verſchieden wäre.

Zuſatz.

2 Fig. 8. Dieſerwegen können zwo grade Linien AB und CD einander nur in einem Punct E, nicht in mehrern ſchneiden.

Die

Die 5. Erklärung.

9. Zwo grade Linien AB, AC, die von einerley Anfangspunct A nach verſchiedenen Richtungen lauſen, ſchlieſſen einen gradlinichten **Winkel** ein. Die graden Linien ſelbſt nennt man die Seiten, oder die Schenkel des Winkels, ihren gemeinſchaftlichen Anfangspunct aber des **Winkels Spitze**. Wenn in der Figur an des Winkels Spitze ein Buchſtab, und an jedem Schenkel ebenfalls ein Buchſtab zur Bezeichnung geſetzt iſt; ſo nennt man, wenn von dem Winkel die Rede iſt, die drey Buchſtaben in der Ordnung, daß der, welcher die Spitze bezeichnet, in der Mitte ſtehe. 3 Fig.

Die 6. Erklärung.

10. Wenn ein Schenkel AB des Winkels BAC über die Spitze A hinaus nach D verlängert wird, ſo heißt CAD des Winkels BAC Nebenwinkel. Ein **Winkel**, der eben ſo groß iſt, als ſein Nebenwinkel, heißt ein **rechter Winkel**, und eine grade Linie AC ſteht auf der andern BD **ſenkrecht**, wenn ſie mit ihr gleichgroſſe Nebenwinkel macht. Winkel, die keine rechte Winkel ſind, heiſſen ſchiefe Winkel, und eine grade Linie ſteht ſchief auf der andern, wenn ſie mit ihr ungleiche Nebenwinkel macht. 4 Fig.

Die 7. Erklärung.

11. Ausgedehnte Gröſſen paſſen auf- oder ineinander, wenn man ſie ſo aneinander legen, oder in einander hineinſchieben kann, (wie etwa ein Buch ins Futteral) daß die Gränzen der einen mit den Gränzen der andern zuſammen fallen.

Der 2. Grundſatz.

12. Ausgedehnte Gröſſen, die auf und in einander paſſen, ſind gleich groß.

Der 3. Grundſatz.

13. Wenn grade Linien und gradlinichte Winkel nicht auf einander paſſen, ſo ſind ſie ungleich groß: gleich groſſe grade Linien, und gleichgroſſe Winkel paſſen alſo aufeinander.

Der 1. Lehrſatz.

14. Alle rechte Winkel ſind gleich groß.

5 Fig. Beweis. Wenn BAC ein rechter Winkel iſt, ſo hat man BAC = CAD. (10. §.) Durch A ſey noch eine grade Linie AE gezogen, und BAE ebenfalls ein rechter Winkel; ſo muß AE mit AC zuſammen fallen, und BAE = BAC ſeyn. Denn widrigenfalls wäre doch BAE = EAD, (10. §.) und überdem iſt BAE > BAC; mithin wäre EAD > CAD gegen dem 4. §. der Rechenk.

Der 1. Zuſatz.

15. Durch einerley Punct A kann man nicht zwey verſchiedene grade Linien AC, AE, auf einerley dritte BD ſenkrecht ſetzen.

Der 2. Zuſatz.

16. Man kann den rechten Winkel als das Maaß brauchen, um alle andre Winkel damit zu vergleichen, und man hat einen beſtimmten Begriff davon, wie groß ein Winkel ſey, wenn man weiß, er macht $\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{4}$ vom rechten Winkel aus, u. ſ. f. Um das deſto kürzer auszudrücken, kann der Buchſtab R ein für allemahl den rechten Winkel bezeichnen.

Der 2. Lehrſatz.

17. Die Summe zweyer Nebenwinkel *BAE* + *EAD* auf einer graden Linie *BD* macht zwey rechte Winkel aus.

4 Fig. Beweis. Durch A kann auch AC auf BD ſenkrecht gezogen werden: alsdenn iſt BAC + CAD = 2R,

2R, alſo auch BAE + EAC + CAD, oder BAE + EAD = 2R.

Zuſatz.

18. Wenn zwey Winkel BAE und EAD, die eine gemeinſchaftliche Spitze A und einen gemeinſchaftlichen Schenkel AE haben, zwey rechte Winkel ausmachen, ſo liegen die äuſſern Schenkel AB und AD in grader Linie. Widrigenfalls müſte man BA ſo nach F verlängern können, daß AF nicht mit AD zuſammen fiele. Alsdenn wäre BAE + EAF = 2R, (17. §.) und BAE + EAD = 2R: mithin BAE + EAF = BAE + EAD, (5. §. R.) alſo auch EAF = EAD, (12. §. R.) gegen den 4. §. der Rechenk.

Die 8. Erklärung.

19. Jeder ſchiefe Winkel iſt entweder kleiner oder gröſſer, als ein rechter Winkel: im erſten Fall heißt er ein ſpitzer, und im zweyten Fall ein ſtumpfer Winkel. Ein Winkel wie EAC, der mit einem ſpitzen Winkel BAE zuſammen genommen einen rechten Winkel ausmacht, heißt des ſpitzen Winkels Ergänzung zum rechten Winkel: auch iſt von zweenen Nebenwinkeln BAE und EAD allemahl der eine des andern Ergänzung zu zweenen rechten Winkeln. 4 Fig.

Der 3. Lehrſatz.

20. Wenn zwey grade Linien *AB* und *CD* einander in dem Punct *E* ſchneiden; ſo ſind die entgegen geſetzten Scheitelwinkel *AEC* und *BED* gleich groß. 2 Fig.

Beweis. Weil AEC + CEB = 2R, und eben ſo CEB + BED = 2R, (17. §.) ſo iſt AEC + CEB = CEB + BED, (5. §. R.) alſo auch AEC = BED. (12. §. R.)

Die 9. Erklärung.

21. Eine ebene von allen Seiten durch Linien begränzte Fläche heißt eine ebene **Figur**, oder auch hier ſchlechthin eine **Figur**. Die Seitenlinien der Figur können grade oder krumme Linien, oder beydes durch einander ſeyn: daher giebt es **gradlinichte, krummlinichte**, und **vermiſchtlinichte** Figuren.

Die 10. Erklärung.

22. Man giebt den Figuren Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenlinien, oder auch ihrer Winkel, weil jede Figur, wofern ſie nicht etwa von einer einzigen krummen Linie umſchloſſen iſt, ſoviele Winkel als Seitenlinien hat. Gradlinichte **Dreyecke** und **Vierecke** nennt man hier Kürze halber ſchlechthin Dreyecke, oder Vierecke: die übrigen Figuren heiſſen überhaupt **Vielecke**, oder **Polygone**. Ein Dreyeck insbeſondre heißt **gleichſchenklicht**, wenn es zwey gleich groſſe Seiten hat, und **gleichſeitig**, wenn alle drey Seiten gleich groß ſind.

Zuſatz.

23. Eine grade Linie, die durch einen Punct innerhalb der Fläche einer Figur läuft, ſchneidet, wenn ſie gehörig verlängert wird, den Umfang der Figur wenigſtens in zweenen Puncten. Wenn alſo eine ſolche grade Linie innerhalb der Fläche eines Dreyecks durch die Spitze eines Winkels läuft, ſo ſchneidet ſie verlängert auch die gegenüberſtehende Seite. (8. §.)

Der 4. Grundſatz.

24. **Die grade Linie zwiſchen zweenen Puncten iſt kürzer als jede andre, die man zwiſchen eben den Puncten ziehen kann.** Sind zwiſchen eben den Endpuncten mehr andre krumme

oder gebrochene Linien gezogen, die insgeſammt gegen die grade Linie zu hohl ſind; ſo ſind ſie deſto gröſſer, je weiter ſie ſich von der graden Linie ablenken.

Zuſatz.

25. Demnach ſind jede zwo Seitenlinien AC + BC im gradlinichten Dreyeck ABC zuſammen genommen gröſſer, als die dritte Seitenlinie AB. Wenn ferner die Spitze F eines Dreyecks AFB innerhalb der Fläche eines andern ACB liegt, das über derſelben Grundlinie AB ſteht, ſo iſt AC + BC > AF + BF. 15 F.

Die 11. Erklärung.

26. Die Entfernung eines Orts vom andern iſt der kürzeſte Weg, den man nehmen kann, um von dem einen Ort bis zum andern zu kommen.

Zuſatz.

27. Die Entfernung eines Puncts vom andern iſt *alſo* die grade Linie zwiſchen beyden Puncten. (24. §.)

Die 12. Erklärung.

28. Die Kreislinie ADBE iſt eine krumme um einen gewiſſen Punct C in einer Ebene ſo beſchriebene Linie, daß alle in ihr befindliche Puncte von jenem Punct C, der ihr Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt ſind. Die von der Kreislinie umſchloſſene Figur heißt die Kreisfläche, auch wohl ſchlechthin der Kreis, und die Kreislinie nennt man alsdenn die Peripherie des Kreiſes. Jedes Stück dieſer Peripherie, wie AFD, nennt man einen Kreisbogen, und die grade Linie AD zwiſchen den Endpuncten des Bogens die dazu gehörige Sehne. 6 Fig.

Die 13. Erklärung.

29. Halbmeſſer des Kreiſes heiſſen die graden Linien CA, CB, welche vom Mittelpunct C bis an 6. 7 Fig.

den

den Umfang laufen, und jede Sehne des Kreiſes, wie AB in der 6 Figur, die durch den Mittelpunct läuft, heißt des Kreiſes Durchmeſſer.

Der 1. Zuſatz.

30. Der Durchmeſſer kann die Peripherie des Kreiſes nur in zweenen Puncten und zwar ſo ſchneiden, daß der Mittelpunct zwiſchen jenen beyden Puncten liegt.

Der 2. Zuſatz.

31. Alle Halbmeſſer des Kreiſes ſind gleich groß, (28. §.) mithin auch alle Durchmeſſer: denn jeder Durchmeſſer iſt doppelt ſo groß, als des Kreiſes Halbmeſſer.

Die 14. Erklärung.

7 Fig. 32. Das Stück ACBD der Kreisfläche zwiſchen dem Bogen ADB und den Halbmeſſern CA, CB, welche in die Endpuncte des Bogens laufen, nennt man einen Ausſchnitt, das Stück EFG aber zwiſchen der Sehne EF und ihrem Bogen EGF einen Abſchnitt des Kreiſes.

Zuſatz.

6 Fig. 33. Der Durchmeſſer AB theilt den Kreis in zwey gleich groſſe Abſchnitte, und die Peripherie in gleiche Bogen ADB, AEB, welche Halbkreiſe heiſſen.

Der 2. Foderungsſatz.

34. Wenn auf einer Ebene ein Punct, und die Gröſſe des Halbmeſſers gegeben iſt; ſo kann man die Kreislinie in der Ebene verzeichnen.

Zuſatz.

6 Fig. 35. Wenn alſo in einer graden Linie AB ein Punct C gegeben iſt, ſo kann man auf derſelben vermittelſt des Kreiſes ein Stück CB oder CA abſchneiden, das ſo groß iſt, als eine andre gegebene grade Linie.

Anmer-

Anmerkung.

36. Bey Zeichnungen auf dem Papier dient das unter dem Nahmen des Cirkels bekannte Inſtrument zur Verzeichnung der Kreislinie.

Der 5. Grundſatz.

37. Kreislinien und Kreisflächen ſind gleich groß, wenn ihre Halbmeſſer gleich groß ſind: denn ſie paſſen auf einander, wenn die Mittelpuncte auf einander liegen. (12. §.)

Der 1. Zuſatz.

38. Nicht allein Kreisausſchnitte ACEG, ACBD, 6 u. 7 Fig.
die zu Kreiſen von gleichen Halbmeſſern gehören, und gleiche Winkel am Mittelpunct haben, ſondern auch ihre Bogen AGE, ADB, ſind gleich groß.

Der 2. Zuſatz.

39. Wenn die Winkel am Mittelpunct in Ausſchnitten gleicher Kreiſe ungleich ſind, ſo ſind auch die Ausſchnitte und ihre Bogen ungleich groß.

Der 3. Zuſatz.

40. Zu gleich groſſen Bogen ſolcher Kreiſe, die gleiche Halbmeſſer haben, und zu gleich groſſen Sectoren eben ſolcher Kreiſe, gehören demnach gleiche Winkel am Mittelpunct.

Der 4. Zuſatz.

41. Zwey Durchmeſſer AB, DE, die auf einan- 8 Fig.
der ſenkrecht ſtehen, theilen die Kreisfläche in vier gleiche Sectoren, und die Peripherie in vier gleiche Bogen, welche Quadranten heiſſen.

Der 5. Zuſatz.

42. Aus der Spitze C eines jeden Winkels ACB 9 Fig.
kann man mit jedem willkührlich gewählten Halbmeſſer zwiſchen ſeinen Schenkeln einen Bogen DFE beſchreiben. Das wird ein Quadrant, wenn der Winkel ein rechter Winkel iſt: eben der Bogen iſt

gröſſer oder kleiner als ein Quadrant, wenn der Winkel gröſſer oder kleiner iſt, als ein rechter Winkel.

Der 6. Zuſatz.

9 Fig. 43. Kann man den Winkel ACB vermittelſt der Theilungslinien CF, CG, in gleich groſſe Theile eintheilen, ſo theilen ſie zugleich den Bogen bey F, G, in eben ſoviele gleiche Theile. Umgekehrt, wenn der Bogen DE bey F, G, in gleiche Theile getheilt wäre, ſo würden die graden Linien CF, CG, den Winkel ACB in eben ſoviele gleiche Theile eintheilen.

Die 15. Erklärung.

44. Der 90ſte Theil des Quadranten, mithin der 360ſte Theil der Peripherie eines Kreiſes, heißt ein **Grad von der Peripherie**, und der 90ſte Theil vom rechten Winkel wird ebenfalls ein **Grad des rechten Winkels** genannt.

Zuſatz.

45. Ein rechter Winkel faſſet alſo 90 Grade, und jeder andre Winkel faſſet eben ſoviele Grade des rechten Winkels, als der Bogen zwiſchen ſeinen Schenkeln Grade des Quadranten, oder der Peripherie, enthält.

Die 16. Erklärung.

46. Die Gröſſe einer Sache ausmeſſen, heißt unterſuchen, wievielmahl eine andre bekannte Gröſſe von eben der Art, welche man das **Maaß** nennt, in der auszumeſſenden Gröſſe enthalten ſey. Oft läßt ſich das nicht durch eine ganze Zahl angeben: alsdenn theilt man das Maaß ſelbſt in gleiche Theile, und ſucht wievielmahl ein ſolcher Theil in der zu meſſenden Gröſſe enthalten ſey. Ihre Gröſſe läßt ſich alsdenn wenigſtens durch einen Bruch ausdrücken.

Der

Der 1. Zuſatz.

47. Wenn man weiß, daß ein Winkel eine gewiſſe Anzahl von Graden faſſe, ſo kennt man ſeine Gröſſe, und der rechte Winkel iſt eigentlich das Maaß, womit man die Gröſſe eines jeden andern Winkels vergleicht. Weiß man, ein Winkel faſſe 53 Grade, ſo heißt das, der Winkel betrage $\frac{53}{90}$ vom rechten Winkel. Um einen Winkel in dieſem Sinne zu meſſen, dient ein Halbcirkel, der ein für allemahl ſchon in 180 Grade getheilt iſt, unter dem Nahmen des Transporteurs.

Der 2. Zuſatz.

48. Bey recht genauen Meſſungen wird ein Grad ſowohl des Quadranten, als auch des rechten Winkels von neuen in 60 gleiche Theile getheilt, die Minuten heiſſen, eine Minute wieder in 60 Secunden, die Secunde in 60 Tertien, u. ſ. f. fort. Die Zeichen °, ′, ″, ‴, bedeuten Grade, Minuten, Secunden, Tertien, wenn man ſie auf dieſe Art ſchreibt 53° 28′ 16″ 43‴.

Der 3. Zuſatz.

49. Für grade Linien bedient man ſich im Groſſen des Ruthen- Fuß- und Zollmaaſſes. Ein Fuß wird in 12 Zoll, ein Zoll in 12 Linien, eine Linie in 12 Scrupel getheilt, nnd 12 Fuß machen eine Ruthe. Weil es ſehr bequem iſt, mit Decimalbrüchen zu rechnen, ſo hat man auch wohl den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel getheilt. Ein ſo eingetheiltes Maaß nennt man alsdenn Decimalmaaß, um es von jenem Duodecimalmaaſſe zu unterſcheiden.

Der 4. Zuſatz.

50. Weil jedes Maaß an ſich willkührlich iſt, wenn es nur mit der auszumeſſenden Gröſſe von einerley

nerley Art iſt; ſo kann man bey kleinen Figuren auf dem Papier auch eine kleine grade Linie für das Maaß der auszumeſſenden Linien wählen. Dabey iſt es gleichviel, was das Maaß für einen Nahmen haben ſoll. Der Bequemlichkeit halber giebt man einer kleinen ſo gewählten Linie den Nahmen eines im groſſen üblichen Maaſſes, und theilt ſie eben ſo ein, wie es im groſſen gewöhnlich iſt. Einer jeden ſolchen Zeichnung muß alsdenn der ſo verkleinerte oder verjüngte Maaßſtab beygefüget ſeyn.

Anmerkung.

Bey Ausmeſſung der graden Linien, der Winkel, und andrer geometriſcher Gröſſen, wenn man ſie durch Zahlen ausdrückt, wendet man ſchon die Rechenkunſt auf die Geometrie an. Euclides und andre griechiſche Geometer haben die Lehren der Geometrie aus Gründen hergeleitet, die der Wiſſenſchaft eigenthümlich ſind, und wenn die Geometrie wirklich eine Uebung des Verſtandes ſeyn ſoll; ſo muß man auch ſelbſt beym Vortrage der erſten Anfangsgründe ſich jenen Muſtern möglichſt zu nähern ſuchen. Indeſſen dient es doch auch dem angehenden Geometer zu einiger Erleichterung, wenn er bald einſehen lernt, wie bey Anwendung der Rechenkunſt auf die Geometrie alles der Ausübung ſchon etwas näher gebracht werden kann.

Die 17. Erklärung.

3 Fig. 51. Was eine grade Linie AC in einer Ebene für eine Lage habe, läßt ſich gar nicht angeben, wenn man nicht vorausſetzen kann, daß die Lage einer andern graden Linie AB in derſelben Ebene bekannt ſey. In dieſem Fall wird die Lage der Linie AC gegen AB durch die Gröſſe des Winkels BAC beſtimmt.

Die 18. Erklärung.

10 F. 52. Zwo grade Linien AB, CD, haben in einerley Ebene einerley Lage, wenn ſie jede dritte grade Linie EF in derſelben Ebene unter gleichen Winkeln EHD, EGB ſchneiden.

Zuſatz.

Zuſatz.

53. Zwo grade Linien, die einander ſchneiden, haben gewiß nicht einerley Lage: weil grade Linien, die durch einerley Punct in einerley Lage laufen, nicht verſchieden ſeyn können. Grade Linien alſo, die in einerley Ebene einerley Lage haben, können einander nicht ſchneiden.

Der 4. Lehrſatz.

54. Wenn im Dreyeck *ABC* eine Seite *BC* nach *D* verlängert wird; ſo iſt der äuſſere Winkel *ACD* ſo groß, als die Summe der beyden Winkel *ABC* und *BAC*, die ihm im Dreyeck gegenüber ſtehen. 11 F.

Beweis. Es muß möglich ſeyn, durch C eine grade Linie EF zu ziehen, die mit AB einerley Lage hat. Dieſe muß zwiſchen CA und CD ihre Lage erhalten, weil ſie ſonſt mit AB zuſammen liefe, wenn ſie in CA oder zwiſchen CA und CB fiele, (23. §.) alsdenn aber mit AB nicht einerley Lage hätte. (53. §.) Wenn ferner auch AC nach G verlängert wird, ſo iſt ECG = BAC, (53. §.) alſo auch ACF = BAC. (21. §.) Ferner iſt FCD = ABC, (53. §.) alſo ACF + FCD, oder ACD = BAC + ABC. (12. §. R.)

Der 5. Lehrſatz.

55. In jedem gradlinichten Dreyeck iſt die Summe aller dreyer Winkel der Summe zweener rechten Winkel gleich. 11 F.

Beweis. Man verlängere die Seite BC nach D, ſo iſt ACD + ACB = 2R, (18. §.) und ACD = ABC + BAC: (54. §.) alſo ABC + BAC + ACB = 2R.

Der 1. Zuſatz.

56. Wenn die Gröſſe eines Winkels in Graden und Theilen von Graden gegeben iſt, ſo findet man

die Summe der beyden übrigen Winkel in Graden ausgedrückt, wenn man die Zahl der Grade jenes Winkels von 180° ſubtrahirt. Iſt die Gröſſe zweyer Winkel in Graden gegeben, ſo hat man die Gröſſe des dritten Winkels, wenn man die Zahl der Grade jener beyden Winkel in Graden zuſammen addirt, und die Summe von 180° ſubtrahirt.

Der 2. Zuſatz.

57. Im Dreyeck kann nur ein Winkel ein rechter Winkel, auch nur ein Winkel ein ſtumpfer Winkel ſeyn: die beyden andern ſind alsdenn ſpitze Winkel.

Der 3. Zuſatz.

58. Aus einerley Punct kann man nicht zwo verſchiedene grade Linien auf einerley dritte ſenkrecht herab laſſen.

Die 19. Erklärung.

59. Ein Dreyeck heißt rechtwinklicht, ſtumpfwinklicht oder ſpitzwinklicht, nachdem es einen rechten, oder einen ſtumpfen Winkel hat, oder auch alle drey Winkel ſpitze Winkel ſind. Die Seiten, welche im rechtwinklichten Dreyeck den rechten Winkel einſchlieſſen, heiſſen die Perpendiculärſeiten, oder Catheti: die dem rechten Winkel entgegen geſetzte Seite wird die Hypothenuſe genannt.

Der 6. Lehrſatz.

12 F. 60. **Wenn Dreyecke *ABC*, *DEF*, bey *B* und *E* einen gleichen Winkel haben, und überdem die anliegenden Seiten gleich ſind, $BA = ED$, $BC = EF$, ſo ſind die Dreyecke ſelbſt, und die übrigen Winkel, die den gleichen Seiten entgegen ſtehen, nebſt der dritten Seite gleich groß.**

Beweis. Die Dreyecke ſo auf einander gelegt, daß E auf B liegt, und EF an BC anſchließt, paſſen auf einander. (13. 7. §.)

Der

Der 1. Zuſatz.

61. Eine grade Linie AD, welche den Winkel BAC an der Spitze eines gleichſchenklichten Dreyecks ABC halbirt, theilt zugleich die Grundlinie mit dem ganzen Dreyeck in zwey gleiche Theile, und ſteht auf der Grundlinie ſenkrecht. 13 F.

Der 2. Zuſatz.

62. Demnach ſind beyde Winkel *B* und *C* an der Grundlinie den gleichen Schenkeln *AB*, *AC*, gegenüber gleich groß. Iſt das Dreyeck gleichſeitig, ſo ſind alle drey Winkel gleich groß: jeder beträgt $\frac{2}{3}$R oder 60°.

Der 3. Zuſatz.

63. Wenn ein halber oder ganzer Durchmeſſer HF des Kreiſes den Winkel ACG, oder den Bogen AFG eines Kreisausſchnittes ACGF halbirt, ſo halbirt derſelbe zugleich die Sehne AG, und ſteht auf ihr ſenkrecht. 8 Fig.

Der 4. Zuſatz.

64. Wird einer von den gleichen Schenkeln AB des gleichſchenklichten Dreyecks durch die Spitze A nach E verlängert; ſo iſt der äuſſere Winkel EAC an der Spitze doppelt ſo groß, als jeder von den gleichen Winkeln an der Grundlinie. (54. §.) 13 F.

Der 5. Zuſatz.

65. Eine grade Linie AD, welche von der Spitze A des gleichſchenklichten Dreyecks auf die Grundlinie BC ſenkrecht fällt, halbirt den Winkel an der Spitze, die Grundlinie und das ganze Dreyeck. Denn ſonſt könnte man mit einer andern graden Linie den Winkel an der Spitze halbiren, und dieſe würde auch auf der Grundlinie ſenkrecht ſeyn, (61. §.) gegen den 58. §.

Der 6. Zuſatz.

8 Fig. 66. Ein Durchmeſſer HF, der eine Sehne AG des Kreiſes ſenkrecht ſchneidet, halbirt die Sehne, den dazu gehörigen Bogen AFG, und den Winkel am Mittelpunct ACG.

Der 7. Zuſatz.

13 F. 67. Eine grade Linie AD, welche die Grundlinie BC des gleichſchenklichten Dreyecks halbirt, und durch die Spitze A geht, ſteht zugleich auf der Grundlinie ſenkrecht, und hat die übrigen ſchon erwehnten Eigenſchaften. Denn eine grade Linie aus A auf BC ſenkrecht herab gelaſſen geht durch D, (65. §.) und zwiſchen A und D kann der Lage nach nur einerley grade Linie ſeyn. (8. §.)

Der 8. Zuſatz.

8 Fig. 68. Ein Durchmeſſer HF, welcher die Sehne AG halbirt, iſt darauf zugleich ſenkrecht, und halbirt den Winkel ACG am Mittelpunct nebſt dem Bogen AG.

Der 9. Zuſatz.

13 F. 69. Eine grade Linie aus der Mitte D der Grundlinie BC des gleichſchenklichten Dreyecks ſenkrecht aufgerichtet, läuft durch die Spitze A. Denn im Gegentheil könnte man auch AD ziehen, und auch AD wäre auf BC ſenkrecht, (67. §.) gegen den 15. §.

Der 10. Zuſatz.

8 Fig. 70. Eine grade Linie HF, welche die Sehne AG eines Kreiſes bey I ſenkrecht halbirt, iſt zugleich ein Durchmeſſer des Kreiſes, und hat die übrigen ſchon mehrmahls erwehnten Eigenſchaften.

Der 7. Lehrſatz.

14 F. 71. **Wenn zwo Seiten, *AB*, *AC*, eines Dreyecks ungleich groß ſind, ſo iſt der gröſ-**

ſern

ſern Seite auch ein gröſſerer Winkel als der kleinern Seite entgegen geſezt.

Beweis. Es ſey AC > AB, alſo ein Theil von AC, nemlich AD = AB. Wird alsdenn BD gezogen, ſo iſt der Winkel ABD = ADB (62. §.) und ABC > ABD, alſo auch ABC > ADB. (5. §. R.) Weiter iſt ADB > ACB, (54. §.) alſo auch ABC > ACB. (5. §. R.)

Der 1. Zuſatz.

72. Wenn ein Dreyeck zweene gleich groſſe Winkel hat, ſo hat es auch zwo gleiche gegenüberſtehende Seiten. Denn wenn die Seiten ungleich wären, ſo wären die gegenüberſtehenden Winkel ungleich. Ein Dreyeck alſo, das drey gleich groſſe Winkel hat, iſt gleichſeitig.

Der 2. Zuſatz.

73. Im Dreyeck, das zweene ungleich groſſe Winkel hat, iſt dem gröſſern Winkel die gröſſere Seite, dem kleinern Winkel die kleinere Seite entgegen geſetzt.

Der 3. Zuſatz.

74. Im rechtwinklichten Dreyeck iſt die Hypothenuſe, und im ſtumpfwinklichten die dem ſtumpfen Winkel entgegen ſtehende Seite gröſſer, als jede von den beyden übrigen.

Der 4. Zuſatz.

75. Unter allen graden Linien, die man von einem Punct nach einer andern graden Linie hinziehen kann, iſt die Perpendicullinie die kürzeſte. Sie iſt alſo zugleich die Entfernung des Puncts von der graden Linie. Auch umgekehrt: die kürzeſte unter den graden Linien, die von einem Punct nach einer graden Linie laufen, iſt auf derſelben ſenkrecht.

Der 8. Lehrſatz.

15 F. 76. Wenn über der Grundlinie *AB* des Dreyecks *ABC* ein andres Dreyeck gezeichnet wird, das bey *A* einen kleinern Winkel als das vorige hat, ohne daß man die Länge der an dieſem Winkel anliegenden Seiten ändert; ſo wird die dritte dem Winkel *A* entgegen ſtehende Seite kleiner, als ſie vorher war.

Beweis. Wenn man aus A mit der kleinern Seite AC als Halbmeſſer einen Cirkelbogen CEG verzeichnet; ſo kann die Spitze des neuen Dreyecks nur in dieſem Bogen ihre Stelle haben: alſo 1) entweder im Durchſchnittspunct E dieſes Bogens mit der Seite BC, wenn vielleicht beyde einander ſchneiden, 2) oder auſſerhalb des Dreyecks ABC irgendwo in D, 3) oder innerhalb deſſelben in F.

Im erſten Fall iſt für ſich klar, daß BC > BE ſey. Im zweyten Fall ziehe man CD; ſo iſt vermöge der Vorausſetzung AC = AD, alſo ACD = ADC. Aber BDC > ADC, alſo BDC > ACD. (5. §. R.) Ueberdem auch ACD > BCD, alſo BDC > BCD: mithin im Dreyeck BCD die Seite BC > BD. (73. §.) Im dritten Fall ziehe man CF; ſo iſt AC + BC > AF + BF, (25. §.) und AC = AF, wie vorausgeſetzt wird: alſo BC > BF. (12. §. Rech.)

Der 9. Lehrſatz.

12 F. 77. Wenn alle drey Seiten *AB*, *BC*, *AC* eines Dreyecks *ABC* ſo groß ſind, als die drey Seiten *DE*, *EF*, *DF* eines andern Dreyecks *DEF*; ſo ſind auch in beyden Dreyecken die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegen über ſtehen.

Beweis.

Beweis. Weil AB = DE, und BC = EF angenommen iſt, ſo kann nicht ABC gröſſer oder kleiner als DEF ſeyn, weil ſonſt AC im erſten Fall gröſſer, im letzten Fall kleiner als DF wäre, (76. §.) und das widerſpricht der Vorausſetzung, weil AC = DF ſeyn ſollte. Demnach iſt ABC = DEF, und eben darum ſind auch die übrigen erwehnten Winkel gleich. (60. §.)

Der 1. Zuſatz.

78. Beyde Dreyecke haben demnach eine gleiche Fläche. Wollte man auch über einer und derſelben Grundfläche zwey verſchiedene Dreyecke aus gleichen Seitenlinien in einerley Ordnung verzeichnen; ſo würden doch beyde in Eins zuſammen fallen: es wäre denn, daß man das eine Dreyeck an der einen, und das andre an der andern Seite der Grundlinie verzeichnete.

Der 2. Zuſatz.

79. Ein Kreis CDF kann den andern CDE nur 16 F. in zweenen Puncten C und D, nicht in mehrern ſchneiden: auch liegt von dieſen Durchſchnittspuncten einer an der einen, der andre an der andern Seite der graden Linie AB zwiſchen den Mittelpuncten.

Die 1. Aufgabe.

80. Es ſind drey grade Linien *AB*, *GH*, 16 F. *KL*, gegeben, wovon jede zwo zuſammen genommen gröſſer, als die dritte ſind: man ſoll daraus ein Dreyeck verzeichnen.

Aufl. Man nehme eine davon AB für die Grundlinie, und beſchreibe mit dem Halbmeſſer GH aus dem Mittelpunct A, mit dem Halbmeſſer KL aus dem Mittelpunct B Kreiſe. Wenn dieſe einander

in C und D ſchneiden, ſo kann man AC und BC, oder auch AD und BD ziehen: in beyden Fällen iſt das verlangte Dreyeck verzeichnet.

Der 1. Zuſatz.

81. Ueber einer gegebenen Grundlinie verzeichnet man eben ſo ein gleichſchenklichtes, oder auch ein gleichſeitiges Dreyeck.

Der 2. Zuſatz.

17 F. 82. Aus einem in der graden Linie AB gegebenen Punct C richtet man darüber eine ſenkrechte Linie auf, wenn man CD = CE macht, über DE ein gleichſchenklichtes Dreyeck DEF ſetzt, und aus deſſen Spitze F nach C die grade Linie FC ziehet. (67. §.)

Der 3. Zuſatz.

18 F. 83. Ein gradlinichter Winkel ABC wird mit der graden Linie BF halbirt, wenn man BD = BE nimmt, und auf DE das gleichſchenklichte Dreyeck DEF ſetzt. Denn es iſt nun ABF = CBF. (75. §.)

Der 4. Zuſatz.

19 F. 84. Die grade Linie AB halbirt man mit einer andern CE ſenkrecht, wenn man über AB ein gleichſchenklichtes Dreyeck ACB ſetzt, und den Winkel an der Spitze halbirt. (61. §.)

Der 10. Lehrſatz.

20 F. 85. **Jede grade Linie *AE* aus der Spitze des gleichſchenklichten Dreyecks *ABC* innerhalb der Fläche deſſelben nach einen Punct *E* in der Grundlinie gezogen iſt kleiner, als jeder von den gleichen Schenkeln *AB* oder *AC*: wenn aber aus der Spitze *A* nach einen Punct *F* in der verlängerten Grundlinie die grade Linie *AF* gezogen wird, ſo iſt ſie gröſſer als *AB* oder *AC*.**

Beweis.

Beweis. Wenn AD auf BC ſenkrecht fällt, ſo iſt AD unter allen von A nach BC laufenden graden Linien am kürzeſten. (75. §.) Ferner ſind die Winkel AEC, ACF ſtumpfe Winkel, (54. §.) alſo AE < AC, und AF > AC. (74. §.)

Der 1. Zuſatz.

86. Jede Sehne AB des Kreiſes liegt alſo ganz innerhalb der Kreisfläche, weil die Entfernung eines jeden Puncts der Sehne vom Mittelpunct, die Endpuncte ausgenommen, kleiner als der Halbmeſſer iſt. 21 F.

Der 2. Zuſatz.

87. Aus einerley Punct C kann man nach einer andern graden Linie EF nicht mehr, als zwo gleich groſſe grade Linien CA, CB, ziehen: mithin kann auch eine grade Linie den Kreis nur in zweenen nicht in mehrern Puncten ſchneiden. 21 F.

Der 11. Lehrſatz.

88. Wenn zwo Dreyecke *ABC*, *DEF*, auſſer einem gleichen Winkel bey *B* und *E* eine gleiche anliegende Seite *AB* = *DE*, und eine gleiche gegenüberſtehende Seite *AC* = *DF* haben; und wenn überdem die dem gleichen Winkel gegenüberſtehende Seite gröſſer iſt, als die an demſelben anliegende Seite *AC* > *AB*, alſo auch *DF* > *DE*: ſo ſind die übrigen Seiten gleich, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber ſtehen, ſind ebenfalls gleich groß. 12 F.

Beweis. Es muß EF = BC ſeyn, weil man ſonſt EG = BC nehmen, und DG ziehen könnte. Dann wäre DG = AC, (60. §.) alſo DG = DF, und das Dreyeck DGF gleichſchenklicht, mithin DE

> DF,

> DF, (85. §.) welches der Vorausſetzung zuwider iſt. Demnach iſt EF = BC, und das übrige folgt aus dem 60. §.

Zuſatz.

89. Wenn in rechtwinklichten oder in ſtumpfwinklichten Dreyecken die Seiten, welche den rechten oder ſtumpfen Winkel nicht einſchlieſſen, auch überdem im letzten Fall die ſtumpfen Winkel ſelbſt gleich groß ſind; ſo paſſen die Dreyecke auf einander.

Der 12. Lehrſatz.

12 F. 90. Dreyecke *ABC* und *DEF* paſſen auf einander, wenn ſie eine gleiche Seite haben, *BC* = *EF*, und zweene gleiche anliegende Winkel *B* = *E*, *C* = *F*, oder ſtatt deſſen einen gleichen anliegenden Winkel *B* = *E*, und einen gleichen gegenüberſtehenden Winkel *A* = *D*.

Beweis. Aus der Vorausſetzung B = E und A = D, folgt auch, daß C = F ſey. (55. §.) Dann aber paſſen die graden Linien EF und BC auf einander, und die Winkel an E und B, auch an F und C; (13. §.) mithin die ganzen Dreyecke.

Der 13. Lehrſatz.

8 Fig. 91. In einerley Kreiſe, oder auch verſchiedenen Kreiſen, die gleiche Halbmeſſer haben, gehören zu gleich groſſen Bogen auch gleich groſſe Sehnen, und umgekehrt: wenn die Sehnen gleich ſind, ſo ſind die dazu gehörigen Bogen gleich.

Beweis. Wenn AFG, BLM, ein paar Kreisbogen, und CA, CG, CB, CM, die an ihre Endpuncte laufenden Halbmeſſer ſind; ſo ſind dieſe insgeſammt gleich groß. Sind alsdenn die Bogen gleich, ſo ſind die Winkel ACG und BCM gleich, (40. §.) alſo die

die Sehnen AG und BM. (60. §.) Weis man umgekehrt, daß AG = BM ſey; ſo folgt, es ſey ACG = BCM, (77. §.) mithin auch der Bogen AFG = Bog. BLM. (38. §.)

Die 20. Erklärung.

92. Parallele Linien heiſſen grade Linien, die in einerley Ebene eine ſolche Lage haben, daß ſie nicht zuſammen laufen können, man mag ſie nach beyden Seiten ſoweit man will verlängern.

Zuſatz.

93. Grade Linien AB, CD, die in einerley Ebene einerley Lage haben, ſind parallel. (53. §.) 10 F.

Die 2. Aufgabe.

94. An der graden Linie *EF* einen Winkel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel *ABC* gleich iſt. 23 F.

Aufl. Aus der Spitze B des gegebenen Winkels beſchreibe man mit einem willkührlich gewählten Halbmeſſer einen Bogen GH zwiſchen ſeinen Schenkeln, und aus dem Mittelpunct E mit demſelben Halbmeſſer ebenfalls einen Bogen, der EF in L ſchneidet. Die Sehne des Bogens HG trage man aus L in K, und ziehe EK, ſo iſt der Winkel an E = ABC. (91. und 40. §.)

Die 3. Aufgabe.

95. Durch den gegebenen Punct *G* eine grade Linie zu ziehen, die mit *CD* parallel läuft. 10 F.

Aufl. In CD nehme man einen Punct H willkührlich an, und ziehe EF durch G und H: an GE aber zeichne man den äuſſern Winkel EGB dem innern EHD gleich, ſo iſt AB mit CD parallel.

Beweis. Wenn AB und CD nach B und D verlängert zuſammen liefen, ſo würde ſich ein Dreyeck erge-

ergeben, worin EGB der äuſſere Winkel, alſo gröſſer als EHD wäre, (54. §.) da doch EGB = EHD gemacht iſt. Weil überdem EGB = AGF, und EHD = CHF iſt (21. §.); ſo hat man auch AGF = CHF, und die graden Linien AB, CD, können nach A und C verlängert ebenfalls nicht zuſammen laufen.

Der 1. Zuſatz.

10 F. 96. Wenn die Wechſelswinkel AGF und EHD gleich ſind, ſo iſt auch AGF = EGB, mithin EGB = EHD, und AB iſt mit CD parallel.

Der 2. Zuſatz.

97. Wenn die beyden innern Winkel EHD + BGF zwey rechte Winkel ausmachen, ſo iſt auch EGB + BGF = 2R, alſo EHD + BGF = EGB + BGF, mithin wiederum EHD = EGB und AB mit CD parallel. Zwey grade Linien, die auf einer dritten ſenkrecht ſtehen, ſind demnach parallel.

Der 14. Lehrſatz.

10 F. 98. Wenn eine Seitenlinie *GH* und ein anliegender Winkel *GHD* gegeben ſind; ſo kann man aus beyden ein ſolches Dreyeck verzeichnen, worin der Winkel, welcher der gegebenen Seite *GH* gegenüber ſtehet, kleiner iſt, als jeder gegebene Winkel.

Beweis. In denjenigen Schenkel AD, deſſen Länge nicht beſtimmt iſt, nehme man einen Punct M wo man will an, und ziehe GM. Man nehme hiernächſt MN = MG, und ziehe GN, ſo iſt GNH = $\frac{1}{2}$GMH. (64. §.) Man nehme aufs neue NO = NG, und ziehe GO, ſo iſt GON = $\frac{1}{2}$GNH, (64. §.) alſo GON = $\frac{1}{4}$GMH. Fährt man ſo fort, ſo

wird

wird jedesmahl der Winkel an der Spitze halb ſo groß, als er im vorigen war: mithin endlich kleiner, als jeder gegebene Winkel.

Der 15. Lehrſatz.

99. Wenn zwo grade Linien *KL* und *CD* von einer dritten *EF* in *G* und *H* ſo geſchnitten werden, daß die beyden innern Winkel *EHD* + *LGF* an der einen Seite weniger als zwey rechte Winkel ausmachen: ſo laufen *KL* und *CD* nach eben der Seite hin verlängert zuſammen. 10 F.

Beweis. Man mache den Winkel EGB = EHD, ſo hat man EGB + BGF = 2R, (17. §.) alſo auch EHD + BGF = 2R, mithin EHD + LGF < EHD + BGF, und LGF < BGF. Demnach liegt GL zwiſchen GB und GF, und BGL iſt ein gegebener Winkel. Man nehme GH, und den anliegenden Winkel GHD als gegebene Stücke an, und zeichne über GH ein Dreyeck, worin der Winkel GOH der Seitenlinie GH gegenüber kleiner als BGL iſt: alsdenn hat man GHD + HGO + BGO = 2R = GHD + HGO + GOH, (55. §.) alſo BGO = GOH, und es iſt auch BGO < BGL. Dieſemnach liegt nun GL zwiſchen den Schenkeln GH und GO des Winkels HGO, und muß verlängert mit HO zuſammen laufen. (23. §.)

Der 16. Lehrſatz.

100. Wenn zwo parallele Linien *AB*, *CD*, von einer dritten *EF* in *G* und *H* geſchnitten werden; ſo iſt die Summe der beyden innern Winkel *EHD* + *BGF* zweenen rechten Winkeln gleich. 10 F.

Beweis.

Beweis. Wäre $EHD + BGF < 2R$, ſo müſten AB und CD nach B und D verlängert zuſammen laufen, (99. §.) alſo wären ſie nicht parallel. Wäre dagegen $EHD + BGF > 2R$; ſo hat man auch $AGF + BGF = 2R$ und $EHD + EHC = 2R$, mithin $AGF + BGF + EHD + EHC = 4R$, (12. §. Rech.) und $AGF + EHC < 2R$: (13. §. Rech.) alſo würden AB und CD nach A und C verlängert zuſammen ſtoſſen, mithin wiederum nicht parallel ſeyn. Dieſemnach iſt $EHD + BGF = 2R$.

Der 1. Zuſatz.

10 F. 101. Wenn alſo AB mit CD parallel iſt, ſo iſt auch $EGB = EHD$, und $AGF = EHD$. Denn es iſt $EHD + BGF = 2R$ (100. §.) $= EGB + BGF$ (18. §.) alſo $EHD = EGB$. Ueberdem iſt $EGB = AGF$, alſo auch $EHD = AGF$.

Der 2. Zuſatz.

102. Parallele Linien haben alſo in einerley Ebene einerley Lage, weil ſie jede grade Linie in derſelben Ebene unter gleichen Winkeln ſchneiden. (52. §.)

Der 3. Zuſatz.

10 F. 103. Eine grade Linie KL, die eine von zwoen Parallellinien AB ſchneidet, muß verlängert auch die andre CD ſchneiden. Denn es iſt $EHD + BGF = 2R$, (100. §.) alſo $EHD + LGF < 2R$, mithin wird CD von KL geſchnitten. (99. §.)

Der 4. Zuſatz.

24 F. 104. Zwo grade Linien AB und CD, die mit einer dritten EF parallel laufen, ſind auch unter einander ſelbſt parallel. Denn wenn AB mit CD nicht parallel wäre, ſo müſte CD mithin auch EF (103. §.) von AB geſchnitten werden: alſo wäre AB nicht mit EF parallel.

Die

Die 21. Erklärung.

105. Ein Parallelogramm iſt ein Viereck, worin jede Seite mit der gegenüberſtehenden parallel iſt. Wenn dagegen nur zwo entgegen geſetzte Seiten im Viereck parallel ſind, ſo heißt die Figur ein Trapezium, und wenn keine Seite mit einer andern parallel iſt, ein Trapezoides oder ſchlechthin ein Viereck.

Zuſatz.

106. Man kann jedes Viereck wie ABCD vermittelſt der Diagonallinie BD in zwo Dreyecke theilen, und alle ſechs Winkel beyder Dreyecke zuſammen ſind den vier Winkeln des Vierecks zuſammen genommen gleich: alſo macht die Summe aller Winkel im Viereck vier rechte Winkel aus. 25 F.

Der 17. Lehrſatz.

107. Wenn *AD* und *BC* ein Paar gleich groſſe Parallellinien ſind, und man alsdenn ihre Endpuncte auf jeder Seite mit den graden Linien *AB*, *CD*, zuſammen ziehet; ſo wird die Figur *ABCD* ein Parallelogramm. 25 F.

Beweis. Man ziehe BD, ſo haben die Dreyecke ABD, BDC, einen gleichen Winkel ADB = DBC, (101. §.) und zwo gleiche anliegende Seiten AD = BC, BD = BD. Dieſemnach iſt auch ABD = BDC, (60. §.) und AB mit CD parallel. (96. §.)

Der 1. Zuſatz.

108. Wenn zwo Entfernungen EF, GH, einer graden Linie AB von der andern CD gleich groß ſind; ſo ſind die Linien AB, CD, parallel. Denn EF und GH ſind parallel, (97. §.) alſo auch AB und CD. (107. §.) 26 F.

Der 2. Zuſatz.

26 F. 109. Wenn zwo Entfernungen EF, HK, einer graden Linie LM von der andern CD ungleich ſind; ſo laufen beyde nach der Seite hin zuſammen, wo die Entfernung die kleinere iſt. Wenn nemlich HG = EF gemacht und durch die Puncte E, G, die grade Linie AB gezogen wird, ſo iſt AB mit CD parallel; (108. §.) alſo wird CD von LM geſchnitten, (103. §.) und zwar nach M und D verlänget. Denn es iſt DFE + FEB = 2R, (100. §.) alſo DFE + FEM < 2R, woraus das übrige folgt. (99. §.)

Der 3. Zuſatz.

110. **Parallele Linien ſind durchgängig gleich weit von einander entfernt.** Denn wären auch nur zwo Entfernungen der einen von der andern ungleich, ſo wären die Linien nicht parallel. (109. §.)

Der 4. Zuſatz.

26 F. 111. Alle Puncte E, G, N, die von einer graden Linie CD gleichweit entfernt ſind, liegen in grader Linie. Wenn nemlich EF, GH, NO, gleiche Entfernungen, alſo auch parallele Linien (97. §.) ſind; ſo muß eine durch E und G gezogene grade Linie auch ON ſchneiden. (103. §.) Aber EG iſt mit CD parallel, (108. §.) alſo ſind alle ihre Entfernungen von CD gleich groß, (110. §.) und ſie muß ON in einem ſolchen Punct ſchneiden, der eben ſoweit als E und G von CD entfernt iſt: das heißt, EG muß auch durch N gehen.

Der 18. Lehrſatz.

25 F. 112. **Jedes Parallelogramm *ABCD* wird von der Diagonallinie *BD* in zwey gleich groſſe Dreyecke getheilt, die auch gleiche Seiten und Winkel haben.**

Beweis.

Beweis. Es iſt ADB = DBC, und ABD = BDC. (101. §.) Ueberdem iſt BD = BD, alſo paſſen die Dreyecke ABD und BDC auf einander. (90. §.)

Der 1. Zuſatz.

113. Im Parallelogramm iſt jede Seite der gegenüberſtehenden gleich, und jeder Winkel dem gegenüberſtehenden Winkel.

Der 2. Zuſatz.

114. Wenn zwo Seiten, die einerley Winkel einſchlieſſen, gleich ſind, ſo ſind alle vier Seiten gleich: und wenn ein Winkel ein rechter Winkel iſt; ſo iſt jeder von den übrigen auch ein rechter Winkel.

Die 22. Erklärung.

115. Ein Quadrat iſt ein gleichſeitiges und rechtwinklichtes, ein Rhombus aber ein gleichſeitiges und ſchiefwinklichtes Parallelogramm. Ein ungleichſeitiges rechtwinklichtes Parallelogramm heißt ſchlechthin ein Rechteck, und wenn es ungleichſeitig und ſchiefwinklicht iſt, ein Rhomboides.

Die 4. Aufgabe.

116. Aus einem gegebenen Winkel *A* und zwoen Seiten, die ihn einſchlieſſen ſollen, das Parallelogramm zu verzeichnen. 25 F.

Aufl. Man gebe den Seiten AB und AD die vorgeſchriebene Länge. Mit dem Halbmeſſer AB ſchlage man hiernächſt aus D, und mit dem Halbmeſſer AD aus dem Mittelpunct B einen Bogen, der den vorigen in C ſchneidet. Wenn alsdenn DC und BC gezogen werden, ſo iſt ABCD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Wenn man BD ziehet, ſo haben die Dreyecke ABD, CBD, gleiche Seiten. Demnach ſind die Winkel ABD und BDC, imgleichen ADB und DBC gleich groß, (77. §.) alſo AB und CD, imgleichen AD und BC parallel. (96. §.)

Der 1. Zuſatz.

27 F. 117. Wenn A ein rechter Winkel iſt, und die anliegenden Seiten gleich groß ſind, ſo wird die Figur ein Quadrat: ein Rhombus, wenn der Win-
28 F. kel A ſchief iſt, und die anliegenden Seiten gleich ſind. Iſt A ein rechter Winkel, und ſind die anliegenden Seiten ungleich, ſo erhält man ein Rechteck. (115. §.)

Der 2. Zuſatz.

118. Quadrate, die gleiche Seitenlinien haben, ſind gleich groß, denn ſie paſſen auf einander. Quadrate aber auf ungleichen Seiten ſind ungleich groß: über der gröſſern Seite ſteht das gröſſere, über der kleinern das kleinere Quadrat.

Der 3. Zuſatz.

119. Gleich groſſe Quadrate haben gleich groſſe Seitenlinien: das gröſſere Quadrat aber hat eine gröſſere Seite als das kleinere.

Die 23. Erklärung.

25 F. 120. Wenn eine Seite AB des Dreyecks ABD für die Grundlinie angenommen wird, ſo iſt die dazu gehörige Höhe des Dreyecks die grade Linie DE, welche aus der Spitze des entgegen geſetzten Winkels auf die Grundlinie ſenkrecht fällt. Wäre einer von den Winkeln an der Grundlinie ſtumpf, ſo müſte man die Grundlinie verlängern, um die erwehnte ſenkrechte Linie herab zu laſſen. Wird AB für die Grundlinie des Parallelogramms ABCD angenom-

genommen, ſo iſt die Höhe deſſelben DE einerley mit der Entfernung der Grundlinie von der entgegen geſetzten Seitenlinie.

Der 19. Lehrſatz.

121. Parallelogramme *ABCD*, *ABEF*, 29 F. auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe ſind gleich groß.

Beweis. Wenn beyde auf der gemeinſchaftlichen Grundlinie AB ſtehen, ſo liegen die entgegen geſetzten Seiten CD, EF, in einerley graden Linie. (111. §.) Ferner iſt CD = AB = EF, (113. §.) alſo CD + CF = EF + CF, oder DF = CE, und überdem AD = BC, AF = BE. (113. §.) Demnach iſt die Fläche des Dreyecks ADF = der Fläche BCE. (77. §.) Wird von beyden das Dreyeck CGF abgezogen, ſo bleibt das Viereck ADCG = BGFE; und wenn zu jedem von dieſen Vierecken das Dreyeck ABG addirt wird, ſo erhält man ABCD = ABEF.

Der 1. Zuſatz.

122. Dreyecke ABD und ABF auf gleicher 29 F. Grundlinie in gleicher Höhe ſind ebenfalls gleich groß. Denn aus dem Winkel BAD, und den Seiten AB, AD, kann man das Parallelogramm ABCD verzeichnen: auch eben ſo aus dem Winkel BAF und den Seiten AB, AF, das Parallelogramm ABEF. (116. §.) Dieſe Parallelogramme ſind gleich, (121. §.) und die Dreyecke ſind ihre Hälften. (112. §.)

Der 2. Zuſatz.

123. Jedes Parallelogramm iſt doppelt ſo groß, als ein Dreyeck auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe.

Der 3. Zuſatz.

124. Zwey oder mehr gleich hohe Dreyecke machen zuſammen genommen eine Summe aus, die ſo groß iſt, als ein eben ſo hohes Dreyeck, wenn die Grundlinie deſſelben der Summe der Grundlinien jener Dreyecke gleich iſt.

Der 20. Lehrſatz.

30 F. 125. Wenn auf den dreyen Seitenlinien eines rechtwinklichten Dreyecks *ABC* Quadrate verzeichnet ſind; ſo iſt das Quadrat *BCDE* auf der Hypothenuſe *BC* ſo groß, als die Summe beyder Quadrate *ABFG*, *ACHI* auf den Perpendicularſeiten zuſammen genommen.

Beweis. Aus der Spitze A des rechten Winkels ziehe man AK auf der Hypothenuſe BC ſenkrecht, ſo wird AK verlängert auch DE in L ſenkrecht ſchneiden, (103. 100. §.) und das Quadrat BCDE wird dadurch in zwey Rechtecke BKLE, CKLD, getheilt. Man ziehe ferner AE und CF; ſo hat man ABF = R = CBE, alſo ABF + ABC = CBE + ABC, oder FBC = ABE. (12. §. R.) Ueberdem iſt AB = BF, BE = BC, alſo das Dreyeck ABE = FBC, (60. §.) folglich auch 2 . ABE = 2 . FBC. Weil nun BKLE = 2 . ABE, und ABFG = 2 . FBC, (123. §.) ſo erhält man BKLE = ABFG.

Völlig eben ſo erhellet, es ſey das Dreyeck ACD = Dreyeck HCB, alſo CKLD = ACHI: mithin ferner BKLE + CKLD, oder BCDE = ABFG + ACHI.

Der 1. Zuſatz.

30 F. 126. Die über den Seitenlinien AB, BC, AC, ſtehenden Quadrate kann man Kürze halber ſo bezeich=

zeichnen AB^q, BC^q, AC^q; alsdenn hat man $BC^q = AB^q + AC^q$, mithin auch $AB^q = BC^q - AC^q$.

Der 2. Zuſatz.

127. Wenn man aus andern Gründen weiß, daß 31 F. das Quadrat BC^q der gröſten Seite eines Dreyecks ABC der Summe der Quadrate $AB^q + AC^q$ der übrigen beyden Seiten gleich ſey: ſo iſt der Winkel A, welcher dieſer gröſten Seite entgegen ſtehet, ein rechter Winkel. Man zeichne den rechten Winkel EDF, und nehme DF = AC, DE = AB; ſo iſt $EF^q = DE^q + DF^q$, mithin auch $EF^q = AB^q + AC^q$. Weis man nun, daß $BC^q = AB^q + AC^q$ ſey, ſo iſt $BC^q = EF^q$, alſo auch BC = EF, (119. §.) mithin der Winkel BAC = EDF (77. §.) = R.

Die 5. Aufgabe.

128. Durch drey gegebene Puncte *A, B, D*, 32 F. die nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beſchreiben.

Aufl. Die graden Linien AB und BD müſſen Sehnen des Kreiſes werden. Man halbire alſo die erſte mit der graden Linie EF, die andre mit GH ſenkrecht; ſo müſſen beyde durch den Mittelpunct laufen: (70. §.) und wenn C ihr Durchſchnittspunct iſt, ſo iſt C der geſuchte Mittelpunct.

Beweis. Die ſenkrechten Linien EF und GH laufen gewiß irgendwo in C zuſammen. Wenn nemlich ABD ein rechter Winkel iſt, ſo ſind BD und

EF parallel, (97. §.) alſo wird EF von GH geſchnitten. (103. §.) Wenn ABD ſtumpf iſt; ſo iſt GBD ſpitz, alſo läuft AB mit GH in G zuſammen. Denn iſt die Summe der Winkel bey G und K < 2R, alſo laufen EF und GH zuſammen. Wäre ABD ſpitz, ſo würden GH und BA nach H und A verlängert zuſammen laufen, und das übrige, wie vorhin folgen.

Man ziehe noch CA, CB, CD, ſo erhellet aus dem 60. §., daß CA = CB, und CD = CB ſey: ein Kreis alſo aus C mit dem Halbmeſſer CA beſchrieben geht auch durch B und D.

Der 21. Lehrſatz.

129. **Wenn ein Winkel** *ACB* **am Mittelpunct im Kreiſe, und ein Winkel** *ADB* **an der Peripherie in demſelben oder einem eben ſo groſſen Kreiſe auf gleich groſſen Bogen ſtehen; ſo iſt der Winkel am Mittelpunct doppelt ſo groß, als der Winkel an der Peripherie.**

33 F. **Beweis.** Wenn der eine von den Schenkeln des Winkels an der Peripherie, wie AD, zugleich ein Durchmeſſer iſt; ſo erhellet ſchon aus dem 64. §, daß ACB = 2ADB ſey. In andern Fällen ziehe man durch die Spitze D des Winkels an der Peripherie, und durch den Mittelpunct C einen Durchmeſſer DE; ſo iſt ACE = 2ADE, und BCE = 2BDE. Daraus folgt ferner ACE + BCE =
34. 2(ADE + BDE), oder ACB = 2ADB, welches
35 F. der Fall iſt, den die 34ſte Figur vorſtellet. Aber auch ACE — BCE = 2(ADE — BDE), oder wie es die 35ſte Figur vorſtellet, ACB = 2ADB.

Der

Der 1. Zuſatz.

130. Alle Winkel an der Peripherie, die in einerley Kreiſe auf gleichen Bogen ſtehen, oder alle Winkel in einerley Kreisabſchnitte ſind gleich groß.

Der 2. Zuſatz.

131. Jeder Winkel an der Peripherie iſt ſo groß, als ein Winkel am Mittelpunct, wozu ein Bogen gehört, der halb ſo groß iſt, als der Bogen zwiſchen den Schenkeln des Winkels an der Peripherie. **Ein Winkel im Halbkreiſe iſt alſo ein rechter Winkel.**

Die 24. Erklärung.

132. Eine gradlinichte **reguläre Figur** iſt eine ſolche, worin alle Winkel und alle Seiten gleich groß ſind. Das gleichſeitige Dreyeck und das Quadrat geben davon ſchon Beyſpiele. Alle übrige heiſſen zwar überhaupt **reguläre Polygone**: ſie erhalten aber auch ihre Nahmen von der Anzahl ihrer Seiten.

Der 1. Zuſatz.

133. Wenn die Peripherie des Kreiſes bey A, 36 F.
B, D, E, F, G, in gleiche Bogen getheilt iſt, und man alsdenn die Sehnen dieſer Bogen ziehet; ſo ſchlieſſen dieſe ein reguläres Polygon ein. Denn die Seiten ſind gleich groß, (91. §.) und die Winkel ebenfalls. (130. §.)

Der 2. Zuſatz.

134. Jedes auf dieſe Art im Kreiſe beſchriebene **reguläre Polygon** iſt kleiner als der Kreis, und die Peripherie des Polygons kleiner, als des Kreiſes Peripherie.

Die 25. Erklärung.

135. Eine **Berührungslinie** oder **Tangente** des Kreiſes heißt eine ſolche grade Linie, die zwar mit der Peripherie des Kreiſes zuſammen läuft, aber

doch nach beyden Seiten verlängert ganz auſſerhalb des Kreiſes fällt. Wenn alle Seitenlinien einer gradlinichten Figur den Kreis berühren, ſo heißt ſie eine um den Kreis beſchriebene Figur.

Der 1. Zuſatz.

38 F. 136. Eine grade Linie DE, die einen Halbmeſſer CA des Kreiſes im Endpunct A ſenkrecht ſchneidet, iſt eine Tangente deſſelben. Denn die Entfernung eines jeden Puncts E dieſer Linie vom Mittelpunct C, nur A ausgenommen, iſt gröſſer, als der Halbmeſſer. Auch umgekehrt, wenn DE den Kreis in A berührt, ſo iſt der Halbmeſſer CA auf DE ſenkrecht, weil er die kürzeſte Linie iſt, die von C nach DE gezogen werden kann.

Der 2. Zuſatz.

137. Durch einen in der Peripherie gegebenen Punct A ziehet man eine Tangente des Kreiſes, wenn man DE auf den Halbmeſſer CA im Endpunct ſenkrecht ſetzt. Wenn aber ein Punct D auſſerhalb des Kreiſes gegeben iſt, ſo ziehe man zwiſchen demſelben und dem Mittelpunct die grade Linie CD, halbire ſie in H, und beſchreibe aus H mit dem Halbmeſſer HD = HC einen Kreis, der den gegebenen Kreis in A und B ſchneidet: alsdenn iſt ſowohl DA als auch DB eine Tangente des Kreiſes. (136. 131. §.)

Der 22. Lehrſatz.

38 F. 138. Wenn zwo Tangenten *AE* und *BF* des Kreiſes einander in *D* ſchneiden, ſo ſind *AD* und *BD* gleich groß, auch werden die Winkel *ADB* und *ACB*, nebſt dem Bogen *AGB*, von *CD* halbirt.

Beweis. Die bey A und B rechtwinklichten Dreyecke (137. §.) haben die gleichen Seiten AC = BC,

= BC, und CD = CD; alſo iſt AD = BD, ACD = BCD, ADC = BDC, (89. §.) mithin auch der Bog. AG = Bog. BG. (39. §.)

Der 23. Lehrſatz.

139. Wenn die Peripherie des Kreiſes bey *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, in gleiche Bogen getheilt iſt, und man alsdenn durch alle Theilungspuncte Tangenten des Kreiſes ziehet; ſo ſchlieſſen dieſe ein um den Kreis beſchriebenes reguläres Polygon ein. 37 F.

Beweis. Alle Winkel bey A, B, D, u. ſ. f. ſind gleich groß, weil in den Vierecken AVCP, BPCQ, QCRD, u. ſ. f. die Winkel an V, P, Q, R, u. ſ. f. rechte Winkel und die Winkel an C ebenfalls gleich ſind. (106. §.) Ferner iſt der Winkel ACP = $\frac{1}{2}$PCV, BCP = $\frac{1}{2}$PCQ (138. §.) und PCV = PCQ, alſo ACP = BCP. Ueberdem ſind die Winkel bey P rechte Winkel, (137. §.) und CP = CP; mithin iſt AP = BP, und BP = $\frac{1}{2}$AB. Eben ſo erhellet, daß BQ = $\frac{1}{2}$BD ſey, und es iſt BP = BQ, (138. §.) alſo auch AB = BD: mithin aus eben dem Grunde BD = DE = EF, u. ſ. f.

Zuſatz.

140. Jedes um den Kreis beſchriebene reguläre Polygon iſt gröſſer, als der Kreis, und die Peripherie des Polygons gröſſer, als die Peripherie des Kreiſes.

Der 24. Lehrſatz.

141. Es giebt in der Fläche eines jeden regulären Polygons *ABDEFG* einen Punct *C*, der nicht allein von allen Winkelpuncten, ſondern auch von allen Seitenlinien des Polygons gleich weit entfernt iſt. 37 F.

Beweis.

Beweis. Man halbire zwey an einer Seite AB anliegende Winkel bey A und B, ſo erhält man ein gleichſchenklichtes Dreyeck ABC, worin CB = CA iſt. (72. §.) Man ziehe ferner CD, ſo iſt CAB = CBD, CA = CB, und AB = BD, mithin auch CD = CB. Eben ſo erhellet, daß CE = CD, CF = CE ſey, u. ſ. f. Man ziehe überdem CP auf AB, CQ auf BD ſenkrecht; ſo iſt CAP = CBQ, CA = CB, AP = BQ, (65. §.) alſo CP = CQ. Eben ſo findet man CR = CQ, CS = CR, u. ſ. f. wenn dieſe Linien auf DE, EF, u. ſ. f. ſenkrecht ſind.

Der 1. Zuſatz.

142. Ein Kreis aus C mit dem Halbmeſſer CA beſchrieben, läuft durch alle Winkelpuncte des Polygons, und ein Kreis mit dem Halbmeſſer CP beſchrieben läuft auch durch Q, R, S, u. ſ. f. und berührt alle Seitenlinien.

Der 2. Zuſatz.

143. Jede andre grade Linie, die man von C bis an den Umfang des regulären Polygons ziehen kann, iſt gröſſer als CP und kleiner als CA.

Die 26. Erklärung.

144. Der von allen Winkelpuncten und allen Seitenlinien des regulären Polygons gleich weit entfernte Punct C kann der Mittelpunct des Polygons heiſſen, und CA der gröſte, CP der kleinſte Halbmeſſer des regulären Polygons. Der Winkel ACB zwiſchen zweenen gröſten Halbmeſſern, die zu einerley Seitenlinie AB gehören, heißt der Centriwinkel, und jeder von den gleichen Winkeln GAB der Figur wird der Polygonwinkel genannt.

Der 1. Zuſatz.

145. Wenn man 360° als die Zahl der Grade der ganzen Peripherie des Kreiſes mit der Zahl der

Seiten-

Seitenlinien eines regulären Polygons dividirt, ſo hat man den Centriwinkel ACB. Beyde Hälften CAB, CBA, des Polygonwinkels zuſammen, alſo der ganze Polygonwinkel, und der Centriwinkel ACB betragen zuſammen 180°. Man ſubtrahirt alſo den Centriwinkel von 180°, um den Polygonwinkel zu finden.

Der 2. Zuſatz.

146. Um den Kreis in gleiche Bogen zu theilen, dient der Transporteur, wenn man am Mittelpunct des Cirkels einen Winkel von ſovielen Graden zeichnet, als gefunden werden, wenn man 360° mit der Zahl dividirt, die es angiebt, in wieviele gleiche Bogen der Kreis getheilt werden ſoll. Dies Verfahren dient alſo, auch den Centriwinkel zu zeichnen, wenn man im Kreiſe (133. §.) oder um den Kreis (139. §.) ein reguläres Polygon mit einer vorgeſchriebenen Zahl von Seiten zeichnen ſoll.

Der 3. Zuſatz.

Der Centriwinkel ACB im regulären Sechseck beträgt 60°, und jede Hälfte des Polygonwinkels ebenfalls: alſo iſt die Seite AB des Sechseckes dem gröſten Halbmeſſer AC deſſelben gleich. (72. §.) 36 F.

Der 25. Lehrſatz.

147. Jedes reguläre Polygon *ABCDE* iſt einem Dreyeck *AFG* gleich, deſſen Grundlinie *AG* der Peripherie des Polygons, und deſſen Höhe *FH* dem kleinſten Halbmeſſer des Polygons gleich iſt. 39 F.

Beweis. Das reguläre Polygon iſt eine Summe ſovieler gleich hoher Dreyecke, als es Seiten hat, die Höhe dieſer Dreyecke iſt dem kleinſten Halbmeſſer

gleich,

gleich, und die Summe ihrer Grundlinien iſt ſo groß, als die Peripherie des Polygons. (141. §.) Die Summe aller dieſer Dreyecke iſt dem Dreyeck AFG gleich, (124. §.) alſo iſt auch das Polygon ſelbſt ſo groß, als das Dreyeck AFG.

Die 27. Erklärung.

148. Gradlinichte Figuren, die gleich viele Seitenlinien haben, ſind ähnliche Figuren, wenn ihre Winkel, wie ſie nach der Ordnung folgen, gleich groß ſind, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einſchlieſſen, ſich in der einen Figur eben ſo, wie in der andern gegen einander verhalten. Um es kurz auszudrücken, daß eine Figur der andern ähnlich ſey, wird das Zeichen (∼) gebraucht.

Der 1. Zuſatz.

149. Figuren, die auf einander paſſen, ſind ähnliche Figuren. Auch Figuren, die einer dritten ähnlich ſind, ſind einander ſelbſt ähnlich.

Der 2. Zuſatz.

150. Alle reguläre Polygone, die gleichviele Seiten haben, ſind ähnliche Figuren. Denn ſie haben gleiche Centriwinkel und gleiche Polygonwinkel. (145. §.) Auch in jedem Polygon für ſich ſind die Seiten gleich groß: alſo verhalten ſie ſich in dem einen gegen einander eben ſo, wie in dem andern.

Der 26. Lehrſatz.

40 F. 151. Wenn eine Seite *AB* des Dreyecks *ABC* bey *D*, *F*, *H*, in gleiche Theile getheilt iſt, und durch alle Theilungspuncte die graden Linien *DE*, *FG*, *HI*, mit der anliegenden Seite *BC* parallel gezogen werden; ſo wird dadurch die dritte Seite *AC* in eben ſoviele gleiche Theile getheilt.

Beweis.

Beweis. Man ziehe DK, FL, HM, mit AC parallel, ſo ſind in den Dreyecken ADE und DFK die Seiten AD, DF, gleich groß, und die anliegenden Winkel: (101. §.) mithin iſt AE = DK. Weil überdem DK = EG, (113. §.) ſo iſt AE = EG. Ferner iſt FL = GI, und FL = DK, weil die Dreyecke DKF und HFL auf einander paſſen, (90. §.) alſo GI = EG. Eben die Schlüſſe finden bey den übrigen Theilen ihre Anwendung.

Zuſatz.

152. Eine gegebene grade Linie AC theilt man auf folgende Art in eine vorgeſchriebene Zahl gleicher Theile. Man zieht durch A eine andre grade Linie AB, die mit AC einen Winkel von willkührlicher Gröſſe einſchlieſſen kann. Auf dieſe trägt man ſoviele gleiche Theile, als AC erhalten ſoll, von A nach B auf, und ziehet BC. Durch alle Theilungspuncte in AB werden hiernächſt grade Linien mit BC parallel gezogen, ſo theilen ſie AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Die 28. Erklärung.

153. Wenn eine Gröſſe, wie die grade Linie CD, 41 F. in gleich groſſe Theile eingetheilt iſt, ſo heißt jeder Theil von ihr, wie CE ein aliquoter Theil des ganzen. Es läßt ſich alsdenn allemahl durch eine ganze Zahl ausdrücken, wievielmahl der aliquote Theil im ganzen enthalten ſey, und dieſe Zahl iſt der Exponent des Verhältniſſes des Ganzen zu dem aliquoten Theile.

Die 6. Aufgabe.

154. Den Exponenten des Verhältniſſes 41 F. einer Gröſſe *AB* gegen eine andre *CD* zu finden.

Aufl.

Aufl. Der geſuchte Exponent kann allemahl als ein Quotient angeſehen werden, den man findet, wenn das vorhergehende Glied des Verhältniſſes mit dem nachfolgenden dividirt wird. Wäre alſo das nachfolgende Glied ein aliquoter Theil des vorhergehenden, ſo würde man nur ſuchen müſſen, wievielmahl jenes in dieſem enthalten iſt, und der geſuchte Exponent wäre alsdenn eine ganze Zahl.

Wenn dagegen das nachfolgende Glied kein aliquoter Theil vom vorhergehenden iſt; ſo theile man das nachfolgende Glied ſelbſt in gleiche Theile, und verſuche, ob vielleicht ein aliquoter Theil CE des nachfolgenden Gliedes CD zugleich ein aliquoter Theil des vorhergehenden AB ſey. Alsdenn iſt der Exponent des Verhältniſſes ein Bruch, wie $\frac{4}{3}$ in dem Fall, welchen die 40. Fig. vorſtellet. Der Nenner iſt die Zahl der gleichen Theile, worin man das nachfolgende Glied CD getheilt hat, der Zähler drückt aus, wievielmahl einer von dieſen aliquoten Theilen des nachfolgenden Gliedes im vorhergehenden AB enthalten ſey.

42 F. Wäre ein ſolcher aliquoter Theil CE des nachfolgenden Gliedes nicht zugleich ein aliquoter Theil des vorhergehenden AB; ſo wird es ſich wenigſtens durch eine ganze Zahl ausdrücken laſſen, wievielmahl CE aus AB weggenommen werden kann, wenn gleich ein Stück, wie FB als Reſt übrig bleibt, welches ſchon kleiner als CE iſt. Alsdenn iſt AB = AF + FB, alſo $\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CD} + \frac{FB}{CD}$, und der Theil $\frac{AF}{CD}$ iſt eine Zahl, wie in dieſem Fall $\frac{AF}{CD}$

=

$= \frac{4}{3}$, $\frac{FB}{CD}$ aber muß als ein noch unbekannter Theil des geſuchten Exponenten angeſehen werden. Dieſer iſt jedoch allemahl kleiner, als ein Bruch, deſſen Zähler = 1, der Nenner aber mit dem Nenner des ſchon gefundenen bekannten Theils einerley iſt.

Die 29. Erklärung.

155. Zwey Gröſſen heiſſen commenſurable Gröſſen, wenn ſich ein aliquoter Theil von der einen angeben läſſet, der zugleich ein aliquoter Theil von der andern iſt, mithin für beyde ein gemeinſchaftliches Maaß abgiebt. Incommenſurable Gröſſen können diejenigen heiſſen, die kein gemeines Maaß haben.

Zuſatz.

156. Wenn die Glieder eines Verhältniſſes commenſurable Gröſſen ſind; ſo läßt ſich der Exponent deſſelben entweder als eine ganze Zahl, oder als ein Bruch in beſtimmten Zahlen genau angeben. Der Exponent des Verhältniſſes gegen eine andre damit incommenſurable Gröſſe läßt ſich zwar nicht vollkommen genau, aber doch ſoweit durch eine Zahl ausdrücken, daß der noch fehlende unbekannte Theil kleiner werden kann, als jeder gegebene noch ſo kleine Bruch.

Die 30. Erklärung.

157. Eine Zahl, die ſich beſtimmt angeben läßt, nennt man eine rationale Zahl, in wie weit ſie die Gröſſe des vorhergehenden Gliedes in einem Verhältniß gegen das nachfolgende damit incommenſurable Glied beſtimmt und völlig genau auszudrücken dienen kann. Der Exponent des Verhältniſſes einer

Gröſſe gegen eine andre mit ihr incommenſurable Gröſſe heißt eine Irrationalzahl. Man kann ſich denſelben zwar auch als einen Quotienten vorſtellen, nur läßt er ſich nie völlig genau durch einen ſolchen Bruch ausdrücken, wovon Zähler und Nenner beſtimmte Zahlen ſind. Das Verhältniß ſelbſt nennt man ebenfalls rational oder irrational, nachdem die Glieder deſſelben commenſurable oder incommenſurable Gröſſen ſind.

Der 1. Zuſatz.

158. Die Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubiczahlen ſind Irrationalzahlen.

Der 2. Zuſatz.

159. Wenn A und B überhaupt ein Paar incommenſurable Gröſſen von einerley Art bezeichnen, m aber eine ganze Zahl vorſtellet; ſo iſt $\frac{1}{m}B$ ein aliquoter Theil von B. Man ſetze bey angeſtellter Prüfung nach dem 154. §., fände ſich, daß dieſer Theil $\frac{1}{m}B$ in der Gröſſe A $n$mahl enthalten ſey, und noch ein Reſt R, der kleiner als $\frac{1}{m}B$ iſt, übrig bliebe; ſo hat man $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$. Alsdenn bezeichnet $\frac{n}{m}$ den bekannten rationalen Theil der Zahl oder des Exponenten $\frac{A}{B}$, und $\frac{R}{B}$ iſt der unbekannte irrationale Theil.

Der

Der 3. Zuſatz.

160. Man nehme noch an, daß N jede andre gegebene Zahl bezeichne, jedoch ſo, daß $N < \frac{A}{B}$ ſey: ſo kann die Zahl m ſo groß angenommen werden, daß die rationale Zahl $\frac{n}{m} > N$ wird. Weil $N < \frac{A}{B}$ iſt, ſo ſey $N + D = \frac{A}{B}$: alsdenn iſt D eine Zahl von beſtimmter Gröſſe. Man nehme die Zahl m ſo groß an, daß $\frac{1}{m} < D$ wird. (156. §.) Alsdenn iſt zugleich $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$, mithin auch $\frac{R}{B} < D$. Aber $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = N + D$, alſo nun $\frac{n}{m} > N$.

Der 27. Lehrſatz.

161. Wenn die Verhältniſſe $A : B$ und $C : D$ irrational, auch überdem die ähnlichen aliquoten Theile $\frac{1}{m}B$ und $\frac{1}{m}D$ der beyden nachfolgenden Glieder in den dazu gehörigen vorhergehenden A und C gleichvielmahl enthalten, mithin die rationalen Theile der Exponenten dieſer Verhältniſſe gleich groß ſind, wie groß auch die Zahl m angenommen wird; ſo iſt $A : B = C : D$.

Beweis. Wenn $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$ wäre; ſo könnte die

Zahl m ſo groß angenommen werden, daß $\frac{n}{m} > \frac{C}{D}$ würde. (160. §.) Es iſt aber $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, alſo $\frac{n}{m} = \frac{C - r}{D}$: mithin wäre $\frac{C - r}{D} > \frac{C}{D}$, welches unmöglich iſt.

Wäre dagegen $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$; ſo könnte man die Zahl m wiederum ſo groß annehmen, daß $\frac{n}{m} > \frac{A}{B}$ würde. (160. §.) Vermöge der Vorausſetzung iſt alsdenn $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, alſo $\frac{n}{m} = \frac{A - R}{B}$, und es wäre $\frac{A - R}{B} > \frac{A}{B}$, welches ebenfalls unmöglich iſt.

Der 1. Zuſatz.

162. Fände man die rationalen Theile der Quotienten $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, ungleich groß, ſo wären gewiß dieſe Quotienten ſelbſt ungleich. Wäre $\frac{A}{B} = \frac{n+1}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, ſo wäre ſchon $\frac{n+1}{m} > \frac{C}{D}$, weil $\frac{1}{m} > \frac{r}{D}$ iſt, alſo auch $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$.

Der

Der 2. Zuſatz.

163. Weiß man aus andern Gründen, daß A : B = C : D ſey; ſo ſind ähnliche aliquote Theile $\frac{1}{m}$B und $\frac{1}{m}$D der beyden nachfolgenden Glieder allemahl in den dazu gehörigen vorhergehenden Gliedern gleichvielmahl enthalten, wie groß auch die Zahl *m* angenommen wird: denn im entgegen geſetzten Fall wären die Verhältniſſe A : B und C : D ungleich. (162. §.)

Der 3. Zuſatz.

164. Wendet man dieſe Sätze auf die vier graden Linien AB, CD, EF, GH, (43. Fig.) an; ſo findet man $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{5} + \frac{KB}{CD}$, und $\frac{EF}{GH} = \frac{7}{5} + \frac{LF}{GH}$. Demnach ſind die rationalen Theile dieſer Exponenten gleich. Wofern man ſich aus andern Gründen davon verſichern kann, daß dieſe nothwendig allemahl gleich groß gefunden werden, wenn auch CD und GH in viel mehr als 7 gleiche Theile getheilt werden; ſo iſt man auch verſichert, daß AB : CD = EF : GH ſey.

Der 4. Zuſatz.

165. Eine jede Proportion, auch alsdenn, wenn beyde Verhältniſſe irrational ſind, läßt ſich ganz allgemein auf folgende Art ausdrücken mA : A = mB : B, wie es oben für den beſondern Fall ſchon geſchehen iſt, wenn alle vier Glieder Zahlen ſind. (84. §. Rech.) Hier muß man nur bemerken, daß *m* in dem Fall eine Irrationalzahl bezeichne, wenn die Glieder der beyden Verhältniſſe incommenſurabel ſind. Weil man nun in jedem Fall eine Rational-

zahl angeben kann, deren Differenz von der Irrationalzahl m kleiner als jeder vorgelegte noch ſo kleine Bruch iſt; (156. §.) ſo müſſen alle Sätze, die aus dem allgemeinen Ausdruck $mA : A = mB : B$ folgen, wenn man ſich m als eine Rationalzahl vorſtellet, auch richtig ſeyn, wenn gleich m eine Irrationalzahl wäre.

Der 5. Zuſatz.

166. Aus der Proportion $mA : A = mB : B$, wenn alle vier Glieder von einerley Art ſind, folgt auch (terminos antecedentes et conſequentes ſummando) $mA + mB : A + B = mA : A$, oder $= mB : B$, weil m ebenfalls des Verhältniſſes $mA + mB : A + B$ Exponent iſt. (87. 88. §. Rech.) Auch iſt $mA - mB : A - B = mA : A$ oder $= mB : B$. Ferner findet bey eben der angenommenen Vorausſetzung die Regel von Verwechſelung der mittlern Glieder (91. §. Rech.) ihre Anwendung.

Der 6. Zuſatz.

167. Aus eben der Proportion $mA : A = mB : B$ folgt auch $mA + A : A = mB + B : B$, oder $mA - A : A = mB - B : B$. Im erſten Fall iſt $m + 1$, im andern Fall $m - 1$ der Exponent beyder Verhältniſſe.

Der 7. Zuſatz.

168. Aus zwoen Proportionen dieſer Art $mA : A = mB : B$, und $A : C = B : D$, folgt auch (ordinatim et ex aequo) $mA : C = mB : D$. Wenn nemlich $A = nC$, ſo iſt $B = nD$. (163. §.) Ferner iſt $mnC : C = mnD : D$, (165. §.) alſo auch $mA : C = mB : D$.

Der 8. Zuſatz.

169. Eine Proportion wie $A : B = C : D$ kann man

man auch in umgekehrter Ordnung ſo ſchreiben: B : A = D : C. Wenn alſo B > A, mithin auch D > C iſt; ſo hat man B ± A : A = D ± C : C. (167. §.) Wird hiemit die Proportion A : B = C : D verbunden; ſo folgt daher auch B ± A : B = D ± C : D. (168. §.)

Der 28. Lehrſatz.

170. *Wenn eine grade Linie DE, zwo Seiten AB und AC eines Dreyecks ſchneidet, und mit der dritten BC parallel iſt; ſo haben die abgeſchnittenen Stücke AD und AE gegen die Seiten AB und AC einerley Verhältniß.* 44 F.

Beweis. Man theile die Seite AB in eine gefällige Anzahl gleicher Theile, durch die Theilungspuncte aber ziehe man grade Linien mit BC parallel: dieſe theilen AC in eben ſoviele gleiche Theile, ſo daß AF und AG ähnliche aliquote Theile von AB und AC werden. (151. §.) Alsdenn iſt AF in AD ſoviel-mahl, als AG in AE enthalten, und das allemahl, in wieviele gleiche Theile man AB und AC theilen will. Demnach iſt AD : AB = AE : AC. (161. §.)

Der 1. Zuſatz.

171. Aus dieſer Proportion folgt auch AB − AD : AB = AC − AE : AC, (169. §.) alſo BD : AB = CE : AC. Aus beyden Proportionen aber AD : AB = AE : AC, und AB : BD = AC : CE folgt weiter AD : BD = AE : CE. (168. §.)

Der 2. Zuſatz.

172. Wenn zwo Seiten AB, AC, eines Dreyecks bey D und E ſo getheilt ſind, daß die Proportion AD : AB = AE : AC richtig iſt; ſo iſt auch DE mit BC parallel. Denn wenn man durch D eine andre grade Linie DH mit BC parallel ziehen könnte; ſo 44 F.

wäre auch AD : AB = AH : AC, mithin AE : AC = AH : AC, und AE = AH, welches nur möglich iſt, wenn H mit E, alſo auch DH mit DE zuſammen fällt.

Auch alsdenn, wenn die Dreyecke ABC, AKL, einander an der Spitze entgegengeſetzt ſind, iſt KL mit BC parallel, wenn ſich AL : AB = AK : AC verhält. Wird nemlich AF = AL, AG = AK gemacht; ſo iſt auch AF : AB = AG : AC, alſo FG mit BC parallel. Weiter iſt AGF = AKL, (60. §.) alſo KL mit FG, und eben darum auch mit BC parallel.

Der 3. Zuſatz.

45 F. 173. Zwo grade Linien, AB, CD, wenn ſie zwiſchen zwoen Parallellinien AC, BD, ſtehen, werden von der dritten EF, die mit den letztern beyden parallel iſt, ſo geſchnitten, daß AE : AB = CF : CD iſt. Wenn nemlich AD gezogen wird, ſo hat man AE : AB = AG : AD, und CF : CD = AG : AD, (170. 171. §.) alſo auch AE : AB = CF : CD.

Der 4. Zuſatz.

174. Auch umgekehrt: wenn AC und BD parallel, AB und CD aber bey E und F ſo getheilt ſind, daß AE : AB = CF : CD iſt; ſo iſt auch EF mit AC und BD parallel. Denn eine grade Linie EH, die mit AC und BD parallel läuft, ſchneidet CD in H ſo, daß AE : AB = CH : CD iſt. Wenn alſo auch AE : AB = CF : CD iſt; ſo hat man CH : CD = CF : CD, folglich CH = CF: mithin müſſen die Puncte H und F, alſo auch die Linien EH und EF einerley ſeyn.

Der

Der 29. Lehrſatz.

175. In gleichwinklichten Dreyecken *ABC*, *DEF*, ſind die gleichnahmigen Seiten proportional, und die Dreyecke ſind einander ähnlich. 46 F.

Auch umgekehrt: wenn die Seiten eines Dreyecks *ABC* den Seiten eines andern *DEF* in eben der Ordnung proportional ſind; ſo ſind die Winkel zwiſchen den proportionalen Seiten gleich groß, und die Dreyecke ſind ähnliche Dreyecke.

Beweis des 1. S. Wenn B = E, A = D, folglich C = F und EF die Seite iſt, die mit BC zwiſchen gleichen Winkeln liegt; ſo nehme man BG = EF, und ziehe GH mit AC, GI mit AB parallel. Alsdenn haben die Dreyecke DEF und BHG gleiche Seiten und Winkel: (101. §.) auch iſt AI = HG = DF. Ueberdem iſt BH : AB = BG : BC, (170. §.) und AI : AC = BG : BC; (171. §.) alſo auch DE : AB = EF : BC, und DF : AC = EF : BC: mithin ferner DE : AB = DF : AC.

Beweis des 2. S. Wenn die Verhältniſſe DE : AB, DF : AC, EF : BC gleich, alſo EF und BC ein Paar gleichnahmige Seiten ſind; ſo nehme man BG = EF und ziehe GH mit AC parallel. Alsdenn werden die Winkel BHG = BAC, BGH = ACB, und die Dreyecke ABC, BHG einander ähnlich: (1. S.) alſo BH : BG = AB : BC, und BH : HG = AB : AC. Vermöge der Vorausſetzung iſt AB : BC = DE : EF, und AB : AC = DE : DF; alſo auch BH : BG = DE : EF, und BH : HG = DE : DF. Demnach iſt BH = DE, weil BG = EF iſt; alſo ferner HG = DF, und die Dreyecke BHG,

DEF haben gleiche Seiten. Daraus folgt, daß auch ihre Winkel gleich ſind.

Der 30. Lehrſatz.

46 F. 176. Dreyecke *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben, $B = E$, ſind ähnliche Dreyecke, wenn auch die Seiten, welche die gleichen Winkel einſchlieſſen, *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, einander proportional ſind.

Auch ſind ſolche Dreyecke, *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben, $B = E$, und zwo proportionale Seiten, *AB*, *AC*, *DE*, *DF*, die den gleichen Winkel nicht einſchlieſſen, einander ähnlich: wenn die dem gleichen Winkel gegenüberſtehende Seite gröſſer iſt, als die an demſelben anliegende Seite.

Beweis des 1. S. Auf BA nehme man das Stück BH ſo groß, als die gleichnahmige Seite ED, auch eben ſo auf BC das Stück BG = EF, und ziehe GH: ſo iſt auch HG = DF, BHG = EDF, HGB = DFE. (60. §.) Ueberdem iſt BA : BC = BH : BG, alſo HG mit AC parallel, (172. §.) und EDF = BHG = A, EFD = HGB = C, (101. §.) folglich das Dreyeck DFE ∾ ABC. (175. §.)

Beweis des 2. S. In den Dreyecken ABC, DEF, ſey B = E, und BA : AC = ED : DF, auch überdem AC > AB, alſo DF > ED. Man nehme BH = ED, und mache den Winkel BHG = A; ſo iſt das Dreyeck BHG ∾ ABC, (175. §.) und BA : AC = BH : HG. Vermöge der Vorausſetzung iſt auch BA : AC = ED : DF, alſo BH : HG = ED : DF. Ferner war BH = ED, alſo iſt HG = DF, mithin der Winkel D = BHG (88. §.) = A, und das Dreyeck DEF ∾ ABC. (175. §.)

Der

Der 31. Lehrſatz.

177. Eine grade Linie *AE*, die von der 47 F.
Spitze des rechten Winkels *A* im rechtwinklichten Dreyeck *ABD* auf die Hypothenuſe *BD* ſenkrecht herab gelaſſen wird, theilt das Dreyeck in zwo andre, die unter ſich und dem ganzen ähnlich ſind.

Beweis. Die Dreyecke ABD und ABE haben gleiche Winkel, weil BAD = R = AEB, und B beyden Dreyecken gemein iſt. Auch ſind die Dreyecke ABD und ADE gleichwinklicht, weil D zu beyden Dreyecken gehört, und BAD, AED rechte Winkel ſind. Demnach ſind ABD und ABE, ſo wie ABD und ADE, mithin auch ABE und ADE einander ähnlich.

Der 1. Zuſatz.

178. Die grade Linie AE, welche von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuſe ſenkrecht fällt, iſt zwiſchen den beyden Stücken BE und DE, worin ſie die Hypothenuſe theilt, die mittlere Proportionallinie.

Der 2. Zuſatz.

179. Wenn im Kreiſe über einem Durchmeſſer 47 F.
BD die grade Linie EA ſenkrecht aufgerichtet wird; ſo iſt ſie zwiſchen den beyden Stücken, BE, DE, des Durchmeſſers die mittlere Proportionallinie. Auch iſt jede von den beyden Sehnen AD oder AB zwiſchen dem Durchmeſſer BD und dem an der Sehne anliegenden Theil deſſelben DE oder BE die mittlere Proportionallinie.

Die 7. Aufgabe.

180. Zu dreyen gegebenen graden Linien *a*, 48 F.
b, *c*, die vierte Proportionallinie zu finden.

Aufl.

Aufl. Man zeichne den Winkel A von willkührlicher Gröſſe, nehme auf dem einen Schenkel AB $= a$, und AC $= b$, auf dem andern Schenkel aber AD $= c$, und ziehe BD. Ferner ziehe man CE durch C mit BD parallel; ſo iſt AE die geſuchte vierte Proportionallinie. (170. §.)

Zuſatz.

181. Wenn b und c gleich groß ſind, ſo findet man eben ſo zu a und b die dritte Proportionallinie.

Die 8. Aufgabe.

47 F. 182. Zwiſchen zwoen gegebenen graden Linien a, b, eine mittlere Proportionallinie zu finden.

Aufl. Man trage auf einer willkührlich gezogenen graden Linie zuerſt BE $= a$ auf, und ſetze hiernächſt ED $= b$ hinzu. Die Summe BD halbire man in C, und verzeichne aus C mit dem Halbmeſſer CB = CD einen Kreis. Aus E richte man EA ſenkrecht auf: ſo iſt das die geſuchte mittlere Proportionallinie.

Der 32. Lehrſatz.

49 F. 183. Aehnliche Figuren *ABCDEF*, *abcdef*, werden durch gleichnahmige Diagonallinien *AC* und *ac*, *AD* und *ad*, u. ſ. f. in ähnliche Dreyecke getheilt.

Beweis. Daß ABC $\sim abc$ ſey, folgt aus dem 176. §., weil B $= b$ iſt, und AB : BC $= ab : bc$. (148. §.) Man rechne dieſe Dreyecke von beyden Figuren ab, ſo bleiben ACDEF, *acdef*, auch noch ähnliche Figuren. Denn es iſt BCD $= bcd$, und BCA $= bca$, alſo BCD − BCA $= bcd - bca$, mithin ACD $= acd$. Ueberdem iſt auch AC : ac $=$ BC : bc $=$ CD : cd. Daraus folgt ferner, wie vorhin,

vorhin, daß auch das Dreyeck ADC dem Dreyeck *acd* ähnlich ſey, und man kann eben ſo für jedes folgende von den Dreyecken ſchlieſſen, worin ſich die Figuren durch die Diagonallinien theilen laſſen.

Der 1. Zuſatz.

184. In ähnlichen Figuren verhält ſich jedes Paar ähnlich liegender Diagonallinien, wie ſich zwo gleichnahmige Seiten verhalten.

Der 2. Zuſatz.

185. Die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren verhalten ſich, wie jedes Paar gleichnahmiger Seiten, oder Diagonallinien. Es iſt nemlich 49 F.

$$AB : ab = AB : ab = AC : ac$$
$$BC : bc = AB : ab = AC : ac$$
$$CD : cd = AB : ab = AC : ac \text{ u. ſ. f.}$$

alſo $AB + BC + CD : ab + bc + cd = AB : ab = AC : ac$. Man kann hier jedesmahl noch die beyden folgenden Seiten DE, *de*, zu den vorigen Summen addiren, bis man ſie alle hat, alſo bleiben auch die ganzen Peripherien in demſelben Verhältniß.

Der 3. Zuſatz.

186. Wenn die Figuren ABEFGH, *abefgh*, ähnliche reguläre Polygone, CA, CB, *ca*, *cb*, ihre gröſten Halbmeſſer, CD, *cd*, ihre kleinſten Halbmeſſer ſind; ſo ſind die Dreyecke ACB, *acb*, auch ACD, *acd*, einander ähnlich. Demnach iſt $AB : ab = AC : ac = CD : cd$, und daraus folgt, daß die Peripherien der ähnlichen regulären Polygone ſich wie ihre gröſten oder kleinſten Halbmeſſer verhalten. 50 F.

Die 9. Aufgabe.

187. Es iſt eine Zahl gegeben, die auch nur um etwas ſehr weniges gröſſer als 1 iſt: man ſoll in und um den Kreis ein Paar ähnliche

liche reguläre Polygone von ſovielen Seiten verzeichnen, daß der Exponent des Verhältniſſes der Peripherie des äuſſern gegen die Peripherie des innern Polygons noch kleiner als jene Zahl wird.

51 F. Beweis. Um den Mittelpunct C ſey mit dem Halbmeſſer CF ein Kreis beſchrieben, und überdem bezeichne *m* eine Zahl, die gröſſer als 1 iſt. Man verlängere CF, nehme $CG = m \cdot CF$, und ziehe durch G eine grade Linie, die den Kreis in H berührt: (137. §.) ſo iſt HF ein Kreisbogen von beſtimmter Gröſſe. Nun kann man die Peripherie des Kreiſes anfangs in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile eintheilen, und hiernächſt jeden Theil ſo lange halbiren, bis man auf einen Bogen wie HA kommt, der kleiner als HF iſt. Man nehme $HB = HA$, ſo iſt auch der Bogen AB ein aliquoter Theil der Peripherie, wenn man den Kreis in eine grade Anzahl gleicher Bogen getheilt hat, und die Sehne AB iſt die Seite des verlangten innern Polygons. Endlich verlängere man CA und CB bis an die durch H gezogene Tangente in D und E; ſo iſt DE die Seite des äuſſern Polygons.

Beweis. Es ſey P die Peripherie des äuſſern, *p* die Peripherie des innern Polygons, ſo iſt $\frac{P}{p} = \frac{CD}{CA}$. (186. §.) Ueberdem iſt $CD < CG$, (85. §.) und $CA = CF$, alſo $\frac{CD}{CA} < \frac{CG}{CF}$.

Weiter iſt $\frac{CG}{CF} = m$: alſo $\frac{CD}{CA} < m$, mithin auch $\frac{P}{p} < m$.

Der

Der 1. Zuſatz.

188. Wenn n eine ſehr groſſe Zahl, und R den Halbmeſſer des Kreiſes bezeichnet, ſo iſt $\frac{1}{n}R$ ein ſehr kleiner Theil des Halbmeſſers. Man mag aber die Zahl n ſo groß annehmen als man will; ſo kann man doch in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von ſovielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz ihrer Peripherien kleiner, als $\frac{1}{n}R$ wird. Denn es ſey Kürze halber $\frac{1}{n}R = r$, und L eine Linie, die gröſſer als die Peripherie des Kreiſes iſt: ſo iſt $\frac{r}{L}$ ein ſehr kleiner Bruch, und $1 + \frac{r}{L}$ eine Zahl, welche ſehr wenig gröſſer, als Eins iſt. Man gebe den Polygonen ſoviele Seiten, daß $\frac{P}{p} < 1 + \frac{r}{L}$ werde. Wenn alsdenn $P = p + d$ iſt, ſo hat man $\frac{p+d}{p}$, oder $1 + \frac{d}{p} < 1 + \frac{r}{L}$: mithin $\frac{d}{p} < \frac{r}{L}$, und $d < \frac{p}{L} . r$. Es iſt aber $\frac{p}{L}$ ein ächter Bruch, alſo $\frac{p}{L} . r < r$, mithin $d < r$, oder $d < \frac{1}{n}R$.

Der 2. Zuſatz.

189. Wenn δ die Differenz bezeichnet, um welche die Peripherie des Kreiſes von der Peripherie des

des innern oder äuſſern Polygons verſchieden iſt: ſo iſt $\delta < d$, alſo auch $\delta < \frac{1}{n}R$, wenn $d < \frac{1}{n}R$ iſt. Demnach kann man in oder um den Kreis ein reguläres Polygon von ſovielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz zwiſchen der Peripherie des Kreiſes und des Polygons kleiner wird, als jeder gegebene noch ſo kleine Theil des Halbmeſſers.

Der 3. Zuſatz.

190. Wenn eine Linie L kleiner als die Peripherie des Kreiſes iſt, ſo giebt es im Kreiſe ein reguläres Polygon, deſſen Peripherie p gröſſer als dieſe Linie iſt. Denn es ſey Π die Peripherie des Cirkels, und $\Pi = L + d$. Aber auch $\Pi = p + \delta$, und das Polygon kann ſoviele Seiten erhalten, daß $\delta < d$ wird. Weil nun $p + \delta = L + d$ bleibt, ſo iſt alsdenn $p > L$.

Der 4. Zuſatz.

191. Wenn dagegen eine Linie L die Peripherie des Kreiſes übertrift, ſo giebt es um den Kreis ein äuſſeres reguläres Polygon, deſſen Peripherie kleiner als L iſt. Wenn nemlich nun $L = \Pi + d$ iſt, und $P = \Pi + \delta$, ſo kann das Polygon ſoviele Seiten erhalten, daß $\delta < d$ iſt, und alsdenn iſt zugleich $P < L$.

Der 5. Zuſatz.

192. Eine Linie l, die gröſſer, als die Peripherie eines jeden innern, und kleiner, als die Peripherie eines jeden äuſſern Polygons iſt, muß der Peripherie Π des Kreiſes gleich ſeyn. Denn wenn ſie gröſſer wäre, ſo gäbe es noch ein äuſſeres Polygon, deſſen Peripherie kleiner wäre. (191. §.) Wenn

dagegen

dagegen $l < \Pi$ wäre, ſo gäbe es noch ein inneres Polygon, deſſen Peripherie gröſſer als l wäre: (190. §.) alſo iſt $l = \Pi$.

Der 33. Lehrſatz.

193. **Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmeſſer iſt in allen Kreiſen einerley.**

Beweis. Wenn P und R die Peripherie und den Halbmeſſer des einen Kreiſes, p und r die Peripherie und den Halbmeſſer eines andern Kreiſes bezeichnen; ſo iſt $\frac{r . P}{R}$ die vierte Proportionallinie zu R, r, und P. Man ſetze $\frac{r . P}{R} = l$: ſo iſt l gröſſer als jedes innere, und kleiner als jedes äuſſere von den regulären Polygonen, die zum Kreiſe p gehören, wovon r der Halbmeſſer iſt.

Man verzeichne nemlich im Kreiſe p ein reguläres Polygon von ſovielen Seiten, als man will, und im Kreiſe P ein ähnliches Polygon. Des erſten Peripherie ſey $= \pi$, des letzten $= \Pi$, ſo iſt $R : r = \Pi : \pi$. Aber auch $R : r = P : l$; alſo $\Pi : \pi = P : l$. Weil überdem $P > \Pi$ iſt, ſo muß $l > \pi$ ſeyn.

Man verzeichne weiter um den Kreis p ein reguläres Polygon von ſovielen Seiten als man will, und um den Kreis P ein dem vorigen ähnliches Polygon. Des erſten Peripherie ſey q, des letzten Q; ſo iſt $R : r = Q : q$, und zugleich $R : r = P : l$. Daraus folgt $Q : q = P : l$, und es iſt allemahl $P < Q$, alſo auch $l < q$.

Dieſemnach muß $l = p$ ſeyn, (192. §.) und man erhält $R : r = P : p$, oder $P : p = R : r$, mithin auch

P : p = 2R : 2r, oder P : 2R = p : 2r, da dann 2R und 2r die Durchmeſſer ſind.

Der 34. Lehrſatz.

52 F. 194. Die Flächen gleich hoher Dreyecke *ABC*, *ABD*, oder auch gleich hoher Parallelogramme, verhalten ſich wie ihre Grundlinien *BC* zu *BD*.

Beweis. Man theile BD in ſoviele gleiche Theile, als man will bey E, F, u. ſ. f. und ziehe auch die Theilungslinien BE, BF, u. ſ. f. Alsdenn ſind BE und ABE ähnliche aliquote Theile von BD und ABD, und dieſe ſind in BC und ABC gleichvielmahl enthalten: mithin iſt ABC : ABD = BC : BD. Weil übrigens jedes Parallelogramm doppelt ſo groß als ein Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe iſt; ſo gilt der Satz auch für Parallelogramme.

Der 35. Lehrſatz.

53 F. 195. Dreyecke *ABC*, *DBC*, oder auch Parallelogramme, auf gleicher Grundlinie verhalten ſich wie ihre Höhen *BE* : *CF*.

Beweis. Wenn AE und DF mit BC parallel, BE und CF aber auf BC ſenkrecht ſind; ſo ſind dies zugleich die Höhen der Dreyecke. Man ziehe noch CE und BF, ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke EBC, FBC, eine gleiche Höhe BC, wenn man BE, CF, für die Grundlinien annimmt, und es iſt EBC : FBC = BE : CF, (194. §.) alſo auch ABC : DBC = BE : CF. (122. §.) Auf Parallelogramme wird die Anwendung, wie im vor. §. gemacht.

Die 31. Erklärung.

196. In zweyen oder mehrern Proportionen dieſer Art:

A : B

$$A : B = M : N$$
$$B : C = O : P$$
$$C : D = Q : R$$

iſt das Verhältniß A : C zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen A : B und B : C, oder den eben ſo groſſen Verhältniſſen M : N und O : P; das Verhältniß A : D iſt zuſammengeſetzt aus den dreyen Verhältniſſen A : B, B : C, C : D, oder den eben ſo groſſen Verhältniſſen M : N, O : P, Q : R, und dieſe letztern Verhältniſſe ſiehet man als einfache an. Im Schreiben wird das ſo ausgedrückt

$$A : D = \begin{cases} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{cases}$$

In dem Fall, wenn dieſe einfachen Verhältniſſe alle gleich groß ſind, heißt das daraus zuſammengeſetzte auch ein vervielfachtes Verhältniß, (ratio multiplicata) und zwar insbeſondre ein verdoppeltes, oder verdreyfachtes Verhältniß (ratio duplicata, triplicata) nachdem das einfache zweymahl oder dreymahl in dem zuſammengeſetzten enthalten iſt.

Der 36. Lehrſatz.

197. Wenn man alle vorhergehende und alle nachfolgende Glieder mehrerer Verhältniſſe in einander multiplicirt; ſo iſt das Verhältniß der Producte zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen der Factoren.

Beweis. Es ſey

$$M : N = A : B$$
$$O : P = B : C;$$

ſo hat man $B = \frac{N}{M} . A$ (98. §. R.) und $C = \frac{P}{O} . B$, alſo auch $C = \frac{P}{O} . \frac{N}{M} . A$, und man erhält $\frac{C}{A} = \frac{P . N}{O . M}$, oder $A : C = O . M : P . N.$

Wäre ferner $Q : R = C : D$, ſo wäre das Verhältniß $A : D$ aus den Verhältniſſen $O . M : P . N$ und $Q : R$ zuſammengeſetzt: alſo vermöge des ſchon bewieſenen $A : D = M . O . Q : N . P . R.$ So gilt der Schluß für jede Anzahl einfacher Verhältniſſe auf die nächſtfolgende um Eins gröſſere Anzahl.

Zuſatz.

198. Verhältniſſe, die man aus einer gleichen Anzahl gleicher Verhältniſſe zuſammenſetzt, ſind ebenfalls gleiche Verhältniſſe.

Der 37. Lehrſatz.

54 F. 199. Das Verhältniß zweyer Dreyecke *ABC*, *DEF*, oder auch zweyer Parallelogramme, iſt aus den Verhältniſſen ihrer Grundlinien *BC : EF*, und Höhen *AG : DH*, zuſammengeſetzt.

Beweis. Man ſetze CK auf BC ſenkrecht, mache CK = DH, und ziehe BK, ſo iſt

Dr. ABC : Dr. BKC = AG : CK (195. §.)
Dr. BKC : Dr. DEF = BC : EF, (194. §.)

folglich Dr. ABC : Dr. DEF $= \left\{ \begin{matrix} AG : CK \\ BC : EF \end{matrix} \right\}$, (196. §.)

oder ABC : DEF $= \left\{ \begin{matrix} AG : DH \\ BC : EF \end{matrix} \right\}$. Parallelogramme

ver-

verhalten ſich, wie Dreyecke, die mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben.

Der 1. Zuſatz.

200. Dreyecke und Parallelogramme verhalten ſich, wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen: (197. §.) Das Verhältniß zweyer Quadrate iſt demnach doppelt ſo groß, als das Verhältniß ihrer Seiten. (196. §.)

Der 2. Zuſatz.

201. Zwey Dreyecke, oder zwey Parallelogramme ſind gleich groß, wenn ſich ihre Grundlinien umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Der 3. Zuſatz.

202. Ein Quadrat iſt ſo groß als ein Rechteck, wenn die Seite des Quadrats zwiſchen den Seiten des Rechtecks die mittlere Proportionallinie iſt.

Der 38. Lehrſatz.

203. Wenn in ähnlichen Dreyecken *ABC*, 46 F. *DEF*, zwo gleichnahmige Seiten *BC*, *EF*, für die Grundlinien genommen werden; ſo verhalten ſich die Höhen *AM*, *DN*, wie die Grundlinien.

Beweis. Die Dreyecke ABM und DEN ſind einander ähnlich, (175. §.) alſo iſt AM : DN = AB : DE, und AB : DE = BC : EF, (148. §.) folglich auch AM : DN = BC : EF.

Der 1. Zuſatz.

204. Es iſt Dr. ABC : Dr. DEF $=\left\{\begin{array}{l}BC : EF\\AM : DN\end{array}\right\}$,

(198. §.) alſo auch ABC : DEF $=\left\{\begin{array}{l}BC : EF\\BC : EF\end{array}\right\}$, oder das Verhältniß ähnlicher Dreyecke gegen einander

iſt einerley mit dem verdoppelten Verhältniſſe ihrer gleichnahmigen Seitenlinien.

Der 2. Zuſatz.

205. Alſo verhalten ſich ähnliche Dreyecke auch wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten. (200. §.) Weil ferner ähnliche Figuren in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreyecke getheilt werden können, (183. §.) ſo verhalten ſich ähnliche gradlinichte Figuren überhaupt, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten. (166. §.)

Der 3. Zuſatz.

50 F. 206. Aehnliche reguläre Polygone AEFGHB, *aefghb*, verhalten ſich wie die Quadrate ihrer größten oder kleinſten Halbmeſſer. Denn es iſt AB : *ab* = AC : *ac* = CD : *cd*.

Die 32. Erklärung.

207. Ein Quadrat, wovon die Seite ſo lang iſt, als eins der bekanuten Längenmaaſſe, (49. §.) erhält davon den Nahmen. Es heißt eine **Quadratruthe**, ein **Quadratfuß**, ein **Quadratzoll**, eine **Quadratlinie**, ein **Quadratſcrupel**, nachdem die Seitenlinie die Länge einer Ruthe hat, oder eines Fuſſes, eines Zolles, einer Linie, eines Scrupels im Längenmaaß.

Die 10. Aufgabe.

208. **Die Gröſſe der Fläche eines Parallelogramms im Quadratmaaß zu finden, wenn man Grundlinie und Höhe im Längenmaaſſe meſſen kann.**

Aufl. Man muß Grundlinie und Höhe mit einerley Längenmaaß meſſen, damit die Zahlen, welche ihre Länge angeben, einerley Nahmen erhalten. Hiernächſt multiplicirt man dieſe beyden Zahlen in einander, ſo giebt das Product die Gröſſe der

Fläche

Fläche im Quadratmaaß an, das mit demjenigen Längenmaaß einerley Nahmen hat, womit Grundlinie und Höhe ſind gemeſſen worden.

Beweis. Es ſey Q das Quadratmaaß, und L die Seite deſſelben; des Parallelogramms P = ABCD Grundlinie AB, die Höhe CE: ſo iſt P : Q = AB . CE : L . L. (200. §.) Hier iſt aber L = 1, alſo P : Q = AB . CE : 1, und es iſt Q in der Fläche P ſovielmahl enthalten, als die Zahl AB . CE angiebt. 55 F.

Exempel. Es ſey AB = 39,36 Ruth. CE = 54,78 Ruthen, ſo iſt P = 2156,1408 Qu. Ruth.

Der 1. Zuſatz.

209. Die Gröſſe der Fläche eines Quadrats wird im Quadratmaaß gefunden, wenn man die Zahl, welche die Gröſſe der Seitenlinie im Längenmaaß ausdrückt, mit ſich ſelbſt multiplicirt.

Der 2. Zuſatz.

210. Wenn man Duodecimalmaaß braucht, (49. §.) ſo enthält ein Quadratfuß 144 Quadratzoll, und ſo jedes gröſſere Quadratmaaß 144 Quadratmaaſſe des nächſtkleinern Nahmens. Wird aber Decimalmaaß gebraucht, ſo faſſet jedes gröſſere Quadratmaaß 100 Quadratmaaſſe des nächſtkleinern Nahmens.

Der 3. Zuſatz.

211. Das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe giebt den Flächeninhalt eines Dreyecks im Quadratmaaß. (123. §.) Weil ferner jede gradlinichte Figur durch Diagonallinien in Dreyecke getheilt werden kann, ſo wird ihr Flächeninhalt gefunden, wenn der Inhalt eines jeden dieſer Dreyecke für ſich geſucht, und hiernächſt alles zuſammen addirt wird.

Der 4. Zuſatz.

212. Den Flächeninhalt eines regulären Polygons giebt das halbe Product aus der Peripherie des Polygons in den kleinſten Halbmeſſer. (147. §.)

Die 11. Aufgabe.

213. Es iſt, wie im 187. §., eine Zahl m gegeben, welche um etwas ſehr weniges gröſſer als Eins iſt; man ſoll in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von ſo vielen Seiten verzeichnen, daß der Exponent des Verhältniſſes der Fläche des äuſſern gegen die Fläche des innern Polygons kleiner wird, als jene gegebene Zahl.

51 F. Aufl. Man nehme auf dem verlängerten Halbmeſſer CF das Stück $CG = CF\sqrt{m}$, ſo hat man $\frac{CG^q}{CF^q} = m$, und man kann die regulären Polygone ſo wie im 187 §. verzeichnen. Wenn alsdenn Q und q die Flächen des äuſſern und innern Polygons bezeichnen; ſo iſt $\frac{Q}{q} = \frac{CD^q}{CA^q}$. (206. §.) Aber CD $<$ CG, alſo $\frac{CD^q}{CA^q} < \frac{CG^q}{CF^q}$, oder $\frac{CD^q}{CA^q} < m$; folglich auch $\frac{Q}{q} < m$.

Der

Der 1. Zuſatz.

214. Wenn R den Halbmeſſer des Kreiſes, und n eine ſehr groſſe Zahl bezeichnet, alſo $\frac{1}{n}R^q$ ein ſehr kleiner Theil vom Quadrat des Halbmeſſers iſt; ſo kann man in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von ſovielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz ihrer Flächen kleiner als $\frac{1}{n}R^q$ ausfällt. Kürze halber ſetze man $\frac{1}{n}R^q = r^q$, und L^q bezeichne eine Fläche, die gröſſer, als die Kreisfläche iſt: ſo iſt $\frac{r^q}{L^q}$ ein ſehr kleiner Bruch. Man gebe den Polygonen ſoviele Seiten, daß $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{r^q}{L^q}$ werde. (213. §.) Wenn alsdenn $Q = q + d$ iſt, ſo hat man $\frac{q+d}{q}$ oder $1 + \frac{d}{q} < 1 + \frac{r^q}{L^q}$, alſo $\frac{d}{q} < \frac{r^q}{L^q}$, und $d < \frac{r^q \cdot q}{L^q}$. Weil nun $\frac{q}{L^q}$ ein ächter Bruch iſt; ſo iſt $\frac{r^q \cdot q}{L^q} < r^q$, mithin auch $d < r^q$.

Der 2. Zuſatz.

215. Es bezeichne δ die Differenz, um welche die Kreisfläche von der Fläche des innern oder äuſ-

ſern Polygons verſchieden iſt: ſo iſt $\delta < d$, alſo auch $\delta < \frac{1}{n}R^q$, wenn $d < \frac{1}{n}R^q$ iſt. Demnach kann die Differenz zwiſchen der Kreisfläche und der Fläche des innern oder äuſſern Polygons kleiner werden, als jeder gegebene noch ſo kleine Theil vom Quadrat des Halbmeſſers.

Der 3. Zuſatz.

216. Wenn die Fläche einer Figur kleiner als die Kreisfläche iſt, ſo giebt es im Kreiſe ein reguläres Polygon, deſſen Fläche gröſſer als die erwehnte Figur iſt. Die Fläche der Figur ſey $= A$, die Kreisfläche $= C$, und $C = A + d$. Man verzeichne im Kreiſe ein reguläres Polygon von ſovielen Seiten, daß die Differenz deſſelben vom Kreiſe kleiner als d wird. Iſt alsdenn des Polygons Fläche $= q$, die Differenz vom Kreiſe $= \delta$, ſo hat man auch $C = q + \delta$, mithin $q + \delta = A + d$. Weil aber nun $d < \delta$ iſt, ſo erhält man $q > A$.

Der 4. Zuſatz.

217. Wenn dagegen die Fläche einer Figur gröſſer als die Kreisfläche iſt; ſo giebt es ein äuſſeres um den Kreis beſchriebenes Polygon, das kleiner als dieſe Figur iſt. Setzt man wiederum die Fläche der Figur $= A$, ihre Differenz vom Kreiſe $= d$, ſo iſt nun $A = C + d$. Man gebe dem äuſſern Polygon ſoviele Seiten, daß die Differenz δ deſſelben vom Kreiſe kleiner als d werde. Iſt alsdenn die Fläche des Polygons $= Q$, ſo hat man auch $Q = C + \delta$, folglich $Q < A$, weil $\delta < d$ iſt.

Der 5. Zuſatz.

218. Eine Figur, die gröſſer als jedes innere, und kleiner als jedes äuſſere Polygon iſt, muß dem

Kreiſe

Kreiſe gleich ſeyn. Denn wenn ſie gröſſer als der Kreis wäre, ſo gäbe es noch ein kleineres äuſſeres Polygon: (212. §.) wenn ſie kleiner als der Kreis wäre, ſo gäbe es noch ein inneres gröſſeres Polygon. (216. §.) Beydes iſt der Vorausſetzung entgegen.

Der 39. Lehrſatz.

219. Die Kreisfläche iſt einem Dreyeck gleich, wovon die Grundfläche der Peripherie des Kreiſes, und die Höhe dem Halbmeſſer gleich iſt.

Beweis. Wenn die Peripherie des Kreiſes $= p$, der Halbmeſſer $= r$ geſetzt wird, ſo iſt das erwehnte Dreyeck $= \frac{1}{2}pr$, und daſſelbe iſt gröſſer als jedes innere, aber kleiner als jedes äuſſere zu dem Kreiſe gehörige reguläre Polygon. Die Peripherie des innern Polygons ſey $= \pi$, der kleinſte Halbmeſſer $= \varrho$, ſo iſt das Polygon $= \frac{1}{2}\pi\varrho$. Aber $p > \pi$, und $r > \varrho$, alſo $\frac{1}{2}pr > \frac{1}{2}\pi\varrho$, wieviele Seiten man auch dem Polygon geben will. Die Peripherie des äuſſern Polygons ſey $=$ P, ſo iſt der kleinſte Halbmeſſer $= r$, und des äuſſern Polygons Fläche $= \frac{1}{2}P . r$. Weil nun allemahl $p < P$ iſt, ſo hat man $\frac{1}{2}p . r < \frac{1}{2}P . r$, das Polygon mag ſoviele Seiten haben, als man will. Demnach iſt das Dreyeck, deſſen Inhalt $= \frac{1}{2}pr$ iſt, der Kreisfläche gleich. (218. §.)

Der 40. Lehrſatz.

220. Jeder Kreisausſchnitt *ACBG* verhält ſich zur ganzen Kreisfläche, wie der Bogen *AGB* des Sectors zur ganzen Peripherie. 56 F.

Beweis. Wenn man die Peripherie des Kreiſes in gleiche Bogen theilet, und die Theilungshalbmeſſer CE, CF, CG, u. ſ. f. ziehet; ſo ſind der Sector

ACE

ACE und der Bogen AE ähnliche aliquote Theile der Kreisfläche, und der Peripherie. Der Sector ACE iſt im Ausſchnitt ACBG ſovielmahl enthalten, als der Bogen AE im Bogen AGB: folglich verhält ſich der Ausſchnitt ACBG : Kreisfläche = Bogen AGB : Peripherie.

Zuſatz.

221. Wenn die Länge des Bogens AGB = a, die Peripherie des Kreiſes = p, die Kreisfläche = C, der Sector ACBG = S geſetzt wird; ſo iſt $p : a$ = C : S, und C = $\frac{1}{2}pr$, (219. §.) alſo $p : a$ = $\frac{1}{2}pr$: S. Daraus folgt S = $\frac{1}{2}a \cdot r$, (98. §. Rech.) mithin iſt der Ausſchnitt einem Dreyeck gleich, deſſen Grundlinie dem Bogen des Sectors, die Höhe aber dem Halbmeſſer gleich iſt.

Die 33. Erklärung.

222. Eine Figur quadriren heißt ein Quadrat verzeichnen, das der gegebenen Figur gleich iſt.

Der 1. Zuſatz.

223. Wenn ein Rechteck gegeben iſt, ſo ſucht man nach dem 182 §. zwiſchen den Seiten deſſelben eine mittlere Proportionallinie: dieſe iſt die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrats. (202. §.)

Der 2. Zuſatz.

224. Wenn die gegebene Figur ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm, oder ein Dreyeck iſt, ſo zeichnet man leicht ein eben ſo groſſes Rechteck, im erſten Fall mit dem Parallelogramm auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe, im letzten Fall auf einer halb ſo groſſen Grundlinie, als das Dreyeck hat, in eben der Höhe. Dies Rechteck quadrirt man, wie vorhin gewieſen iſt, ſo iſt auch das ſchiefwinklichte Parallelogramm, oder das Dreyeck, quadrirt.

Der

Der 3. Zuſatz.

225. Statt eines gegebenen regulären Polygons quadrirt man das eben ſo groſſe Dreyeck. (147. §.) Wenn ein Kreis gegeben wäre, oder ein Kreisausſchnitt; ſo könnte man das demſelben gleiche Dreyeck (219. 221. §.) eben ſo, mithin auch den Kreis quadriren: nur müſte man eine grade Linie finden können, die der ganzen Peripherie des Kreiſes, oder im Fall es ein Ausſchnitt iſt, dem Bogen des Ausſchnitts gleich wäre.

Die 12. Aufgabe.

226. Die Länge zwoer Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks iſt im bekannten Maaß gegeben: man ſoll die Länge der dritten Seite durch Rechnung finden.

Aufl. Wenn a die eine, b die andre Perpendiculärſeite, und h die Hypothenuſe bezeichnet; ſo iſt $h^q = a^q + b^q$, und $a^q = h^q - b^q$. (125. §.) Daraus findet man $h = \sqrt{(a^q + b^q)}$ und $a = \sqrt{(h^q - b^q)}$, oder auch $b = \sqrt{(h^q - a^q)}$.

Die 13. Aufgabe.

227. Die Länge der Seite *AB* eines regulären Polygons und der gröſte Halbmeſſer *CA* ſind gegeben: man ſoll den kleinſten Halbmeſſer *CK* finden. 51 F.

Aufl. Weil CK auf AB ſenkrecht iſt, ſo iſt AK $= \frac{1}{2}$AB, und man findet im rechtwinklichten Dreyeck ACK die Seite CK $= \sqrt{(CA^q - \frac{1}{4}AB^q)}$.

Der 1. Zuſatz.

228. Wenn die Länge der Peripherie des innern im Kreiſe beſchriebenen regulären Polygons bekannt

iſt,

iſt, ſo dient dieſe Aufgabe nicht allein, den Inhalt des Polygons zu finden, (212. §.) ſondern auch die Peripherie des ähnlichen äuſſern Polygons: denn es iſt CK : CA = die Peripherie des innern zur Peripherie des äuſſern Polygons. (186. §.)

Der 2. Zuſatz.

229. Die Sehne AH iſt die Seite eines in eben dem Kreiſe beſchriebenen regulären Polygons von doppelt ſovielen Seiten. Hat man CK ſchon gefunden, ſo wird auch HK = CH — CK leicht gefunden, und daraus ferner $AH = \sqrt{(AK^q + HK^q)}$.

Die 14. Aufgabe.

230. **Die Länge der Peripherie des Kreiſes für den Halbmeſſer = 1 ſo genau zu finden, daß der Fehler kleiner ſey, als ein gegebener Bruch ſo klein man will.**

Aufl. Die Peripherie des im Kreiſe beſchriebenen Sechsecks iſt = 6, wenn der Halbmeſſer = 1 iſt, und der kleinſte Halbmeſſer $= \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,86602535$. Setzt man hiernächſt an: 0,86602535 : 1 = 6 : Peripherie des äuſſern Sechseckes; ſo findet man dieſe = 6,9282038. Das ſind zugleich ein Paar Gränzen, zwiſchen welchen die Peripherie des Kreiſes enthalten iſt, und man weis nun, daß ſie zwar mehr als 6mahl, aber gewiß nicht völlig 7mahl gröſſer als der Halbmeſſer ſey.

Aus dieſen Zahlen findet man ferner dem 228. und 229. §. gemäß die Seite, mithin auch den kleinſten Halbmeſſer des innern regulären Zwölfecks. Hiernächſt kann ferner die Seite und der kleinſte Halbmeſſer des im Kreiſe beſchriebenen regulären

Vier-

Vierundzwanzigecks gefunden, und dies Verfahren, ſo lange man es nöthig findet, fortgeſetzt werden.

Der gröſte Halbmeſſer des äuſſern Polygons, worauf man zuletzt gekommen iſt, ſey $= \varrho$, und der gegebene Bruch $= \frac{1}{n}$: ſo iſt hier $\frac{P}{p} = \varrho$, wenn P und p die Peripherien des äuſſern und innern Polygons bezeichnen, und des Kreiſes Halbmeſſer = 1 angenommen iſt. (186. §.) Weil nun eine Linie, die 7mahl gröſſer als der Halbmeſſer iſt, die Peripherie des Kreiſes ſchon übertrift, ſo wird erfodert, daß $\frac{P}{p}$, oder $\varrho < 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$ ſey, wenn die Peripherie des Polygons von der Peripherie des Kreiſes nicht um den Bruch $\frac{1}{n}$ mehr unterſchieden ſeyn ſoll. (188. 189. §.) Demnach muß man die Rechnung ſo lange fortſetzen, bis dieſer Bedingung ein Genüge geſchehen iſt.

Der 1. Zuſatz.

231. Wenn der Fehler weniger als $\frac{1}{10000}$ betragen ſoll, ſo muß ϱ kleiner ſeyn, als $1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10000}$, oder kleiner als 1,0000142857. Es ſey die Peripherie des Kreiſes $= \Pi$: ſo muß man die Sehnen folgender Bogen ſuchen:

	Zahl ihrer Grade
$\frac{1}{6}\Pi$	60°
$\frac{1}{12}\Pi$	30°
$\frac{1}{24}\Pi$	15°
$\frac{1}{48}\Pi$	7° 30′
$\frac{1}{96}\Pi$	3° 45′
$\frac{1}{192}\Pi$	1° $52\frac{1}{2}$′
$\frac{1}{384}\Pi$	0° $56\frac{1}{4}$′
$\frac{1}{768}\Pi$	0° $28\frac{1}{8}$′

Die Sehne des letzten Bogens von $28\frac{1}{8}'$, alſo die Seite des innern regulären Polygons von 768 Seiten, findet man = 0,0081811, ihre Entfernung vom Mittelpunct = 0,9999916, alſo den gröſten Halbmeſſer des ähnlichen äuſſern Polygons $= \frac{1}{0,9999916} = 1,0000084$. Weil dieſe Zahl kleiner iſt, als die vorhin gefundene 1,0000142, ſo iſt man verſichert, daß die Peripherie des innern regulären Polygons, wenn es 768 Seiten hat, nicht um $\frac{1}{10000}$ von der Peripherie des Kreiſes verſchieden ſey. Es war aber die Polygonſeite =

```
                          0,0081811
dieſe multiplicirt mit          768
                      -------------
                             654488
                            490866
                           572677
                      -------------
die Peripherie            6,2830848
```

Man multiplicire dieſe Zahl mit 0,0000084, ſo findet man 0,0000527 . . . als den Ueberſchuß der Peripherie des äuſſern Polygons über die Peripherie des innern. Weil nun dieſer noch nicht

0,0001

0,0001 ausmacht; ſo muß noch um ſo mehr die Differenz der Peripherie des Kreiſes von der Peripherie des innern Polygons kleiner ſeyn, als 0,0001. Demnach iſt für den Halbmeſſer = 1

die Peripherie = 6,2830

die halbe Peripherie = 3,1415.

Der 2. Zuſatz.

232. Rechnet man auf dieſem Wege weiter fort, ſo findet man für den Halbmeſſer = 1 die halbe Peripherie, oder welches einerley iſt, für den Durchmeſſer = 1 die ganze Peripherie =

3,141592 653589 793238 462643 383879 50.

(M. ſ. *Ludolphi a Ceulen* de circulo et adſcriptis liber e vernaculo lat. verſ. a Willebrordo Snellio, Lugd. Bat. 1619. Lib. III. p. 92. Zetem. 2.) Statt dieſes ſehr mühſamen Weges, die Rechnung zu führen, lehrt die höhere Mathematik weit kürzere Methoden, wodurch eben die Zahl gefunden wird. Eben dieſe Zahl iſt zugleich der Exponent des Verhältniſſes der Peripherie zum Durchmeſſer des Kreiſes.

Der 3. Zuſatz.

233. Man ſetze ein für allemahl dieſe eben' erwehnte Zahl = π, und behalte ſich vor, nachdem mehr oder weniger Schärfe bey der Rechnung nöthig iſt, auch mehr oder weniger Decimaltheile davon mit in Rechnung zu bringen; ſo kann man ungemein leicht alle bey der Kreismeſſung vorkommende Fälle überſehen. Es bezeichne wie oben p die Peripherie, r den halben, d den ganzen Durchmeſſer; ſo iſt nun $\frac{p}{d} = \pi$, oder auch $\frac{\frac{1}{2}p}{r} = \frac{p}{2r} = \pi$: mithin $p = \pi d$, oder $p = 2\pi r$. Archimedes hat ſchon für das Verhältniß $p : d = \pi : 1$ die Gränzen

$22:7$ und $21\frac{70}{71}:7$, oder $3\frac{1}{7}:1$ und $3\frac{10}{71}:1$ angegeben. (Dimenſio circuli Pr. III. Theor. III.) Metii Zahlen $355:113$ kommen dem Verhältniß $\pi:1$ ſoweit nahe, daß der Quotiente $\frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$ bis auf die ſechſte Decimalſtelle mit der Zahl π zuſammen trift.

Der 4. Zuſatz.

234. Wenn die Länge der Peripherie gegeben wäre, und der ganze oder halbe Durchmeſſer geſucht werden ſollte; ſo hätte man $d = \frac{1}{\pi}p$, und $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}p$, da dann

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309\ 886183\ 790671\ 537767\ 926$$

gefunden wird. Man nimmt davon ſoviele Decimaltheile, als die jedesmahl nöthige Schärfe der Rechnung erfodert.

Der 5. Zuſatz.

235. Aus der Zahl der Grade, Minuten und Secunden, die ein Kreisbogen faſſet, kann ſeine Länge im bekannten Längenmaaſſe gefunden werden, wenn entweder die Länge der Peripherie ſchon bekannt iſt, oder doch ſtatt deſſen die Länge des ganzen oder halben Durchmeſſers, woraus die Länge der Peripherie gefunden werden kann. Weil nemlich die ganze Peripherie 360° faſſet; ſo ſetzt man an 360° : Zahl der Grade des Bogens = die Länge der Peripherie : Länge des Bogens.

Die 15. Aufgabe.

236. **Die Gröſſe der Fläche eines Kreiſes im Quadratmaaß zu finden, wenn der ganze oder halbe Durchmeſſer gegeben iſt.**

Aufl.

Aufl. 1) Man kann zuerſt die Länge der Peripherie, und hiernächſt dem 219. §. gemäß das halbe Product aus der Peripherie in den Halmeſſer, oder den vierten Theil des Products aus der Peripherie in den Durchmeſſer ſuchen: ſo hat man die Fläche des Kreiſes im Quadratmaaß, das mit dem Längenmaaß einerley Nahmen hat, womit der halbe oder ganze Durchmeſſer iſt gemeſſen worden.

2) Setzt man die Kreisfläche = C, ſo iſt C = $\frac{1}{2}pr$, oder $\frac{1}{4}pd$, weil $d = \frac{1}{2}r$ iſt. Ueberdem hat man $p = \pi d = 2\pi r$, (233. §.) alſo auch C = $\frac{1}{4}\pi dd$, oder C = πrr: mithin verhält ſich die Kreisfläche C : Quadrat des Durchmeſſers $dd = \frac{1}{4}\pi : 1$, und eben die Kreisfläche C : Quadrat des Halbmeſſers $rr = \pi : 1$.

Der 1. Zuſatz.

237. Die Flächen ungleicher Kreiſe verhalten ſich wie die Quadrate ihrer ganzen oder halben Durchmeſſer. Wenn nemlich K die Fläche eines andern Kreiſes, R ſeinen halben, D ſeinen ganzen Durchmeſſer bezeichnet; ſo hat man auch K : DD $= \frac{1}{4}\pi : 1$, und K : RR $= \pi : 1$. Daraus folgt C : dd = K : DD, und C : rr = K : RR; alſo auch C : K = dd : DD = rr : RR.

Der 2. Zuſatz.

238. Den Inhalt des Kreisausſchnitts ACBK 50F. hat man im Quadratmaaß, wenn man dem 221. §. gemäß das halbe Product aus der Länge des Bogens AKB in den Halbmeſſer ſucht, da dann die Länge des Bogens, wenn ſie nicht ſchon bekannt iſt, dem 235. §. gemäß geſucht werden kann. Wäre die Gröſſe der Kreisfläche ſchon bekannt, und die Zahl der Grade des Bogens; ſo würde man anſetzen kön-

nen 360° : Zahl der Grade des Bogens = Kreisfläche : Inhalt des Ausſchnittes.

Der 3. Zuſatz.

50 F. 239. Wenn die Länge AB der Sehne des Segments AKB mit dem Halbmeſſer bekannt iſt, ſo kann auch ihre Entfernung CD vom Mittelpunct dem 227 §. gemäß gefunden werden. Das iſt zugleich die Höhe des gradlinichten Dreyecks ACB für die Grundlinie AB, und man kann den Quadratinhalt dieſes Dreyecks finden. Wird hiernächſt der Inhalt des Dreyecks ABC vom Inhalt des Ausſchnitts ACBK abgezogen, ſo findet man den Inhalt des Abſchnitts AKBD.

Der 4. Zuſatz.

240. Wenn die Höhe DK des Abſchnittes mit der Sehne AB gegeben wäre; ſo müſte man zuförderſt den halben oder ganzen Durchmeſſer ſuchen. Man würde anſetzen DK : DA = DA : DL, und ſo würde man den Durchmeſſer KL = KD + DL finden.

Die 16. Aufgabe.

241. Die Seitenlinie eines Quadrats, das einer gegebenen ebenen Figur gleich iſt, durch Rechnung zu finden.

Aufl. Man ſuche den Inhalt der Figur im Quadratmaaß, und ziehe aus der gefundenen Zahl die Quadratwurzel, ſo giebt ſie die Seitenlinie des geſuchten Quadrats im Längenmaaß an, das mit dem Quadratmaaß, welches die Gröſſe der Figur ausdrückt, einerley Nahmen hat.

Anfangs-

Anfangsgründe der körperlichen Geometrie.

Der 3. Foderungsſatz.

242. Man kann durch zwey Puncte A und B, 57 F. auch durch drey Puncte A, B, C, die nicht in grader Linie liegen, eine Ebene DE legen.

Der 6. Grundſatz.

243. Die Lage einer Ebene DE iſt völlig beſtimmt, wenn ſie durch drey Puncte A, B, C, gelegt iſt, die nicht in einerley graden Linie befindlich ſind. Zwey Puncte A und B allein würden ihre Lage noch nicht beſtimmen: man könnte ſie um die grade Linie AB noch in jede andre Lage drehen.

Zuſatz.

244. Zwo Ebenen AB, CD, können einander in 58 F. einer graden Linie EF ſchneiden, alsdenn aber haben ſie auſſer dieſer graden Linie ſonſt nichts gemein.

Der 7. Grundſatz.

245. Eine Ebene AB und eine grade Linie CD 59 F. können einander in einem Punct E ſchneiden: alsdenn aber haben ſie auſſer dem Punct E ſonſt nichts mit einander gemein. Denn eine grade Linie, die durch E und nach einen andern Punct F in derſelben Ebene AB liefe, müſte ganz in dieſer Ebene liegen. (5. §.)

Die 34. Erklärung.

59 F. 246. Eine grade Linie CD ſteht auf der Ebene AB in dem Punct E (grade, lothrecht) ſenkrecht, wenn ſie mit allen graden Linien, die in der Ebene AB durch den Punct E laufen, rechte Winkel macht.

Die 35. Erklärung.

60 F. 247. Eine grade Linie AB iſt mit einer Ebene CD parallel, wenn ſie eine ſolche Lage hat, daß ſie mit der Ebene nicht zuſammen laufen kann, man mag beyde erweitern ſo weit man will.

Zuſatz.

248. Wenn AB mit einer in der Ebene CD liegenden graden Linie EF parallel iſt, ſo iſt auch AB mit der Ebene CD parallel. Denn AB und EF verlängert bleiben in einerley Ebene, (92. §.) die CD in EF durchſchneidet. Wenn alſo AB mit CD zuſammen ſtieſſe, ſo müſte es in einem Punct geſchehen, der in beyden Ebenen zugleich liegt, alſo in EF, welches der Vorausſetzung zuwider iſt.

Die 36. Erklärung.

58 F. 249. Den Neigungswinkel einer Ebene CD gegen eine andre AB, die von der erſten in der graden Linie EF geſchnitten wird, findet man, wenn durch einen in der Durchſchnittslinie willkührlich gewählten Punct G eine grade Linie GH in der einen Ebene CD, und eine andre GI in der andern Ebene AB auf der Durchſchnittslinie EF ſenkrecht gezogen wird. Der Winkel HGI iſt alsdenn der Neigungswinkel, und wenn derſelbe ein rechter Winkel iſt, ſo ſteht eine Ebene auf der andern ſenkrecht.

Der 41. Lehrſatz.

61 F. 250. Eine grade Linie *AB*, die nur auf zwoen in der Ebene *LM* gezogenen graden

Linien *CD*, *EF*, im Durchſchnittspunct *B* ſenkrecht iſt, ſtehet auf der Ebene *LM* ſelbſt ſenkrecht.

Beweis. Man ziehe in der Ebene LM durch B die dritte grade Linie GH, nehme BC = BD, auch BE = BF, und ziehe CE, DF: ſo iſt CE mit DF parallel, (172. §.) alſo wird BG = BH. (173. §.) Ueberdem iſt CE = DF, und EG = FH. (60. §.) Noch ziehe man AC, AE, AG, und AD, AF, AH, ſo wird AC = AD, AE = AF. (60. §.) Weil überdem EC = DF war, ſo wird der Winkel AEG = AFH, (77. §.) folglich AG = AH. (60. §.) Demnach iſt der Winkel ABG = ABH (77. §.) und AB auf GH ſenkrecht. (10. §.)

Weil dieſer Beweis von allen graden Linien gilt, die durch B in der Ebene LM gezogen werden können; ſo iſt AB auf LM ſenkrecht. (246. §.)

Der 1. Zuſatz.

251. Die ſenkrechte Linie AB iſt unter allen, die 61 F. von A nach der Ebene LM gezogen werden können, die kürzeſte: alſo iſt ſie die Entfernung des Puncts A von der Ebene LM. Auch umgekehrt: die kürzeſte unter den graden Linien, welche von einem Punct nach einer Ebene laufen, muß auf der Ebene ſenkrecht ſeyn; weil man ſonſt eine andre grade Linie von dieſem Punct nach der Ebene ſenkrecht ziehen könnte, und ſo wäre jene noch nicht unter allen die kürzeſte Linie.

Der 2. Zuſatz.

252. Durch einen Punct B in der Ebene LM läßt ſich nur eine grade Linie AB auf LM ſenkrecht ſetzen. Denn wäre auch BK auf LM ſenkrecht; ſo würden die Ebene des Winkels ABK und die Ebene LM einan-

der in BD ſchneiden. Alsdenn wären ABD und KBD rechte Winkel, welches nicht ſeyn kann. (14. §.)

Der 3. Zuſatz.

253. Auch von einem Punct A auſſerhalb der Ebene LM kann nur eine grade Linie AB nach LM ſenkrecht herab gelaſſen werden. Wenn auch AD auf LM ſenkrecht wäre; ſo würde LM von der Ebene BAD in BD geſchnitten, und das Dreyeck ABD hätte bey B ſowohl als auch bey D einen rechten Winkel gegen den 57. §.

Der 4. Zuſatz.

58 F. 254. Die Durchſchnittslinie EF zwoer Ebenen AB, CD, ſtehet auf der Ebene HGI ihres Neigungswinkels ſenkrecht.

Der 5. Zuſatz.

58 F. 255. Eine grade Linie HM kann nicht auf zwoen Ebenen AB, CD, die einander in EF ſchneiden, zugleich ſenkrecht ſeyn. Wenn von H und M nach einen Punct G in EF die graden Linien HG, MG, gezogen werden, ſo kann nicht beydes zugleich GMH und GHM ein rechter Winkel ſeyn.

Der 42. Lehrſatz.

62 F. 256. Wenn *AB* auf der Ebene *LM* ſenkrecht, und *CD* mit *AB* parallel iſt; ſo iſt auch *CD* auf *LM* ſenkrecht.

Beweis. Die Parallellinien AB, CD, liegen in einer Ebene, (92. §.) welche LM in BD ſchneidet, und in derſelben Ebene liegt DA. In der Ebene LM ſetze man DE auf DB ſenkrecht, mache DE = AB, und ziehe BE: ſo iſt ABD = R = BDE, und BD = BD, alſo auch AD = BE. (60. §.) Man ziehe ferner AE, ſo paſſen die Dreyecke AEB und AED auf einander, (77. §.) alſo iſt ADE = ABE = R.

= R. Weil nun auch BDE = R war, ſo iſt ED auf der Ebene ABDC ſenkrecht und CDE = R. (250. §.) Weiter iſt CDB = 2R — ABD = R: alſo ſteht CD auf LM ſenkrecht. (250. §.)

Der 1. Zuſatz.

257. Zwo grade Linien AB, CD, die auf einerley Ebene LM ſenkrecht ſtehen, ſind parallel. Denn man kann durch D eine grade Linie mit AB parallel ziehen, dieſe ſteht auf LM ſenkrecht, und muß mit DC zuſammen fallen. (252. §.)

Der 2. Zuſatz.

258. Zwo grade Linien AB, CD, die mit einer dritten EF parallel laufen, ſind einander ſelbſt parallel, auch wenn ſie nicht in einerley Ebene liegen. Denn in der Ebene CDEF kann man ED, und in der Ebene ABEF eben ſo EB auf EF ſenkrecht ſetzen, durch BED aber eine Ebene LM legen: ſo iſt EG auf LM ſenkrecht. (250. §.) Demnach ſind auch AB und CD auf LM ſenkrecht, (256. §.) und eben darum einander parallel. (257. §.)

Der 43. Lehrſatz.

259. Zweene Winkel *ACB, DEF,* die nicht 63 F.
in einerley Ebene liegen, ſind gleich groß, wenn die Schenkel *CA, ED,* imgleichen *CB, EF,* parallel ſind.

Beweis. Man nehme CA = ED, CB = EF, ſo ſind AD und BF ſo groß, als CE, und mit CE parallel; (107. §.) alſo ſind auch AD und BF gleich groß und parallel; (258. §.) mithin ferner AB = DF (107. §.) und ACB = DEF. (77. §.)

Zuſatz.

260. Der Neigungswinkel HGI der Ebene CD gegen AB (58. Fig.) wird von gleicher Gröſſe gefun-

den, man mag den Punct G in der Durchſchnitts-linie EF, wo man will, nehmen.

Der 44. Lehrſatz.

64 F. 261. Wenn eine grade Linie *BC* auf der Ebene *LM* ſenkrecht iſt, ſo ſteht jede durch *BC* gelegte Ebene *AG* auf *LM* auch ſenkrecht.

Beweis. Die Ebene AG ſchneide LM in der graden Linie AD, dieſe wird durch B laufen, und man kann BF in der Ebene LM auf AD ſenkrecht ſetzen. Weil alsdenn auch BC auf AD ſenkrecht iſt, (246. §.) ſo iſt CBF der Ebene AG Neigungswinkel gegen LM, und das iſt ein rechter Winkel: (246. §.) alſo iſt AG auf LM ſenkrecht.

Der 1. Zuſatz.

58 F. 262. Zwo Ebenen AB, CD, die einander in EF ſchneiden, ſind auf der Ebene HGI ihres Neigungswinkels ſenkrecht.

Der 2. Zuſatz.

64 F. 263. Eine grade Linie BC, die in einer von zwoen auf einander ſenkrechten Ebenen AG, LM, auf beyder Durchſchnitt AD ſenkrecht iſt, ſteht auch auf der andern Ebene LM ſenkrecht. Wenn nemlich auch BF auf AD in der Ebene LM ſenkrecht iſt, ſo iſt CBF der Neigungswinkel, (249. §.) alſo CBF = R = CBA, und BC auf LM ſenkrecht. (250. §.)

Der 45. Lehrſatz.

65 F. 264. Wenn zwo Ebenen *CG*, *HF*, einander ſchneiden, und auf einer dritten *LM* ſenkrecht ſind; ſo iſt auch ihr Durchſchnitt *AB* auf *LM* ſenkrecht.

Beweis. In der Ebene LM kann man BI auf EF, und BK auf CD ſenkrecht ziehen: ſo iſt BI auf HF, BK auf CG ſenkrecht. (263. §.) Demnach

ſind

ſind ABI, ABK, rechte Winkel, und AB iſt auf LM ſenkrecht. (250. §.)

Die 37. Erklärung.

265. Wenn eine grade Linie AC auf der Ebene 66 F. LM nicht ſenkrecht, ſondern ſchief ſteht, und alsdenn AB auf LM ſenkrecht, hiernächſt aber CB gezogen wird; ſo iſt ACB der Linie AC Neigungswinkel gegen die Ebene LM.

Der 1. Zuſatz.

266. Die Ebene des Neigungswinkels ACB iſt auf der Ebene LM ſenkrecht. (261. §.)

Der 2. Zuſatz.

267. Parallellinien AC, DE, ſind gegen einer- 66 F. ley Ebene LM unter gleichen Winkeln geneigt. Wenn nemlich DF auf LM ſenkrecht iſt; ſo ſind AB und DF parallel, (257. §.) und CAB = EDF, (259. §.) alſo auch BCA = FED.

Die 38. Erklärung.

268. **Parallele Ebenen** ſind ſolche, die nicht zuſammen laufen können, ſie mögen nach allen Seiten, ſo weit man will, erweitert werden.

Der 1. Zuſatz.

269. Wenn die grade Linie AB auf zwoen Ebe- 67 F. nen KL, MN, zugleich ſenkrecht iſt; ſo ſind die Ebenen parallel. (255. §.)

Der 2. Zuſatz.

270. Wenn zwo parallele Ebenen KL, MN, von 67 F. einer dritten BE geſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnittslinien AE, BC, parallel. Denn ſie liegen in einerley ſchneidenden Ebene, und können nicht zuſammen ſtoſſen, weil ſonſt KL mit MN zuſammen ſtieſſe.

Der

Der 3. Zuſatz.

67 F. 271. Wenn aus einem Punct A der Ebene KL eine grade Linie AB auf die andre damit parallele Ebene MN ſenkrecht fällt; ſo iſt AB auch auf KL ſenkrecht. Sonſt müſte es in KL wenigſtens eine durch A laufende Linie AF geben, die mit AB ſchiefe Winkel machte. Wenn alsdenn die Ebene BAF und MN einander in BD ſchnitten, ſo würden AF und BD zuſammen laufen, (99. §.) alſo auch KL und MN, gegen die Vorausſetzung.

Der 4. Zuſatz.

67 F. 272. Wenn die Schenkel AE, PO, und AF, PQ, der Winkel EAF, OPQ, parallel ſind; ſo ſind auch die Ebenen KL, MN, dieſer Winkel parallel. Von A falle AB auf MN lothrecht, und durch B ſey BC mit PO, BD mit PQ parallel gezogen: ſo iſt auch BC mit AE, und BD mit AF parallel. (258. §.) Demnach iſt BAF = 2R – ABD = R, und BAE = 2R – ABC = R; alſo AB auf KL ſenkrecht, und KL mit MN parallel. (269. §.)

Der 46. Lehrſatz.

67 F. 273. **Parallele Ebenen *KL*, *MN*, ſind durchgängig gleich weit von einander entfernt.**

Beweis. Wenn AB und EC auf MN ſenkrecht alſo die Entfernungen der Puncte A und E von MN ſind; ſo ſind AB, EC, parallel, (257. §.) und AE, BC, ſind auch parallel, (270. §.) alſo AB = EC. (113. §.) Eben ſo erhellet, daß jedes andern in KL befindlichen Puncts F Entfernung FD = AB ſey.

Der 1. Zuſatz.

67 F. 274. Wenn drey Puncte A, E, F, von der Ebene MN gleich weit entfernt ſind; ſo iſt eine durch dieſe drey Puncte gelegte Ebene KL mit MN parallel.

Denn

Denn die gleichen Entfernungen AB, EC, FD, ſind parallel, (257. §.) und ABCE, ABDF, rechtwinklichte Parallelogramme: (270. §.) mithin BAF = R = BAE, und KL mit MN parallel. (269. §.)

Der 2. Zuſatz.

275. Alle Puncte A, E, F, G, die von einerley Ebene KL gleich weit entfernt ſind, liegen in einerley Ebene. Denn eine Ebene KL durch A, E, F, gelegt, iſt mit MN parallel, und ſchneidet die lothrechte Linie GH in einem Punct, der ſoweit als A, E, F, von MN entfernt iſt, alſo in G.

Der 47. Lehrſatz.

276. **Zwo grade Linien** *AB*, *CD*, **werden** 68 F.
von dreyen parallelen Ebenen *HI*, *KL*, *MN*, **in proportionale Theile geſchnitten.**

Beweis. Wenn A, E, B, und C, F, D, die Durchſchnittspuncte ſind; ſo ziehe man BC, welche KL in G ſchneidet. Ferner ſey EG der Ebene ABC Durchſchnitt, GF der Ebene BCD Durchſchnitt mit KL; ſo ſind EG und AG, ſo wie GF und BD parallel. (270. §.) Demnach iſt AE : EB = CG : GB, und CG : GB = CF : FD, alſo auch AE : EB = CF : FD.

Zuſatz.

277. Daraus folgt auch AB : EB = CD : FD, und AB : AE = CD : CF. (167. §.)

Die 39. Erklärung.

278. Drey und mehr ebene Flächen AK, BF, 69 F.
CG, DH, EI, können einander ſo ſchneiden, daß ihre Durchſchnittslinien AF, BG, CH, DI, EK, mit einander parallel laufen, die Ebenen ſelbſt aber einen körperlichen Raum ringsherum einſchlieſſen, der nur an beyden Seiten, wohin die parallelen Durchſchnittslinien laufen, noch unbegränzt bleibt. Um

dieſen Raum völlig zu ſchlieſſen, werden noch zwo Ebenen LM, NO, eine an jeder Seite erfodert; und wenn dieſe unter einander parallel ſind, ſo heißt der ſo begränzte Körper ein Priſma, ein Pfeiler, oder eine Eckſäule. Dieſe parallelen Seitenflächen betrachtet man als die Grundflächen des Priſma; die übrigen aber, welche einander in parallelen Durchſchnittslinien ſchneiden, heiſſen hier im beſondern Sinn die Seitenflächen des Priſma, und von der Anzahl dieſer Seitenflächen erhält der Körper den Nahmen eines dreyſeitigen, vier⸗ fünf⸗ ſechsſeitigen Priſma, u. ſ. f.

Zuſatz.

279. Die Seitenflächen des Priſma ſind Parallelogramme, und die Grundflächen ſind gleiche und ähnliche Figuren. Auch wenn das Priſma mit einer Ebene den Grundflächen parallel geſchnitten wird; ſo iſt die Durchſchnittsfigur den Grundflächen gleich und ähnlich.

Die 40. Erklärung.

280. Wenn die parallelen Seitenlinien des Priſma, alſo auch die Seitenflächen auf den Grundflächen ſenkrecht ſtehen; (261. §.) ſo heißt der Körper ein grades, widrigenfalls ein ſchiefes Priſma.

Zuſatz.

281. Die Seitenflächen des graden Priſma ſind Rechtecke. (246. §.)

Die 41. Erklärung.

70 F. 282. Ein Parallelepipedum iſt ein Priſma, deſſen Grundflächen ABCD, EFGH Parallelogramme ſind.

Zuſatz.

283. Jede zwo entgegengeſetzte Seitenflächen des Parallelepipedi, wie AH, BG, ſind einander

paral-

parallel, weil AD mit BC, AE mit BF parallel iſt. (272. §.) Man kann alſo jede zwo entgegengeſetzte Seitenflächen für die Grundflächen annehmen.

Die 42. Erklärung.

284. Ein grades Parallelepipedum heißt alsdenn rechtwinklicht, wenn auch die Grundflächen Rechtecke ſind. Wenn die Grundflächen und Seitenflächen des rechtwinklichten Parallelepipedi Quadrate ſind; ſo heißt es ein **Würfel.** Dieſe Quadrate ſind alsdenn alle gleich groß, und die Seitenlinie von jeder Seitenfläche heißt zugleich die Seitenlinie des **Würfels.**

Die 43. Erklärung.

285. Wenn ein Punct A auſſerhalb der Ebene einer gradlinichten Figur BCDEF befindlich iſt, und von demſelben bis an alle Winkelpuncte der Figur die graden Linien AB, AC, AD, u. ſ. f. gezogen werden; ſo ſchlieſſen die Ebenen der Dreyecke ABC, ACD, ADE, u. ſ. f. als Seitenflächen mit der Figur BCDEF als der Grundfläche eine **Pyramide** oder **Spitzſäule** ein. Sie erhält wie das Priſma den Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenflächen. 71 F.

Der 48. Lehrſatz.

286. **Wenn eine Ebene die Pyramide mit der Grundfläche parallel ſchneidet; ſo iſt die Durchſchnittsfigur *GHIKL* der Grundfläche ähnlich, und das Verhältniß der gleichnahmigen Seiten dieſer Figuren iſt gleich dem Verhältniß ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.** 71 F.

Beweis. Die Durchſchnittsfigur hat ſoviele Seitenlinien, als die Grundfläche, und jeder Winkel wie G in der Durchſchnittsfigur iſt ſo groß, als der damit

mit zuſammengehörige Winkel B der Grundfläche, weil die Seiten parallel ſind. (270. 272. §.) Ferner ſind die Seiten, welche dieſe gleichen Winkel einſchlieſſen, proportional. Es iſt nemlich BF : GL = AB : AG, und BC : GH = AB : AG, (170. §.) alſo BF : GL = BC : GH. Wenn nun AN auf der Grundfläche, und eben darum auch in M auf der Ebene GK ſenkrecht iſt, und beyde parallele Ebenen BE, GK, von der dritten BAN in BN, GM, geſchnitten werden; ſo ſind BN, GM parallel: (270. §.) alſo AN : AM = AB : AG, und überdem BF : GL = AB : AG, mithin auch BF : GL = AN : AM.

Zuſatz.

287. Die Ebenen der Grundfläche BE und der Durchſchnittsfigur GK verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide. Denn es iſt $AN^q : AM^q = BF^q : GL^q$ (198. §.) = BE : GK. (205. §.)

Die 44. Erklärung.

72 F. 288. Durch den Mittelpunct C eines Kreiſes AB laufe die grade Linie CD ſo, daß ſie nicht in der Ebene des Kreiſes liege; durch den Umfang des Kreiſes aber eine krumme Fläche, welche die Eigenſchaft hat, daß jede durch einen Punct E im Umfange des Kreiſes mit CD parallel gezogene grade Linie EF ganz in dieſer Fläche liege: alsdenn heißt die Fläche eine Cylinderfläche. Schneidet man dieſe mit noch einer Ebene GI der Fläche des Kreiſes AB parallel; ſo begränzen die beyden ebenen Figuren AB, GI, als Grundflächen mit der krummen Fläche zuſammen einen Cylinder, eine Walze oder Rundſäule, deſſen Axe CD iſt. Dieſer Cylinder iſt grade

grade oder ſchief, nachdem die Axe auf den Grund-flächen ſenkrecht oder ſchief ſtehet.

Der 1. Zuſatz.

289. Beyde Grundflächen des Cylinders ſind gleich groſſe Kreiſe, und die Axe CD geht durch beyder Mittelpunct: auch iſt jeder mit den Grundflächen parallele Schnitt ein eben ſo groſſer Kreis, der ſeinen Mittelpunct in der Axe hat.

Der 2. Zuſatz.

290. Ein Schnitt durch die Axe des Cylinders giebt ein Parallelogramm zur Durchſchnittsfigur, welches ein Rechteck wird, wenn der Cylinder grade iſt.

Die 45. Erklärung.

291. Durch einen Punct A der graden Linie AC, 73 F. die zwar durch des Kreiſes BD Mittelpunct geht, aber nicht in ſeiner Ebene liegt, und durch den Umfang des Kreiſes kann ſich eine krumme Fläche von der Beſchaffenheit erſtrecken, daß jede grade Linie AE, die von A durch einen Punct E im Umfange des Kreiſes läuft, ganz in der krummen Fläche liegt. Alsdenn heißt ſie eine **Kegelfläche**, und der Körper ſelbſt ein **Kegel**, den die krumme Fläche mit der Ebene des Kreiſes zuſammen begränzt. Die grade Linie AC iſt ſeine Axe, der Kreis BD ſeine Grundfläche, und der Punct A ſeine Spitze, AE aber ſeine Seitenlinie. Dieſer Kegel iſt übrigens ein grader oder ſchiefer Kegel, nachdem die Axe auf der Grundfläche grade oder ſchief ſtehet.

Zuſatz.

292. Ein Schnitt durch die Axe des Kegels giebt ein gradlinichtes Dreyeck, welches in dem Fall, wenn der Kegel grade iſt, ein gleichſchenklichtes Dreyeck

wird: im letzten Fall ſind überhaupt alle Seitenlinien des Kegels gleich groß.

Der 49. Lehrſatz.

73 F. 293. Wird der Kegel *ABD* mit einer Ebene der Grundfläche parallel durchſchnitten, ſo wird die Durchſchnittsfigur wie die Grundfläche ein Kreis, deſſen Mittelpunct in der Axe liegt: die Halbmeſſer dieſer Kreiſe verhalten ſich wie die Entfernungen, und die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

Beweis. Man ſchneide den Kegel auch durch die Axe, ſo ſind die Durchſchnitte BC, FG, einander parallel, und wenn der Halbmeſſer BC $= r$ geſetzt wird, ſo iſt AC : AG $= r$: FG. Folglich iſt FG $= \frac{AG \cdot r}{AC}$ allemohl von gleicher Gröſſe, wo auch F im Umfange der Durchſchnittsfigur angenommen wird. Demnach iſt FI ein Kreis, und G ſein Mittelpunct. Wenn ferner AL auf der Grundfläche, mithin auch auf der Durchſchnittsfigur in K ſenkrecht iſt; ſo hat man AC : AG = AL : AK, weil auch GK mit CL parallel iſt. (270. §.) Ueberdem iſt AC : AG = CB : GF, alſo CB : GF = AL : AK. Das giebt ferner $CB^q : GF^q = AL^q : AK^q$, (198. §.) alſo auch der Kreis BD : Kreiſe FI $= AL^q : AK^q$. (237. §.)

Die 46. Erklärung.

294. Die Höhe eines geometriſchen Körpers, der eine ebene Grundfläche hat, iſt die Entfernung derjenigen Ebene von der Grundfläche, welche den Körper an ſeiner äuſſerſten Gränze berührt, und mit der Grundfläche parallel iſt.

Zuſatz.

295. Die Höhe eines Priſmen, oder Cylinders iſt die Entfernung der einen Grundfläche von der andern: die Höhe einer Pyramide, oder eines Kegels iſt die Entfernung der Spitze von der Grundfläche.

Der 8. Grundſatz.

296. Gleich hohe geometriſche Körper, wenn ſie gleiche Grundflächen, und überdem die Eigenſchaft haben, daß ihre mit den Grundflächen parallelen Schnitte in gleichen Höhen über den Grundflächen gleich groß ſind, haben einen gleich groſſen körperlichen Inhalt.

Anmerkung.

297. Hiebey mögte wohl mit Grunde erinnert werden können, daß die Wahrheit dieſes Satzes ohne weitern Beweis nicht ſo ganz vollkommen einleuchtend ſey, wie ſonſt die Wahrheit eines Grundſatzes von ſelbſt klar ſeyn muß. Allein wegen der hier unumgänglich nothwendigen Kürze läßt ſich die höchſte Evidenz bey dem nun folgenden Vortrage nicht erreichen. Im erſten Theil meiner Anfangsgründe der Mathematiſchen Wiſſenſchaften findet man alles nach Art der Alten vorgetragen, und aus dem Grundſatz der Congruenz (12. 13. §.) hergeleitet.

Der 50. Lehrſatz.

298. **Priſmen und Cylinder, auch Pyramiden und Kegel auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe ſind gleich groß.**

Beweis. Beym Priſma (69 F.) oder Cylinder (72. Fig.) iſt jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt der Grundfläche gleich. (279. 289. §.) Wenn alſo die Grundflächen AB, FH, gleich ſind, 69
ſo haben die Körper in gleichen Höhen über den 72 F.
Grundflächen auch gleiche mit den Grundflächen parallele Schnitte: alſo ſind die Körper alsdenn gleich groß, wenn auch überdem ihre Höhen gleich ſind.

 (296. §.)

(296. §.) In der Pyramide (71 F.) iſt die Figur $GK = \frac{AM^q}{AN^q} . BE$, (287. §.) und im Kegel (73 F.) iſt der Kreis $FI = \frac{AK^q}{AL^q} . BD$. (293. §.) Wenn alſo nicht allein die Grundfläche BE (71. F.) dem Kreiſe BD, (73. F.) ſondern auch die Höhe AN = AL iſt; ſo hat man für jede Höhe MN = KL auch AM = AK, folglich GK = FI: mithin ſind die Körper von gleicher Gröſſe. (296. §.)

Der 51. Lehrſatz.

299. **Ein Priſma oder Cylinder iſt dreymahl gröſſer als eine Pyramide, oder ein Kegel auf eben ſo groſſer Grundfläche in gleicher Höhe.**

75 F. Beweis. Wenn zuerſt ABCDEF ein grades dreyſeitiges Priſma iſt; ſo kann man in den Seitenflächen ACFD, BCFE, die Diagonallinien CD, CE, ziehen: alsdenn ſchneidet die Ebene des Dreyecks CDE eine Pyramide CDEF ab mit dem Priſma auf gleicher Grundfläche DEF, in gleicher Höhe FC. Man ziehe ferner in der Seitenfläche ADEB die Diagonallinie BD, ſo ſchneidet das Dreyeck BCD noch eine Pyramide ABCD ab auf eben ſo groſſer Grundfläche ABC in gleicher Höhe AD. Demnach ſind die Pyramiden ABCD, DEFC, gleich groß. (298. §.) Der noch übrige Körper BEDC iſt auch eine Pyramide auf der Grundfläche BDE, und die Spitze iſt C. Wenn man aber die Seitenfläche ABD der Pyramide ABDC für die Grundfläche nimmt; ſo iſt C auch

die

die zu dieſer Pyramide gehörige Spitze, und die Pyramiden ABDC, BDEC, haben gleiche Grundflächen ABD, BDE, die hier in einer Ebene liegen, und gleiche Höhen, weil ihre Spitzen in C zuſammen fallen. Demnach ſind alle drey Pyramiden gleich groß, und es iſt das Priſma ABCDEF = 3 . Pyr. ABCD. Mit dem Priſma aber hat jedes andre Priſma und jeder Cylinder auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe, auch mit der Pyramide ABCD jede andre, und jeder Kegel auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe einerley Gröſſe: alſo iſt der Satz allgemein.

Der 52. Lehrſatz.

300. Wenn man ein Parallelepipedum *AB* mit einer Ebene *CD* den Seitenflächen *AE*, *FB* parallel ſchneidet; ſo verhält ſich das abgeſchnittene Parallelepipedum *AC* zum ganzen *AB*, wie die Grundfläche *AK* des erſten zur Grundfläche *AL* des zweyten. 74 F.

Beweis. Man theile die Seitenlinie AF in ſoviele gleiche Theile, als man will, und AG ſey einer von den Theilen. Durch alle Theilungspuncte lege man Ebenen mit CD parallel, ſo theilt man das ganze in eben ſoviele gleiche Parallelepipeda, wie AH, als man Theile in AF erhalten hat. Alsdenn ſind AG und AH ähnliche aliquote Theile von AF und AB, auch ſind dieſe in allen Fällen in AD und AC gleichvielmahl enthalten. Demnach iſt AC : AB = AD : AF. Ueberdem iſt AD : AF = AK : AL, (194. §.) alſo auch AC : AB = AK : AL.

Der 53. Lehrſatz.

301. Priſmen und Cylinder, auch Pyramiden und Kegel, die gleich hoch ſind, verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

76 F. Beweis. Wenn AC, DF, rechtwinklichte Parallelepipeda, und ihre Höhen BC, EF gleich groß ſind; ſo kann man die Seitenlinien AG, PB, nach H und I verlängern, und an BG ein Rechteck BGHI = DE ſetzen. (201. §.) Man lege ferner durch HI eine Ebene mit GC parallel, und verlängere OM, NC, bis an dieſe Ebene in K und L, ſo erhält man ein Ppp. GK = DF, und es iſt Ppp. AC : Ppp. GK = AB : GI, (300. §.) alſo auch Ppp. AC : Ppp. DF = AB : DE. (298. §.)

Vermöge des im 298. §. bewieſenen Satzes gilt dieſe Regel für alle Priſmen und Cylinder, die einerley Grundfläche und Höhe haben. Weil ferner Pyramiden und Kegel den dritten Theil von eben ſo hohen Priſmen oder Cylindern auf eben ſo groſſen Grundflächen ausmachen; ſo gilt die Regel auch für gleich hohe Pyramiden und Kegel.

Der 54. Lehrſatz.

77 F. 302. **Priſmen und Cylinder, auch eben ſo Pyramiden und Kegel, verhalten ſich wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind.**

Beweis. Man nehme an, daß AC, DF, rechtwinklichte Parallelepipeda ſind, die auf gleichen und ähnlichen Grundflächen AB, DE ſtehen, ſo ſind auch die Seitenlinien AG = DH, GB = HE. Wenn nun gleich BC, EF, die Höhen ſind, die mit den Grundflächen AB, DE zuſammen gehören; ſo kann man doch auch die Seitenflächen GC, HF, für die Grundflächen annehmen, und dazu gehören die gleichen Höhen AG, DH. Alsdenn iſt Ppp. AC : Ppp. DF = GC : HF, (301. §.) und GC : HF = BC : EF, (195. §.) alſo auch Ppp. AC : Ppp. DF = BC : EF. Daß eben die Regel allgemein für gleich hohe Priſ-

men

men und Cylinder, und eben ſo für Pyramiden und Kegel gelte, erhellet, wie im vor. §.

Der 55. Lehrſatz.

303. Das Verhältniß zweyer Priſmen, oder Cylinder, auch das Verhältniß zweyer Pyramiden und Kegel, iſt aus den Verhältniſſen der Grundflächen u. Höhen zuſammen geſetzt.

Beweis. Des einen Priſma P Grundfläche ſey B, und Höhe A, des andern Priſma p Grundfläche b, und Höhe a; ſo kann man mit beyden ein drittes Priſma Π vergleichen, deſſen Grundfläche b, und Höhe A iſt. Alsdenn hat man

$$P : \Pi = B : b \quad (301.\ §.)$$
$$\Pi : p = A : a \quad (302.\ §.)$$

alſo $P : p = \left\{ \begin{matrix} B : b \\ A : a \end{matrix} \right\}$, (196. §.) da dann P, p, auch Cylinder, oder Pyramiden, oder Kegel, bezeichnen können.

Der 1. Zuſatz.

304. Die erwehnten Körper verhalten ſich alſo auch wie die Producte aus ihren Grundflächen in die Höhen. (197. §.)

Der 2. Zuſatz.

305. Das Verhältniß zweyer Würfel iſt dreymahl gröſſer, als das Verhältniß ihrer Seitenlinien.

Die 47. Erklärung.

306. Ein Würfel, wovon eine Seite ſo lang iſt, als eins der bekannten Längenmaaſſe, (49. §.) erhält davon den Nahmen. Er heißt eine Cubicruthe, ein Cubicfuß, ein Cubiczoll, eine Cubiclinie, oder ein Cubicſcrupel, nachdem die Seitenlinie ſo lang iſt, als eine Ruthe, oder ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, ein Scrupel im Längenmaaß.

Die 17. Aufgabe.

307. Den körperlichen Inhalt eines Priſmen oder Cylinders, einer Pyramide, oder eines Kegels im Cubicmaaß zu finden, wenn der Inhalt der Grundfläche im Quadratmaaß, und die Höhe im Längenmaaß, das mit jenem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, gegeben ſind.

Aufl. Man multiplicire den Quadratinhalt der Grundfläche des Priſmen oder Cylinders mit der Zahl, welche die Höhe im gleichnahmigen Längenmaaſſe ausdrückt: ſo giebt das Product die Gröſſe des Körpers im Cubicmaaß eben des Nahmens. Wäre der Körper eine Pyramide, oder ein Kegel, ſo müſte man den dritten Theil des Products aus dem Quadratinhalt der Grundfläche in die Höhe nehmen.

Beweis. Wenn P das Priſma oder einen Cylinder auf der Grundfläche B in der Höhe A, und C einen Würfel bezeichnet, deſſen Seite $= L$ iſt: ſo iſt des Würfels Grundfläche $= L^2$, ſeine Höhe $= L$, und man hat dem 304. §. gemäß $P : C = B \times A : L^2 . L$. Hier aber iſt $L = 1$, alſo $P : C = B \times A : 1$, und der Würfel iſt im Priſma oder Cylinder ſoviel mahl enthalten, als Eins im Product $B \times A$. Für die Pyramide und den Kegel erhellet die Richtigkeit der Auflöſung aus dem 299. §.

Es ſey die Grundfläche $B = 582{,}374$ Qu. R., die Höhe $A = 6{,}253$ Ruth., ſo findet man $P = 3641{,}584622$ Cubicruthen.

Der 1. Zuſatz.

308. Die körperliche Gröſſe eines Würfels wird im Cubicmaaß gefunden, wenn man von der Zahl,

welche

welche die Länge der Seitenlinie angiebt, die Cubiczahl ſucht.

Der 2. Zuſatz.

309. Wenn man Duodecimalmaaß braucht, ſo enthält ein Cubicfuß 1728 Cubiczoll, und eben ſo jedes gröſſere Cubicmaaß 1728 Cubicmaaſſe des nächſtkleinern Nahmens. Wird aber Decimalmaaß gebraucht: ſo faſſet jedes gröſſere Cubicmaaß 1000 Cubicmaaſſe des nächſtkleinern Nahmens.

Die 48. Erklärung.

310. Die Kugel iſt ein Körper, welchen eine 78 F.
krumme Oberfläche ADEB ſo umgiebt, daß alle ihre Puncte von einem Punct C innerhalb des Körpers, welcher der Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt ſind. Die graden Linien, welche ſich vom Mittelpunct bis an die Oberfläche erſtrecken, heiſſen Halbmeſſer der Kugel.

Der 1. Zuſatz.

311. Alle Halbmeſſer der Kugel ſind gleich groß.

Der 2. Zuſatz.

312. Jede grade Linie DE, die durch einen Punct G innerhalb der Kugel gehet, trift ihre Oberfläche in zweenen Puncten D und E, und nicht in mehrern, weil in der Ebene CDE nicht mehr als zwey gleich groſſe grade Linien von C nach DE laufen können. (87. §.) Wenn die grade Linie wie AB ſelbſt durch den Mittelpunct C läuft, ſo erhellet es wie beym Kreiſe, (30. §.) daß ſie ebenfalls die Kugelfläche nur in zweenen Puncten treffe.

Die 49. Erklärung.

313. Eine grade Linie AB durch der Kugel Mittelpunct C zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen heißt ein Durchmeſſer der Kugel.

Zuſatz.

314. Alle Durchmeſſer der Kugel ſind gleich groß, denn jeder Durchmeſſer der Kugel iſt doppelt ſo groß, als ihr Halbmeſſer.

Der 9. Grundſatz.

79 F. 315. Wenn eine Ebene AB die Kugel durch den Mittelpunct ſchneidet, ſo iſt die Durchſchnittsfigur ein Kreis, deſſen Mittelpunct und Halbmeſſer mit dem Mittelpunct und Halbmeſſer der Kugel einerley iſt.

Zuſatz.

316. Alle Schnitte der Kugel durch ihren Mittelpunct geben gleich groſſe Kreiſe, und jede Ebene durch den Mittelpunct theilt die Kugel in zwey gleich groſſe Halbkugeln.

Der 56. Lehrſatz.

80 F. 317. Wenn eine Ebene *AB* die Kugel nicht durch den Mittelpunct ſchneidet, vom Mittelpunct *C* aber auf dieſe Ebene die grade Linie *CD* lothrecht gezogen wird; ſo trift dieſe die Ebene in einem Punct *D* innerhalb der Kugel.

Beweis. Weil die Ebene AB die Kugel ſchneiden ſoll; ſo muß ein Stück von ihr innerhalb der Kugel liegen, und jede grade Linie vom Mittelpunct bis an einen auf dieſer Ebene innerhalb der Kugel liegenden Punct gezogen, muß kleiner ſeyn, als der Halbmeſſer. Unter allen graden Linien aber, die von C bis an die Ebene AB gezogen werden können, iſt die lothrechte CD die kürzeſte: alſo muß ſie unter denjenigen befindlich ſeyn, welche die Ebene AB innerhalb der Kugel treffen.

Der 57. Lehrſatz.

318. Jeder Kugelſchnitt iſt ein Kreis, und ſein Mittelpunct liegt da, wo eine grade Linie

aus

aus dem Mittelpunct der Kugel auf die Ebene des Schnitts ſenkrecht gezogen dieſe Ebene trift.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunct ſind dieſe Kreiſe gleich groß: bey ungleichen Entfernungen aber iſt derjenige gröſſer, der dem Mittelpunct näher liegt, als der entferntere.

Beweis. 1) Es ſey CD auf der Ebene AB lothrecht: ſo liegt D innerhalb der Durchſchnittsfigur. (317. §.) Von D ſey nach einem Punct A im Umfange DA und überdem CA gezogen; ſo iſt DA = 80 F.
$\sqrt{(AC^q - CD^q)}$. (126. §.) Es bleiben aber AC und CD allemahl gleich groß, wo auch der Punct A im Umfange der Durchſchnittsfigur genommen wird: alſo bleibt auch DA immer gleich groß. Die Figur iſt demnach ein Kreis und D der Mittelpunct.

2) Wenn CE die Entfernung eines andern Schnitts vom Mittelpunct iſt, in deſſen Umfang F liegt; ſo iſt auch dieſer Schnitt ein Kreis, und ſein Halbmeſſer EF = $\sqrt{(CF^q - CE^q)}$. Ferner iſt AC = CF. Wenn alſo überdem CD = CE iſt, ſo iſt DA = EF. Wäre aber CD > CE, ſo hätte man DA < EF, und daraus folgt der zweyte Satz.

Der 1. Zuſatz.

319. Unter allen Kreiſen auf der Oberfläche der Kugel ſind diejenigen die gröſten, deren Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, wie AEBD. Dieſe heiſſen auch deßwegen gröẞte Kreiſe, und die übrigen kleinere Kreiſe der Kugel. 79 F.

Der

Der 2. Zuſatz.

320. Wenn ein Kugelſchnitt ein gröſter Kreis iſt; ſo geht ſeine Ebene durch der Kugel Mittelpunct, weil es ſonſt auf eben der Kugel noch gröſſere Kreiſe geben müſte.

Der 3. Zuſatz.

80 F. 321. Sind zweene kleinere Kreiſe der Kugel AB, FG, gleich groß, ſo ſind ſie vom Mittelpunct der Kugel gleichweit entfernt. Denn ihre Entfernungen ſind $CD = \sqrt{(AC^q - AD^q)}$ und $CE = \sqrt{(CF^q - EF^q)}$ alſo $CD = CE$, wenn $AD = EF$ iſt.

Der 4. Zuſatz.

322. Der gröſſere Kugelſchnitt liegt dem Mittelpunct der Kugel näher, als der kleinere: denn wird $EF > AD$ angenommen, ſo iſt $CE < CD$.

Der 5. Zuſatz.

323. Ein Durchmeſſer der Kugel, der durch eines kleinern Kreiſes Mittelpunct gehet, ſteht auf der Ebene dieſes Kreiſes ſenkrecht. Denn ſonſt könnte man von der Kugel Mittelpunct eine grade Linie auf die Ebene dieſes Kreiſes ſenkrecht ziehen, die nicht durch ſeinen Mittelpunct gienge, dem 318. §. entgegen.

Der 6. Zuſatz.

80 F. 324. Eine grade Linie auf des kleinern Kreiſes EG Ebene im Mittelpunct E lothrecht geſetzt, geht auch durch der Kugel Mittelpunct; denn ſonſt könnte man aus einerley Punct E über der Ebene FG zwo verſchiedene grade Linien ſenkrecht ziehen, dem 252. §. entgegen.

Die 50. Erklärung.

79 F. 325. Ein Durchmeſſer FG der Kugel AFBG, der auf der Ebene eines Kugelſchnitts HLMN oder ADBE ſenkrecht ſtehet, mithin durch des Kugelſchnitts Mittelpunct

telpunct gehet, heißt eine zu dieſem Kugelſchnitt gehörige Axe der Kugel.

Zuſatz.

326. Dieſe Axe iſt zugleich auf allen übrigen Kreiſen der Kugel ſenkrecht, deren Ebenen mit der Ebene des Kreiſes ADBE, oder HLMN parallel ſind, (271. §.) und ſie geht durch die Mittelpuncte aller dieſer Parallelkreiſe. (318. §.)

Die 51. Erklärung.

327. Die Endpuncte F, G, der Axe FG heiſſen die Pole eines jeden der Parallelkreiſe, die zur Axe FG gehören. 80 F.

Zuſatz.

328. Die ganze Kugel kann ſich um die Axe FG drehen, und jeder Punct auf ihrer Oberfläche beſchreibt alsdenn einen zur Axe gehörigen Parallelkreis.

Die 52. Erklärung.

329. Der Winkel OBM, welchen zweene Bogen BO, BM, gröſter Kreiſe auf der Oberfläche der Kugel einſchlieſſen, heißt ein **ſphäriſcher Winkel.** Er iſt einerley mit dem Winkel, unter welchem die Ebenen dieſer Kreiſe an ihrer gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie CB gegen einander geneigt ſind. Durch O und M kann ein dritter Bogen OM geführt werden, der zu einem gröſten Kreiſe in der Ebene OCM gehört, und alle drey Bogen ſchlieſſen alsdenn ein ſphäriſches Dreyeck OMB ein.

Die 53. Erklärung.

330. Eine Ebene berührt die Kugel, wenn ſie zwar mit ihrer Oberfläche zuſammen ſtößt, ſonſt aber ganz auſſerhalb der Kugel liegt.

Zuſatz.

331. Eine Ebene kann die Kugel nur in einem Punct berühren. Wenn A und B zwey verſchiedene 80 F.

Puncte

Puncte in der Oberfläche der Kugel ſind, ſo liegt die grade Linie AB in der Ebene eines gröſten Kreiſes, welche man durch C, A, und B legen kann. Von dieſem Kreiſe iſt AB eine Sehne, und liegt ganz in ſeiner Fläche, alſo auch ganz innerhalb der Kugel. Ueberdem liegt auch AB in jeder durch A und B gelegten Ebene, mithin iſt es keine Ebene, welche die Kugel berührt.

Der 58. Lehrſatz.

80 F. 332. Eine Ebene *MN* durch einen Punct *H* in der Oberfläche der Kugel auf den Halbmeſſer *CH* ſenkrecht geſetzt, berührt die Kugel.

Auch umgekehrt: wenn eine Ebene *MN* die Kugel in *H* berührt; ſo iſt der Halbmeſſer *CH* im Berührungspunct auf der Ebene *MN* ſenkrecht.

Beweis. 1) Weil CH die kürzeſte Linie iſt, die man von C nach MN ziehen kann, (251. §.) ſo iſt die Entfernung CK eines jeden andern in der Ebene MN liegenden Puncts K von der Kugel Mittelpunct gröſſer als ihr Halbmeſſer: alſo liegen alle übrige Puncte der Ebene MN auſſerhalb der Kugel.

2) Wenn H der Berührungspunct iſt; ſo iſt CH die kürzeſte von allen graden Linien, die von C nach MN gezogen werden können: alſo iſt CH auf MN ſenkrecht.

Zuſatz.

333. Eine grade Linie, die durch den Berührungspunct H auf MN ſenkrecht geſetzt wird, geht durch den Mittelpunct der Kugel. Auch muß die aus dem Mittelpunct C auf die Berührungsebene ſenkrecht gezogene grade Linie den Berührungspunct H treffen.

Der

Der 59. Lehrſatz.

334. Die Halbkugel *AFDGB* iſt doppelt ſo groß, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Ueber dem Kreiſe IK, der ſo groß als die Grundfläche AB der Halbkugel AFDGB iſt, ſtehe ein grader Cylinder HIKL, und die Höhe OP ſey der Höhe CD oder dem Halbmeſſer der Halbkugel gleich. Ueber der Grundfläche HL ſtelle man ſich auch einen graden Kegel HOL in eben der Höhe PO vor, nur daß er ſeine Spitze unten in O hat: ſo iſt der Cyl. HIKL = 3 Kegel HOL. Man ſtelle ſich vor, der Kegel HOL werde aus dem Cylinder heraus geſchnitten, ſo bleibt der Körper HIOKL = 3. HOL — HOL = 2. HOL übrig, und die Halbkugel AFDGB iſt dieſem Körper gleich.

Man ſchneide nemlich die Halbkugel ſowohl als auch den Körper HIOKL mit Ebenen den Grundflächen parallel in gleichen Höhen CE, OQ, über den Grundflächen; ſo giebt der Schnitt der Halbkugel den Kreis FG, wozu der Halbmeſſer EF = EG gehört, und dieſes Kreiſes Fläche iſt $= \pi. EF^q$. Ferner iſt $EF^q = CF^q - CE^q$, alſo der Kreis FG $= \pi. (CF^q - CE^q)$. Die Durchſchnittsfigur mit dem Körper HIOKL iſt ein Ring zwiſchen den Kreiſen MN und RS, wozu die Halbmeſſer QM und QR gehören, und der Inhalt dieſes Ringes MRSN iſt $= \pi. (QM^q - QR^q)$. Ueberdem iſt QM = CF, und QR = OQ, weil OP = PH iſt, alſo auch QR = CE, und der Ring MRSN, $= \pi. (CF^q - CE^q)$, alſo

alſo eben dieſer Ring = dem Kreiſe FG. Daraus aber folgt, es ſey die Halbkugel AFDGB = dem Körper HIOKL, (296. §.) folglich auch die Halbkugel AFDGB = 2. Kegel HOL.

Der 1. Zuſatz.

335. Weil HOL = $\frac{1}{3}$ HIKL, ſo iſt die Halbkugel AFDGB = $\frac{2}{3}$ HIKL. Demnach beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat: die ganze Kugel aber beträgt $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, wovon die Grundfläche dem gröſten Kreiſe, und die Höhe dem Durchmeſſer gleich iſt.

Der 2. Zuſatz.

336. Wenn der Durchmeſſer im Längenmaaß gegeben iſt, ſo findet man leicht den Inhalt der Kugel im Cubicmaaß eben des Nahmens. Der Durchmeſſer ſey = d; ſo iſt die Fläche des gröſten Kreiſes = $\frac{1}{4}\pi dd$, und ein Cylinder in der Höhe d über dieſer Grundfläche = $\frac{1}{4}\pi d^3$: alſo der Inhalt der Kugel = $\frac{1}{6}\pi d^3$.

Der 3. Zuſatz.

337. Wenn D einer andern Kugel Durchmeſſer iſt; ſo iſt ihr Inhalt = $\frac{1}{6}\pi D^3$, mithin verhält ſich die erſte Kugel zur zweyten, wie $d^3 : D^3$, oder die Kugeln verhalten ſich wie die Würfel ihrer Durchmeſſer.

Die 54. Erklärung.

82 F. 338. Wenn eine Ebene DE den Kegel ABC mit der Grundfläche BC parallel ſchneidet; ſo heißt der zwiſchen den beyden Kreiſen DE und BC enthaltene Theil ein abgekürzter Kegel. In dem Fall, wenn der Kegel ein grader Kegel iſt, ſo iſt die Axe FG des abgekürzten Kegels zugleich ſeine Höhe.

Die

Die 18. Aufgabe.

339. **Die Halbmeſſer** *FB, GD,* **der beyden Grundflächen des abgekürzten graden Kegels, und ſeine Axe** *FG* **ſind gegeben; man ſoll den Inhalt im Cubicmaaß finden.** 82 F.

Aufl. Es ſey BDEC ein Schnitt durch die Axe, und in dieſer Ebene ſey DH mit FG parallel, alſo auf BC ſenkrecht, wenn der Kegel grade iſt: alsdenn hat man BH : HD = BF : AF. Ferner iſt BH = BF − FH, und FH = GD, ſo wie HD = FG: alſo BH = BF − GD, und man erhält BF − GD : FG = BF : AF. Vermittelſt dieſer Proportion kann man AF finden, und daraus ferner AG = AF − FG. Hiernächſt ſucht man den Inhalt des gröſſern Kegels ABC, und überdem auch des kleinern ADE: da dann der Inhalt des kleinern vom Inhalt des gröſſern abgezogen den Inhalt des abgekürzten Kegels giebt.

Die 19. Aufgabe.

340. **Die Seite eines Würfels, der einem vorgelegten geometriſchen Körper gleich iſt, durch Rechnung zu finden.**

Aufl. Man ſuche den Inhalt des Körpers im Cubicmaaß, und ziehe aus der Zahl, welche dieſen Inhalt angiebt, die Cubicwurzel: ſo giebt dieſe die Länge der Seitenlinie des geſuchten Würfels im Längenmaaß an, das mit der Zahl einerley Nahmen hat, welche die Gröſſe des Inhalts ausdrückte.

Zuſatz.

341. Man kann die Redensart, einen Körper cubiren, in einem ähnlichen Sinn brauchen, wie oben von der Quadratur ebener Figuren die Rede geweſen iſt: alſo läßt ſich die Cubatur eines jeden

geometriſchen Körpers durch Rechnung finden, wenn man ſeinen Inhalt im Cubicmaaß ausrechnen kann.

Der 60. Lehrſatz.

342. Die krumme Oberfläche eines graden Cylinders iſt einem Rechteck gleich, wovon die Grundlinie der Peripherie der Grundfläche, die Höhe aber der Höhe des Cylinders gleich iſt.

Die krumme Oberfläche des graden Kegels iſt ſo groß, als ein Dreyeck, wovon die Grundlinie der Peripherie der Grundfläche des Kegels, und die Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich iſt.

83 F. Beweis. Wenn die Seitenlinie AB des graden Cylinders ABCD an der eben ſo groſſen Höhe EF des Rechteckes EFGH anliegt; ſo läßt ſich der Cylinder in das Rechteck einwickeln. Wenn alsdenn die Grundlinie EH ſo lang, als die Peripherie der Grundfläche AD iſt, ſo paßt das ſo gekrümmte Rechteck auf der krummen Cylinderfläche.

84 F. Ferner ſey mit dem Halbmeſſer DE, welcher der Seitenlinie AB des graden Kegels ABC gleich iſt, ein Kreisausſchnitt DEF ſo gezeichnet, daß der Bogen EF der Peripherie der Grundfläche BC gleich iſt. Wenn alsdenn die Seitenlinie AB des Kegels an DE gelegt wird; ſo läßt ſich der Kegel in den Ausſchnitt ſo einwickeln, daß der gekrümmte Ausſchnitt auf der krummen Kegelfläche paſſet. Weil nun der Ausſchnitt auch einem Dreyeck gleich iſt, wovon die Grundlinie ſo groß als der Bogen, und die Höhe ſo groß iſt, als der Halbmeſſer; ſo erhellet daraus die Richtigkeit des zweyten Satzes.

Anmer-

Anmerkung.

Man findet die Beweiſe dieſer und einiger von den folgenden Sätzen, die hier nothwendig ins Kurze gezogen werden muſten, im erſten Theil meiner Anfangsgründe, auch im zweyten Theil meines Lehrbegriffes völlig nach Art der Alten vorgetragen.

Der 1. Zuſatz.

343. Gleich hoher Cylinder Flächen verhalten ſich wie die Peripherien, alſo auch wie die halben oder ganzen Durchmeſſer ihrer Grundflächen. (193. §.)

Der 2. Zuſatz.

344. Die krumme Fläche des graden Kegels verhält ſich zur Grundfläche, wie die Seite des Kegels zum Halbmeſſer der Grundfläche.

Der 61. Lehrſatz.

345. Die krumme Fläche des graden Cylinders iſt einem Kreiſe gleich, deſſen Halbmeſſer R die mittlere Proportionallinie iſt zwiſchen des Cylinders Höhe A, und dem Durchmeſſer D der Grundfläche.

Die krumme Fläche des graden Kegels iſt ſo groß, als ein Kreis, deſſen Halbmeſſer R zwiſchen der Seite L des Kegels, und dem Halbmeſſer r der Grundfläche die mittlere Proportionallinie iſt.

Beweis. 1) Die Peripherie der Grundfläche des Cylinders iſt $= \pi D$, (233. §.) wenn D ihr Durchmeſſer iſt, alſo die krumme Cylinderfläche $= \pi . D . A$. (342. §.) Ferner ſey $R = \sqrt{A . D}$ (96. §. Rech.) der Halbmeſſer eines Kreiſes, ſo iſt ſein Flächeninhalt $= \pi R^2$ (236. §.) $= \pi . A . D$, mithin eben ſo groß, als die Cylinderfläche.

2) Wenn r der Halbmeſſer der Grundfläche des Kegels iſt, ſo iſt die Peripherie $= 2\pi r$, (233. §.)

 alſo

alſo die krumme Kegelfläche $= \pi . r . L.$ (342. §.) Wird alſo der Halbmeſſer eines Kreiſes $R = \sqrt{r . L}$ angenommen, ſo iſt ſeine Fläche $= \pi . r . L$, (236. §.) und dieſe iſt der Kegelfläche gleich.

Der 62. Lehrſatz.

82 F. 346. Die krumme Fläche des abgekürzten graden Kegels *BDEC* iſt einem Kreiſe gleich, wovon der Halbmeſſer *R* die mittlere Proportionallinie iſt zwiſchen der Seite *BD* der Kegelfläche, und der Summe der Halbmeſſer *FB* + *GD* ihrer Grundflächen.

Beweis. Die Fläche des ganzen Kegels ABC iſt $= \pi . FB . AB$, die Fläche des abgeſchnittenen $ADE = \pi . GD . AD$: (345. §.) alſo die Fläche des abgekürzten Kegels $BDEC = \pi (FB . AB - GD . AD)$. Ferner iſt $FB - GD : BD = FB : AB$, und überdem $FB - GD : BD = GD : AD$: alſo

$$AB = \frac{BD . FB}{FB - GD} \text{ und } AD = \frac{BD . GD}{FB - GD}.$$

Das giebt die abgekürzte Kegelfläche $BDEC = \frac{\pi . BD}{FB - GD} (FB^2 - GD^2)$, und es iſt $FB^2 - GD^2 = (FB + GD) \times (FB - GD)$; (78. §. Rech.) alſo erhält man die Kegelfl. $BDEC = \pi . BD . (FB + GD)$. Eben ſo groß aber iſt die Fläche eines Cirkels, deſſen Halbmeſſer die mittlere Proportionallinie iſt, zwiſchen BD und (FB + GD).

Die 55. Erklärung.

347. Eine Kugel berührt eine Kegelfläche an ihrer innern hohlen Seite, wenn die Kugelfläche zwar ringsherum an die Kegelfläche jedoch ſo anſchließt,

ſchließt, daß kein Punct von der Kegelfläche innerhalb der Kugel fällt.

Der 1. Zuſatz.

348. Im Kreiſe um den Mittelpunct C ziehe 85 F.
man ein Paar Durchmeſſer AB, DE, auf einander ſenkrecht, und im verlängerten Durchmeſſer DE nehme man einen Punct F an; ſo kann man durch F zwey Berührungslinien des Kreiſes FH und FK ziehen. (137. §.) Nimmt man FH = FK, und ziehet HK, ſo wird FHK ein gleichſchenklichtes Dreyeck. Weil nun auch FG = FI iſt, (138. §.) ſo wird HK mit GI parallel. (172. §.) Die ganze Figur drehe ſich um die Axe DE, ſo beſchreibt der Kreis eine Kugel, und das Dreyeck FHK einen graden Kegel; GI wird der Durchmeſſer, und NG der Halbmeſſer eines Kreiſes, deſſen Peripherie zugleich in der Kugelfläche, und in der Kegelfläche liegt. Dieſer Kreis wird der **Berührungskreis**, und alle übrige Puncte der Kegelfläche liegen auſſerhalb der Kugel.

Der 2. Zuſatz.

349. Man kann GH = FG, und IK = FI nehmen, ſo wird auch FN = NO, und die Ebene des Berührungskreiſes halbirt die Axe OF des Kegels.

Der 3. Zuſatz.

350. Im Umfange des Kreiſes, den wie vorhin 86 F.
die beyden Durchmeſſer AB, DE, in vier Quadranten theilen, kann man auch den Punct G, wo es gefällig iſt, annehmen, und durch G die Tangente HR ziehen. Wird alsdenn ferner GI mit AB parallel, und durch I eine andre Tangente gezogen, auf derſelben aber IS = GR, IK = GH genommen, und RS, HK gezogen; ſo wird durch Umdrehung des

Kreiſes um die Axe DE eine Kugel, durch Umdrehung des Trapezii HRSK eine abgekürzte Kegelfläche beſchrieben. Die Kugelfläche berührt die abgekürzte Kegelfläche von innen in einem Kreiſe, wozu der Durchmeſſer GI, und der Halbmeſſer NG = NI gehört.

Der 4. Zuſatz.

351. Macht man GH = GR, und IK = IS; ſo wird auch NO = NF, und die Ebene des Berührungskreiſes halbirt die Axe OF des abgekürzten Kegels.

Der 63. Lehrſatz.

85 F. 352. Wenn eine Kugel *ADBE* die Fläche des graden Kegels *FHK* von innen ſo berührt, daß die Ebene des Berührungskreiſes die Axe *OF* des Kegels in *N* halbirt; ſo iſt die Kegelfläche einer eben ſo hohen Cylinderfläche gleich, die eine dem gröſten Kreiſe der Kugel gleiche Grundfläche hat.

Beweis. Die Figur ſey wie im 349. §. gezeichnet. Ueberdem aber ziehe man noch durch A und B Tangenten des Kreiſes, (137. §.) welche HK in P und Q ſchneiden. Ferner ziehe man LM durch F mit AB, alſo auch mit HK und GI parallel: ſo beſchreibt das Rechteck PLMQ durch Umdrehung um die Axe OF einen Cylinder, der eben ſo hoch iſt, als der Kegel FHK, und der Durchmeſſer ſeiner Grundfläche iſt dem Durchmeſſer AB der Kugel, mithin die Grundfläche ſelbſt dem gröſten Kreiſe der Kugel gleich. Man ziehe HV mit dem Durchmeſſer GT parallel, ſo wird DE damit in V zuſammen ſtoſſen, und man erhält FG : FH = GC : HV, folglich HV = 2 GC = AB = PQ. Ueberdem iſt HV : HO =

HF

HF : FO, (177. §.) oder PQ : HO = HF : PL, und daraus folgt PQ . PL = HO . HF. Es iſt aber π . PQ . PL der Cylinderfläche, und π . HO . HF der Kegelfläche gleich: (345. §.) alſo ſind die Kegelfläche und Cylinderfläche von gleicher Gröſſe.

Der 64. Lehrſatz.

353. Die grade Linie *EF*, welche die beyden einander nicht parallelen Seiten *AB*, *CD*, halbirt, iſt ſo groß, als die halbe Summe der beyden parallelen Seiten. 88 F.

Beweis. Man halbire AC in G, BD in H, und ziehe EG, FH, auch überdem BC, da dann BC und EF einander in K ſchneiden. Alsdenn ſind EF, AC, BD, parallel, (174. §.) auch aus eben dem Grunde BC, EG, und HF. Demnach iſt EK = GC = $\frac{1}{2}$AC, und KF = BH = $\frac{1}{2}$BD, (113. §.) mithin EK + KF oder EF = $\frac{1}{2}$(AC + BD).

Der 65. Lehrſatz.

354. Wenn eine Kugel *ADBE* die abgekürzte grade Kegelfläche *HRSK* von innen ſo berührt, daß die Ebene des Berührungskreiſes die Höhe des abgekürzten Kegels halbirt; ſo iſt die abgekürzte Kegelfläche einer eben ſo hohen Cylinderfläche gleich, deren Grundfläche ſo groß iſt, als der gröſte Kreis der Kugel. 86 F.

Beweis. Die Figur ſey wie im 351. §. gezeichnet, auſſerdem aber ziehe man durch A und B ein Paar Tangenten des Kreiſes, welche HK in P und Q, RS aber in L und M ſchneiden; ſo wird durch Umdrehung des Rechtecks PLMQ um die Axe OF ein grader Cylinder beſchrieben, der eben ſo hoch iſt, als der abgekürzte Kegel HRSK, und deſſen Grund-

fläche dem gröſten Kreiſe der Kugel gleich iſt. Noch ſey RV auf HK ſenkrecht, ſo wird CGN + NGR = R = CGN + GCN, alſo NGR = RHV = GCN, und das Dreyeck HRV ~ Dreyeck CGN. Daraus folgt HR : RV = CG : GN, alſo auch HR : RV = GT : GI. Es iſt aber RV = PL, GT = PQ, und GI = OH + FR: (353. §.) alſo auch HR : PL = PQ : OH + FR, und man erhält HR (OH + FR) = PL . PQ. Weil nun die abgekürzte Kegelfläche HRSK = π . HR (OH + FR), (346. §.) und die Cylinderfläche PLMQ = π . PL . PQ iſt; (345. §.) ſo erhellet, daß beyde Flächen gleich ſind.

Der 66. Lehrſatz.

355. **Man kann in und um die Halbkugel ſoviele ähnliche Kegelflächen in gleicher Anzahl beſchreiben, daß der Exponent des Verhältniſſes der Summe aller äuſſern zur Summe aller innern Kegelflächen kleiner wird, als jede Zahl, die auch nur um etwas ſehr weniges gröſſer als Eins iſt.**

87 F. Beweis. Ueber dem Durchmeſſer AB ſey ein Halbkreis AFDGB beſchrieben, und CD auf AB ſenkrecht. Jeder Quadrant ſey in ſo viele gleiche Bogen als man will, jedoch beyde Quadranten in gleichviele Bogen getheilt. Wenn alsdenn die Sehnen AY, DY, DZ, BZ, gezogen werden; ſo hat man die halbe Peripherie AYDZB eines innern regulären Polygons. Man halbire jeden Bogen aufs neue in E, F, G, H, und ziehe durch die Theilungspuncte Berührungslinien des Kreiſes: ſo hat man die halbe Peripherie LMNOP eines ähnlichen äuſſern regulären Polygons. Noch ſey CK auf AY ſenkrecht, und mit dem Halbmeſſer CK = CQ ein Halbkreis be-

beſchrieben, der alle Seiten des innern Polygons berührt.

Aus A und B, auch aus Q und R richte man grade Linien über AB ſenkrecht auf, durch D und N aber ziehe man grade Linien mit AB parallel, welche die vorigen in S, T, V und W ſchneiden. Drehet ſich nun die Figur um die Axe CN, ſo beſchreibt AFDGB eine Halbkugel, die Peripherie des äuſſern Polygons beſchreibt Kegelflächen, welche die Halbkugelfläche berühren, und die Peripherie des innern Polygons beſchreibt innere Kegelflächen. Aus ASTB wird ein Cylinder, deſſen Fläche der Summe aller äuſſern Kegelflächen gleich iſt; (352. 354. §.) aus QVWR aber ein Cylinder, deſſen Fläche der Summe aller innern Kegelflächen gleich iſt, weil auch der innere Halbkreis QIR eine Halbkugel beſchreibt. Man ſetze die Summe der äuſſern Kegelflächen $= S$, die Summe der innern $= s$, ſo iſt $S = 2\pi CA . CN$, $s = 2\pi CQ . CD$, (342. §.) alſo $\frac{S}{s} = \frac{CA . CN}{CQ . CD}$. Es iſt aber $CA = CD = CF$, und $CQ = CX$; alſo auch $\frac{S}{s} = \frac{CD}{CX} . \frac{CN}{CF}$. Ferner iſt $\frac{CD}{CX} = \frac{CN}{CF}$, alſo $\frac{S}{s} = \frac{CN^2}{CF^2}$.

Nun ſey n eine gegebene Zahl, welche ſo wenig als man will Eins übertrift; ſo iſt auch $\sqrt{n} > 1$, und man kann den Peripherien der Polygone ſoviele Seiten geben, daß die Zahl $\frac{CN}{CF} < \sqrt{n}$ wird: (187. §.)

§.) alsdenn iſt auch $\frac{CN^2}{CF^2} < n$, mithin in eben dem Fall $\frac{S}{s} < n$.

Der 1. Zuſatz.

356. Wenn eine Fläche Z kleiner iſt, als die Halbkugelfläche; ſo kann die Summe der innern Kegelflächen $s > Z$ werden. Es ſey die Halbkugelfläche $= H$, und $\frac{H}{Z} = n$, ſo iſt $n > 1$. Weil nun $\frac{S}{s} < n$ werden kann, ſo iſt alsdenn $\frac{S}{s} < \frac{H}{Z}$, mithin $1 : \frac{S}{s} > 1 : \frac{H}{Z}$ (21. §. Rech.) oder $\frac{s}{S} > \frac{Z}{H}$. Ueberdem iſt $H < S$, alſo $\frac{s}{H} > \frac{s}{S}$, mithin auch $\frac{s}{H} > \frac{Z}{H}$, und $s > Z$.

Der 2. Zuſatz.

357. Wenn dagegen eine Fläche Y gröſſer iſt, als die Halbkugelfläche H; ſo kann die Summe der äuſſern Kegelflächen $S < Y$ werden. Es ſey $\frac{Y}{H} = n$, alſo $n > 1$. Alsdenn kann $\frac{S}{s} < n$ werden, mithin auch $\frac{S}{s} < \frac{Y}{H}$. Weil aber $H > s$ iſt, ſo hat man $\frac{S}{H} < \frac{S}{s}$, mithin $\frac{S}{H} < \frac{Y}{H}$, und $S < Y$.

Der 3. Zuſatz.

358. Eine Fläche, die gröſſer als jede Summe der innern Kegelflächen, und kleiner als jede Summe

me der äuſſern Kegelflächen iſt, muß der Halbkugelfläche gleich ſeyn. Wäre ſie kleiner als die Halbkugelfläche, ſo gäbe es in der letztern eine Summe von Kegelflächen, die gröſſer als jene Fläche wäre. Wenn eben dieſe Fläche aber gröſſer als die Halbkugelfläche wäre, ſo gäbe es eine Summe äuſſerer Kegelflächen, die kleiner als die erwehnte Fläche wäre: beydes der Vorausſetzung zuwider.

Der 67. Lehrſatz.

359. Die Halbkugelfläche *ADB* iſt einer Cylinderfläche *AcdB* gleich, die mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. 87 F.

Beweis. Es iſt dieſe Cylinderfläche $AcdB = 2\pi . CA . CD = 2\pi . CA^2$. Wenn aber S eine Summe äuſſerer Kegelflächen, und *s* eine Summe der ähnlichen innern Kegelflächen bezeichnet; ſo iſt $S = 2\pi . CA . CN$, und $s = 2\pi CQ . CD = 2\pi CA . CQ$. Weil nun allemahl $CN > CA$, und $CQ < CA$ iſt, wie viele Kegelflächen man auch in und um die Kugelfläche beſchreiben will; ſo iſt die Cylinderfläche A*cd*B gröſſer, als jede Summe der innern, und kleiner als jede Summe der äuſſern Kegelflächen: alſo iſt eben die Cylinderfläche A*cd*B der Halbkugelfläche ADB gleich. (358. §.)

Der 1. Zuſatz.

360. Die Halbkugelfläche iſt doppelt ſo groß, als der gröſte Kreis der Kugel, weil der Inhalt dieſes Kreiſes $= \pi . CA^2$ iſt. Demnach iſt die ganze Kugelfläche viermahl gröſſer, als die Fläche ihres gröſten Kreiſes.

Der 2. Zuſatz.

361. Die Flächen ungleicher Kugeln verhalten ſich wie die Quadrate ihrer ganzen oder halben Durchmeſſer.

Der

Der 3. Zuſatz.

362. Der körperliche Inhalt der Kugel iſt $= \frac{1}{6}\pi . AB^3$, alſo auch eben der Inhalt $= \frac{4}{3}\pi . CA^3 = \frac{1}{3} 4\pi . CA^2 . CA$, und $4\pi . CA^2$ iſt der Quadratinhalt von der Oberfläche der Kugel. Eine Pyramide oder ein Kegel über einer Grundfläche ſo groß, als die Kugelfläche, wovon die Höhe dem Halbmeſſer der Kugel gleich wäre, hätte eben den Inhalt.

Anfangsgründe
der
ebenen Trigonometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Die ebene Trigonometrie lehrt, wie man aus dreyen Stücken vom Umfange eines gradlinichten Dreyecks, wenn unter denſelben wenigſtens eine Seite bekannt iſt, die übrigen durch Rechnung finden könne. Man unterſcheidet ſie von der ſphäriſchen Trigonometrie, welche ſich mit Berechnung der Seiten und Winkel der ſphäriſchen Dreyecke beſchäftiget.

Die 2. Erklärung.

89 F. 2. Es ſey ACB ein ſpitzer Winkel, und BCK ſeine Ergänzung zu 180° oder 2R. Ferner ſey CF auf AC ſenkrecht, und aus dem Mittelpunct C ſey mit einem willkührlichen Halbmeſſer CA ein Halbkreis über AK beſchrieben: ſo ſind AF und FK Quadran-

dranten, und AB iſt das Maaß des Winkels ACB. Aus B ziehe man BD, BE, auf die Schenkel des rechten Winkels ACF ſenkrecht, durch A und F aber Tangenten des Kreiſes, welche CB in T und V ſchneiden: ſo erhellet, daß die Linien BD = CE, AD, AT, CT, BE = CD, EF, FV und CV insgeſammt von der Gröſſe des Winkels ACB abhängen. Es heißt aber

BD = CE der Sinus,

AD der Querſinus, (ſinus verſus)

AT die Tangente,

CT die Secante, ſowohl des Winkels ACB als auch des Bogens AB. In eben dem Verſtande iſt

BE = CD der Sinus, EF der Querſinus,

FV die Tangente, CV die Secante,

ſowohl des Winkels FCB, der ACB zu 90° ergänzt, als auch des Bogens FB, der AB zum Quadranten ergänzt. Weil man aber die vier zuletzt genannten Linien auch als ſolche anſiehet, die mit dem Winkel ACB, oder dem Bogen AB zuſammen gehören; ſo nennt man

BE = CD den Coſinus,

EF den Coſinus verſus,

FV die Cotangente,

CV die Coſecante, ſowohl des Winkels ACB, als auch des Bogens AB.

Der 1. Zuſatz.

3. Wenn der ſpitze Winkel ACB wächſt, ſo wächſt zugleich ſein Sinus und Querſinus, ſeine Tangente und Secante: dagegen nehmen die übrigen vier trigonometriſchen Linien ab. Nach dieſem Geſetz erfolgen die Aenderungen ſo lange, bis ACB, oder AB = 90° wird, mithin CB in CF fällt. Nun

wird

wird nicht allein der Sinus DB = CF, ſondern auch der Querſinus AD = AC, alſo werden beyde dem Halbmeſſer des Bogens AB gleich, der nun ein Quadrant iſt, wenn B in F fällt.

Der 2. Zuſatz.

4. Wenn B über F nach G hinaus rückt, ſo nimmt der Sinus, der nun GH iſt, wieder ab, und der Sinus kann nie gröſſer, als der Halbmeſſer werden: deswegen heißt der Sinus des rechten Winkels auch der **ganze Sinus**. Wird dieſer ganze Sinus = 1 angenommen, ſo laſſen ſich die übrigen Sinus nicht anders, als durch Brüche ausdrücken. Für den ſtumpfen Winkel ACG iſt AH der Querſinus, mithin übertrift derſelbe nun den ganzen Sinus.

Der 3. Zuſatz.

5. Die Tangente AT und Secante CT wachſen über alle Gränzen, wenn ſich ACB dem rechten Winkel nähert. Tangente und Secante eines rechten Winkels haben eigentlich gar keinen Endpunct mehr, mithin iſt ſowohl die Tangente, als auch die Secante eines rechten Winkels gröſſer, als eine jede gegebene Linie. Eine Linie dieſer Art nennt man **unendlich groß**, und braucht das Zeichen ∞, um auszudrücken, daß eine Linie unendlich groß werde.

Der 4. Zuſatz.

6. Die Tangente und Secante des ſtumpfen Winkels ACG ſind AS, CS, beyder Durchſchnittspunct liegt nun auf der andern Seite des Durchmeſſers AK, und beyde Linien haben nun eine Lage, die der vorigen entgegen geſetzt iſt.

Der 5. Zuſatz.

7. Der Coſinus, der Coſinus verſus, und die Cotangente des rechten Winkels verſchwinden, und die Coſecante iſt dem Halbmeſſer gleich. Für den

ſtum-

ſtumpfen Winkel haben der Coſinus EG = CH, und die Cotangente FW eine Lage, die der vorigen entgegen geſetzt iſt, und die Coſecante CW iſt wieder gröſſer, als der Halbmeſſer. Eben dieſe Linien wachſen mit dem ſtumpfen Winkel, auch wächſt der Querſinus mit dem Coſinus verſus, ſo wie im Gegentheil Sinus, Tangente, Secante abnehmen.

Der 6. Zuſatz.

8. Wird der Winkel ACG, oder der Bogen AG = 180°, ſo verſchwindet der Sinus, der Querſinus iſt dem Durchmeſſer des Bogens AG gleich, der nun ein Halbkreis iſt; die Tangente verſchwindet, die Secante iſt dem Halbmeſſer gleich, die Cotangente und Coſecante werden unendlich groß, der Coſinus und Coſinus verſus aber dem Halbmeſſer gleich.

Der 1. Lehrſatz.

9. **Zu zweenen Winkeln, die einander zu 180° ergänzen, gehören gleich groſſe trigonometriſche Linien, wenn der einzige Querſinus ausgenommen wird.** 89 F.

Beweis. Wenn ACB = 180° − ACG iſt, ſo hat man auch KCG = 180° − ACG, alſo ACB = KCG = ACS, und FCB = FCG. Ferner iſt CG = CB, bey D und H ſind rechte Winkel: alſo iſt in den Dreyecken BDC und GHC die Seite BD = GH, CD = CH, mithin ſind Sinus und Coſinus der Winkel ACB, ACG, gleich groß, nur nicht die Querſinus AD, AH, welche um den doppelten Coſinus verſchieden ſind. In den Dreyecken CAT, CAS, iſt AT = AS, CT = CS, alſo ſind Tangente und Secante gleich groß. Eben ſo hat man in den Dreyecken CFV, CFW, auch FV = FW, CV = CW: alſo ſind die Cotangente und Coſecante für beyde Winkel

Winkel ACB, ACG, gleich groß, und der Coſinus verſus FE iſt gleichfalls für beyde einerley, weil der Sinus CE für beyde einerley iſt.

Anmerkung.

Daß einige dieſer Linien für ſolche Winkel, die einander zu 180° ergänzen, eine entgegen geſetzte Lage haben, iſt vorhin ſchon bemerkt worden.

Der 2. Lehrſatz.

89 10. **Wenn** *ACB*, *acb*, **gleich groſſe Winkel,**
90 F. **die Bogen** *AB*, *ab*, **aber mit ungleichen Halbmeſſern beſchrieben ſind, und wenn alsdenn für dieſe Winkel oder Bogen die den Halbmeſſern** *CA*, *ca*, **zugehörigen trigonometriſchen Linien verzeichnet werden; ſo verhalten ſich von dieſen Linien diejenigen, die einerley Nahmen haben, wie die dazu gehörigen Halbmeſſer.**

Beweis. Die Dreyecke BCD, *bcd*, ACT, *act*, AFV, *afv*, ſind einander ähnlich: (175. §.) deßwegen verhalten ſich die Sinus und Coſinus wie die Halbmeſſer CB : *cb*, die Tangenten und Secanten wie CA : *ca*, die Cotangenten und Coſecanten wie CF : *cf*. Ferner iſt AC : *ac* = CD : *cd*, alſo auch AC – CD : *ac* – *cd* = AC : *ac*, (166. §.) d. i. die Querſinus AD, *ad*, verhalten ſich wie die Halbmeſſer. Für die Coſinus verſus EF, *ef*, folgt es eben ſo. Weil die ſtumpfen Winkel mit ihren Ergänzungen zu 180° gleich groſſe trigonometriſche Linien haben, nur daß der Querſinus ausgenommen iſt; ſo gilt der Satz auch für ſtumpfe Winkel. Uebrigens hat man auch AC : *ac* = CH : *ch*, alſo AC + CH : *ac* + *ch* = AC : *ac*, oder die Querſinus AH, *ah*, verhalten ſich wie die Halbmeſſer.

Zuſatz.

Zuſatz.

11. Trigonometriſche Linien, die zu einerley Winkel gehören, bleiben in einerley Verhältniß, wenn man gleich den Halbmeſſer ändert.

Der 3. Lehrſatz.

12. In einer geometriſchen Progreſſion iſt das Verhältniß eines jeden Gliedes zum erſten Gliede aus dem Verhältniſſe des zweyten Gliedes zum erſten ſovielmahl genommen zuſammen geſetzt, ſovielmahl Eins in der Zahl enthalten iſt, welche angiebt, das wievielſte Glied es nach dem erſten ſey.

Beweis. In der Progreſſion

1 2 4 8 16 32 64 128 256

hat man 32 : 16 = 2 : 1
16 : 8 = 2 : 1
8 : 4 = 2 : 1
4 : 2 = 2 : 1
2 : 1 = 2 : 1

alſo iſt das Verhältniß 32 : 1 aus dem Verhältniſſe 2 : 1 fünfmahl genommen zuſammen geſetzt. (196 §.) Man überſiehet leicht, daß es mit jedem Verhältniſſe eines der übrigen Glieder zum erſten eben die Bewandniß habe.

Zuſatz.

13. Weil das Verhältniß 8 : 1 dreymahl gröſſer iſt, als 2 : 1, ſo iſt 2 : 1 = $\frac{1}{3}$ des Verhältniſſes 8 : 1, und man kann die Gröſſe eines Verhältniſſes mit einem andern Verhältniſſe auf ähnliche Art vergleichen, wie man ſonſt einzelne Gröſſen vergleicht.

Die 3. Erklärung.

14. Wenn man ein gewiſſes Verhältniß von bekannter Gröſſe als das Maaß, oder das Grund-

verhältniß annimmt, womit jedes andre Verhältniß verglichen werden ſoll; ſo heißt die Zahl, welche die Gröſſe eines jeden andern Verhältniſſes in Vergleichung mit dem Grundverhältniſſe angiebt, der **Logarithme** jenes Verhältniſſes. Der Logarithme des Grundverhältniſſes iſt alsdenn = 1. Man bezeichnet den Logarithmen eines Verhältniſſes kurz auf die Art, daß man demſelben ein l voranſetzt.

Zuſatz.

15. Wenn $l(8:1)=1$ iſt; ſo iſt $l(2:1)=\frac{1}{3}$, $l(4:1)=\frac{2}{3}$, $l(16:1)=\frac{4}{3}$, $l(32:1)=\frac{5}{3}$, $l(64:1)=2$, u. ſ. f. Die Logarithmen ſolcher Verhältniſſe ſind ganze Zahlen, die ſich aus dem Grundverhältniſſe ſelbſt mehrmahl genommen zuſammen ſetzen laſſen; die Logarithmen ſolcher Verhältniſſe aber Brüche, die nur aus einem aliquoten Theil des Grundverhältniſſes zuſammen geſetzt werden können.

Die 4. Erklärung.

16. Der Logarithme des Verhältniſſes einer Zahl zu 1 heißt auch der **Logarithme** dieſer Zahl. Eine Reihe von Zahlen mit den dazu gehörigen Logarithmen heißt ein **logarithmiſches Syſtem**, und die Zahl, deren Logarithme = 1 geſetzt iſt, nennt man die **Grundzahl** (baſin) des Syſtems.

Der 4. Lehrſatz.

17. **Wenn man die zu einerley Syſtem gehörigen Logarithmen zweyer Verhältniſſe zuſammen addirt, ſo iſt die Summe der Logarithme desjenigen Verhältniſſes, das aus beyden zuſammen geſetzt iſt.**

Beweis. Wenn mit den Zahlen

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

die Logarithmen

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3

zuſammen gehören; ſo giebt der Logarithme eines jeden Verhältniſſes an, wie vielmahl derjenige Theil des Grundverhältniſſes in demſelben enthalten ſey, welcher in dem Syſtem als das gemeine Maaß aller übrigen angeſehen wird. In dem gewählten Exempel kann man das Verh. $2:1 = \frac{1}{3}$ Verh. $(8:1)$ als das gemeine Maaß der Verhältniſſe eines jeden Gliedes der zum Grunde gelegten geometriſchen Progreſſion zu ihrem erſten Gliede anſehen. Setzt man aber aus zweyen Verhältniſſen ein drittes zuſammen, ſo muß eben der erwehnte Theil des Grundverhältniſſes in dem zuſammengeſetzten Verhältniſſe ſovielmahl enthalten ſeyn, als er in den beyden Verhältniſſen zuſammen enthalten iſt, woraus man jenes zuſammen ſetzt. Demnach iſt der Logarithme des zuſammen geſetzten Verhältniſſes die Summe der Logarithmen der Verhältniſſe, woraus man es zuſammen ſetzt.

Der 1. Zuſatz.

18. In dem beygefügten Exempel wäre

$$l(4:1) = \tfrac{2}{3}$$
$$l(32:1) = \tfrac{5}{3}$$
$$\text{alſo } l\,128:1 = \tfrac{7}{3}.$$

Der 2. Zuſatz.

19. Der Logarithme des Products zweyer Zahlen iſt die Summe der zu eben dem Syſtem gehörigen Logarithmen der Factoren. Demnach iſt der Logarithme einer Quadratzahl doppelt ſo groß, und der Logarithme der Cubiczahl dreymahl gröſſer, als der Logarithme der Wurzel. Alſo iſt auch umgekehrt der Logarithme der Quadratwurzel halb ſo groß, als

der Logarithme der Quadratzahl, und der Logarithme der Cubicwurzel beträgt den dritten Theil des Logarithmen der Cubiczahl.

Der 3. Zuſatz.

20. Der Logarithme eines Quotienten, alſo auch eines unächten Bruchs, wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Diviſors vom Logarithmen des Dividendi ſubtrahirt. Es ſey $D : d = Q$, ſo iſt $D = Q \times d$, (19. §. Rech.) mithin $l. D = l. Q + l. d$, und das giebt $lQ = lD - ld$.

Der 4. Zuſatz.

21. In jedem Syſtem iſt $\log. 1 = 0$. Denn es iſt $1 = \frac{a}{a}$, was auch a bezeichnen mag, alſo $l1 = la - la = 0$, weil in einerley Syſtem gleiche Zahlen gleiche Logarithmen haben.

Der 5. Zuſatz.

22. Wenn zu dreyen Zahlen eine vierte geometriſche Proportionalzahl geſucht wird, und ihre Logarithmen bekannt ſind; ſo addirt man die Logarithmen der mittlern Zahlen, und ſubtrahirt von der Summe den Logarithmen der erſten Zahl, um den Logarithmen der vierten Proportionalzahl zu finden.

Die 5. Erklärung.

23. Das Briggiſche oder gemeine Logarithmen-Syſtem hat die Grundzahl 10, es iſt in demſelben $\log. 10 = 1$, und es liegt die geometriſche Progreſſion zum Grunde, worin 1 das erſte Glied, und 10 der Exponent iſt. Es hat den Nahmen von dem ehemahligen Profeſſor der Geometrie zu Oxford, Henrich Brigg, der es berechnet hat; nachdem vorher ein Schottländiſcher Freyherr, Johann Neper, den Gebrauch der Logarithmen in

der

der Mathematik einzuführen verſucht hatte. Hier wird nun im folgenden allemahl von den Briggiſchen Logarithmen die Rede ſeyn.

Der 1. Zuſatz.

24. Nur die Logarithmen der Zahl 10 und ihrer Potenzen (70. §. Rech.) ſind ganze Zahlen. Die Logarithmen der Zahlen zwiſchen 1 und 10 ſind ächte Brüche, die Logarithmen aller übrigen Zahlen, die nicht in der Hauptreihe vorkommen, unächte Brüche. Sie ſind alle in Decimaltheilen berechnet, und in Tabellen gebracht; auſſer Neppern und Briggen hat ſich auch ein Holländiſcher Mathematiker, Adrian Vlacq, damit beſchäftiget. Von dieſem hat man kleinere Ausgaben der Logarithmen- und anderer mathematiſcher Tafeln, die unter dem Nahmen der Trigonometriſchen Tafeln bekannt ſind, und wovon nach der Zeit auch noch andre Mathematiker Ausgaben beſorgt haben.

Der 2. Zuſatz.

25. Man hatte nemlich ſonſt ſchon die Länge der trigonometriſchen Linien für alle Bogen des Quadranten von Minute zu Minute in Decimaltheilen berechnet, bey der Vorausſetzung, daß der Halbmeſſer = 1 ſey. Hatte man dieſe Zahlen bis auf die 10te Decimalſtelle, ſo konnte man ſie auch als ganze Zahlen anſehen, in der Vorausſetzung, daß nun die Zahl 10000000000 die Länge des Halbmeſſers ausdrücke. (10. §.) In dieſer Vorausſetzung hat man auch die Logarithmen aller der Zahlen berechnet, welche die Länge der trigonometriſchen Linien angeben, da dann der Logarithme des Halbmeſſers, oder des ganzen Sinus = 10 iſt. Man findet alſo nun in den Tafeln nicht allein die Zahlen

ſelbſt, welche die Länge der trigonometriſchen Linien in Vergleichung mit der Länge des Halbmeſſers angeben, ſondern auch die Logarithmen dieſer Zahlen. Wer ſich in den trigonometriſchen Rechnungen üben will, der muß ſich mit einer Ausgabe ſolcher Tafeln verſehen, und die Einrichtung dieſer Tafeln ſich wohl bekannt machen, weil es bey Auflöſung aller Aufgaben nöthig iſt, daß man darin nachſchlage, und Zahlen, oder Logarithmen, daraus abſchreibe.

Die 6. Erklärung.

26. Jeder Logarithme beſteht aus einer ganzen Zahl mit einer Reihe daran hangender Decimaltheile, die Logarithmen der erſten 9 Zahlen ausgenommen, welche in der Stelle der Einer die **Null** haben. Die ganze Zahl heißt die **Kennziffer** oder **Characteriſtik** des Logarithmen.

Zuſatz.

27. Die Zahl, welche mit einem Logarithmen zuſammen gehört, beſteht aus einer Ziffer mehr, als die Kennziffer des Logarithmen Eins enthält. Von 1 bis 9 iſt die Kennziffer 0, von 10 bis 99 iſt ſie 1, von 100 bis 999 iſt ſie 2, von 1000 bis 9999 iſt ſie 3, u. ſ. ferner fort.

Anmerkung.

In den kleinern Ausgaben der Tafeln hat man die drey letztern Ziffern von den Zahlen weggelaſſen, welche die trigonometriſchen Linien für den Halbmeſſer = 10000000000 ausdrücken ſollten. Daher iſt auch der Halbmeſſer nur = 10000000 angegeben, obgleich die Kennziffer ſeines Logarithmen = 10 beybehalten iſt, und eben ſo die Kennziffern der Logarithmen der übrigen Zahlen, welche die trigonometriſchen Linien für den Halbmeſſer 10000000000 ausdrücken würden. Für den Halbmeſſer = 10000000 ſollte die Kennziffer durchgängig um 3 kleiner ſeyn.

Der

Der 5. Lehrſatz.

28. Im rechtwinklichten Dreyeck *ABC* ver- 91 F. halten ſich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel.

Auch verhält ſich eine Perpendiculärſeite *AC* zur andern *AB*, wie der ganze Sinus zur Tangente des der zweyten Perpendiculärſeite gegenüber ſtehenden Winkels.

Beweis. 1. Man beſchreibe den Bogen BD mit dem Halbmeſſer CB = CD, ſo iſt AB der Sinus des Winkels C für dieſen Halbmeſſer CB. Der Ausdruck ſin. tot, oder ſtatt deſſen der Buchſtab R, bezeichne nun allemahl den Halbmeſſer der Tafeln, und wenn die abgekürzten Ausdrücke, wie ſin. C, tang. C, u. ſ. f. gebraucht werden; ſo verſtehe man allemahl die dem dabey genannten Winkel zugehörige Linie ſo, wie ſie in den Tafeln berechnet iſt. Alsdenn hat man ſin. tot : ſin C = CB : AB, (10. §.) und es iſt der ſin. tot. zugleich der Sinus des gegen überſtehenden rechten Winkels A. Aus demſelben Grunde iſt ſin. tot : ſin B = CB : CA, und aus den Proportionen ſin B : ſin. tot = CA : CB

ſin. tot : ſin C = CB : AB folgt auch

ſin B : ſin C = CA : AB. (168. §. Geom.)

2. Wird mit dem Halbmeſſer CA der Bogen AE beſchrieben; ſo iſt AB des Winkels C Tangente für den Halbmeſſer CA, folglich hat man auch CA : AB = ſin. tot : tang C, und aus eben dem Grunde AB : AC = ſin. tot : tang B.

Der 6. Lehrſatz.

29. In jedem Dreyeck *ABC* verhalten ſich 92 F. die Seiten, wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel.

Beweis. Man ziehe BD auf AC ſenkrecht, ſo hat man ſtatt des ſchiefwinklichten Dreyecks zwo rechtwinklichte ABD, CBD; mithin iſt AB : BD = R : ſin A, und BC : BD = R : ſin C. Daraus folgt AB . ſin A = BD . R = BC . ſin C, (93. §. Rech.) alſo ferner AB : BC = ſin C : ſin A. (95. §. Rech.) Demnach iſt auch aus eben dem Grunde BC : AC = ſin A : ſin B, und aus beyden Proportionen folgt AB : AC = ſin C : ſin B.

Zuſatz.

30. Das Verhältniß jeder Seite zum Sinus des gegenüberſtehenden Winkels iſt alſo im Dreyeck allemahl einerley. (166. §. Geom.)

Die 1. Aufgabe.

92 F. 31. Im Dreyeck ſind zweene Winkel *A* und *B* nebſt einer Seite *AB* in Zahlen gegeben: man ſoll die übrigen beyden Seiten durch Rechnung finden.

Aufl. Wenn zweene Winkel bekannt ſind, ſo findet man leicht dem 56. §. gemäß den dritten Winkel: man hat alſo auſſer der bekannten Seite AB auch den gegenüberſtehenden Winkel C. Demnach kann man anſetzen

ſin C : AB = ſin A : BC,
ſin C : AB = ſin B : AC. (29. §.)

Das vierte Glied in jeder dieſer Proportionen wird nach der Regel Detri gefunden: man rechnet hier aber gewöhnlich ſtatt der Zahlen mit ihren Logarithmen nach der Regel des 21. §.

Ein Exempel wird genügen, um das ganze Verfahren auch für die noch folgenden Aufgaben zu erläutern. Es ſey C = 48° 35′, A = 57° 29′, AB = 74 Fuß: ſo iſt ſin C : AB = ſin A : BC, und man erhält

$$\begin{aligned} l.\,AB &= 1,8692317 \\ l.\,\sin A &= 9,9259487 \\ \hline & 11,7951804 \\ l.\,\sin C &= 9,8750142 \\ \hline l.\,BC &= 1,9201662 \end{aligned}$$

In den Tafeln findet man

$l83 = 1,9190781$, $l84 = 1,9242793$,

alſo fällt die geſuchte Zahl zwiſchen 83 und 84. Die Seite BC iſt demnach 83 Fuß lang, und etwas mehr. Einige fehlende Decimaltheile findet man auf folgende Art. Weil die Kennziffer des Logarithmen von BC nur 1 iſt, ſo kann man 2 dazu addiren, damit 3 die Kennziffer werde. Es iſt aber

$$\begin{aligned} l\,BC &= 1,9201662 \\ l\,100 &= 2,0000000 \\ \hline \text{alſo } l\,100\,.\,BC &= 3,9201662 \end{aligned}$$

In den Tafeln findet man

$l8320 = 3,9201233$, $l8321 = 3,9201755$,

und dem letztern kommt der $l100\,.\,BC$ am nächſten. Alſo iſt $100\,.\,BC = 8321$ Fuß, und $BC = 83,21$ Fuß.

Die 2. Aufgabe.

32. Es ſind zwo Seiten *AB*, *BC*, gegeben, und einer von beyden entgegen geſetzten Winkeln, man ſoll die übrigen Winkel, und die dritte Seite finden. 92 F.

Aufl. Man ſucht zuerſt die Winkel vermittelſt der im 28. §. bewieſenen Proportion, die man ſo ordnen kann, daß der unbekannte Winkel, welcher, der einen bekannten Seite gegenüber ſtehet, in die vierte Stelle kommt. Wenn alſo auſſer den Seiten AB, BC, der Winkel A gegeben iſt; ſo ſetzt man an $BC : \sin A = AB : \sin C.$

Der Sinus, welcher vermittelſt dieſer Proportion gefunden wird, gehört für zweierley Winkel, woſern es nicht etwa der ganze Sinus iſt: alſo könnte C wohl ſtumpf oder ſpitz ſeyn. Wenn indeſſen A ſtumpf, oder ein rechter Winkel iſt, ſo weiß man, daß C nothwendig ſpitz ſeyn müſſe. Auch wenn A ſpitz, und überdem BC > AB iſt, ſo iſt ebenfalls C nothwendig ſpitz, weil ſonſt BC < AB ſeyn müſte. Alſo bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn A ſpitz und BC < AB iſt, welches mit dem 88. §. übereinſtimmet. Bey Anwendung dieſer Lehren in der Ausübung kennt man gemeiniglich die Gröſſe des geſuchten Winkels ſchon einigermaſſen im voraus, weßwegen der Zweifel mehrentheils wegfällt.

Hat man den Winkel C gefunden, ſo iſt auch B bekannt, und man ſucht AC vermittelſt der Proportion ſin A : BC = ſin B : AC.

Der 7. Lehrſatz.

93 F. 33. Im Dreyeck *ABC* verhält ſich die Summe zwoer Seiten *AC* + *CB* zu ihrer Differenz *AC* − *CB*, wie die Tangente der halben Summe der gegenüber ſtehenden Winkel $\frac{1}{2}(B + A)$ zur Tangente ihrer halben Differenz $\frac{1}{2}(B - A)$.

Beweis. Man verlängere AC nach D, nehme CD = CE = CB, ſo iſt AD = AC + CB, und AE = AC − CB: auch iſt DBE ein rechter Winkel. (131. §. Geom.) Man ziehe AG mit BE parallel, und BD ſchneide dieſe Parallellinie in G, ſo iſt bey G ebenfalls ein rechter Winkel; auch iſt GAD = CEB. Ferner iſt CEB = ½ DCB (64. §. Geom.) = ½ CBA + CAB), alſo auch GAD = ½ (CBA + CAB). Ueberdem iſt CAB = ½ (CBA + CAB) − ½ (CBA −

— CAB), (100. §. Rech.) alſo CAB = GAD — ½(CBA — CAB), und ½(CBA — CAB) = GAD — CAB = GAB.

Für den Halbmeſſer AG ſind GD und GB die Tangenten der Winkel GAD und GAB, alſo GD : GB = tang ½(CBA + CAB) : tang ½(CBA — CAB). Aber auch GD : GB = AD : AE (170. §. Geom.) = AC + CB : AC — CB; alſo erhält man AC + CB : AC — CB = tg. ½(CBA + CAB) : tg. ½(CBA — CAB).

Die 3. Aufgabe.

34. **Im Dreyeck iſt ein Winkel *C* gegeben, und zwey anliegende Seiten *AC* u. *BC*: man ſoll die übrigen Winkel und die dritte Seite finden.** 92 F.

Aufl. 1. Man ſucht zuerſt die Winkel auf folgende Art. Weil B + A = 180° — C, ſo hat man auch ½(B + A) = 90° — ½C. Ferner ſetzt man an AC + CB : AC — CB = tang ½(B + A) : tang ½(B — A), ſo erhält man vermittelſt dieſer Proportion ½(B — A), und findet alsdenn B = ½(B + A) + ½(B — A), und A = ½(B + A) — ½(B — A). (100. §. Rech.) Nachdem ſo die Winkel gefunden ſind, ſetzt man an

ſin A : BC = ſin C : AB.

2. In dem Fall, wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel iſt, kan man kürzer die beiden ſpitzen Winkel mit Hülfe der Tangenten finden. Wäre A ein rechter Winkel, und wäre alsdenn die Länge 91 F. der anliegenden Seiten AC, AB, gegeben, ſo könnte man anſetzen AC : AB = ſin. tot : tang C. (28. §.) Dieſe Proportion giebt C, und hiernächſt hat man B = 90° — C.

Die 4. Aufgabe.

35. **Die drey Seiten eines Dreyecks *ABC* ſind gegeben: man ſoll die beyden Segmente** 94 F.

CE,

CE, *BE* der Grundlinie finden, worin ſie von der graden Linie *AE* getheilt wird, die von der Spitze *A* des gegenüber ſtehenden Winkels darauf ſenkrecht fällt.

Aufl. Man nehme EG = EB, ſo iſt CG die Differenz der Segmente, und dieſe findet man vermittelſt der Proportion BC : AC + AB = AC − AB : CG. Hiernächſt wird BE = ½(BC − CG) = GE, und CE = CG + GE gefunden.

Beweis. Ein Kreis aus A mit dem Halbmeſſer AB beſchrieben geht durch G und ſchneidet AC in F. Man verlängere AC bis an den Kreis in D, und ziehe die Sehnen FB, GD: ſo iſt der Winkel FBC = GDC, (130. §. Geom.) und C gehört zu beyden Dreyecken CBF, CDG. Demnach ſind dieſe Dreyecke einander ähnlich, und man erhält BC : CF = CD : CG, (175. §. Geom.) oder BC : CD = CF : CG. Es iſt aber CD = AC + AB, und CF = AC − AB, alſo BC : AC + AB = AC − AB : CG.

Die 5. Aufgabe.

94 F. 36. Im Dreyeck *ABC* ſind alle drey Seiten gegeben: man ſoll die Winkel finden.

Aufl. Man nehme eine Seite BC für die Grundlinie, ziehe aus der Spitze A des gegenüber ſtehenden Winkels eine grade Linie AE darauf ſenkrecht, und ſuche die Segmente BE, CE. (34. §.) Alsdenn hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABE auſſer dem rechten Winkel bey E noch die Seiten AB, BE, und kann die Winkel, mithin ABE finden. (32. §.) Hiernächſt findet man jeden von den übrigen beyden Seiten den Regeln des 30. §. gemäß.

Anfangs=

Anfangsgründe
der
allgemeinen Rechenkunſt.

Die 1. Erklärung.

1. Entgegen geſetzte Gröſſen ſind ſolche, die zwar unter einem gemeinſchaftlichen Hauptbegriff enthalten ſind, aber doch eine ſolche Beziehung gegen einander haben, daß die eine um eben ſoviel abnimmt, als die andre wächſt, und umgekehrt. Wenn vorausgeſetzt wird, daß von dem Hauptbegriff die Rede ſey, ſo kann man jede davon durch Verneinung der ihr entgegen geſetzten anzeigen, und dieſe heißt alsdenn kurz eine negative Gröſſe, wenn gleich die Verneinung eigentlich nur im Ausdruck liegt. Die ihr entgegengeſetzte, welche ohne Verneinung ausgedrückt wird, nennt man eine poſitive Gröſſe. Der negativen Gröſſe ſetzt man das Zeichen (−) als ein Verneinungszeichen, der poſitiven Gröſſe aber das Zeichen (+) voran.

Die 2. Erklärung.

2. Entgegengeſetzte Gröſſen addiren heißt die gröſſere um einen Theil vermindern, welcher ſo groß iſt, als die ihr entgegengeſetzte kleinere: Nicht entgegengeſeſetzte Gröſſen addirt man dagegen in eben dem Sinne, wie ſonſt dies Wort in der Rechenkunſt gebraucht wird. Eine Gröſſe wird in allen Fällen von einer andern ſubtrahirt, wenn man die-

diejenige, welche der zu ſubtrahirenden entgegengeſetzt iſt, zur andern addirt.

Der 1. Zuſatz.

3. Die Summe poſitiver Gröſſen iſt poſitiv, und die Summe negativer Gröſſen iſt eine negative Gröſſe. Dagegen iſt die Summe zwoer entgegengeſetzten Gröſſen mit der gröſſern von einerley Beſchaffenheit.

Der 2. Zuſatz.

4. Wenn bey der Subtraction beyde Gröſſen einerley Zeichen haben, und die zu ſubtrahirende Gröſſe kleiner, als die andre iſt, wovon man ſubtrahiren ſoll; ſo behält der Reſt eben das Zeichen, und die Subtraction iſt mit der arithmetiſchen einerley. Weil hier übrigens allemahl vorausgeſetzt wird, daß die Gröſſe, wovon man ſubtrahirt, auch in den entgegen geſetzten Zuſtand übergehen könne; ſo läßt ſich auch das Gröſſere vom kleinern ſubtrahiren. Was als Reſt geſucht wird, iſt der Ueberſchuß des gröſſern über das kleinere mit dem entgegen geſetzten Zeichen.

Der 3. Zuſatz.

5. Soll man eine Gröſſe von der ihr entgegen geſetzten ſubtrahiren; ſo iſt das eigentlich eine Vermehrung der Gröſſe, wovon man ſubtrahiren ſoll, um das entgegen geſetzte der zu ſubtrahirenden Gröſſe. Demnach erhält der Reſt einerley Zeichen mit derjenigen, wovon man ſubtrahirt.

Anmerkung.

Im zweiten Theil meines Lehrbegriffes der geſammten Mathematik findet man weitere Erläuterungen dieſer Begriffe mit ihren Folgen, die nur anfangs befremdend ſcheinen, ſo lange man ſich daran nicht gewöhnt hat.

Will-

Willkührliche Sätze.

6. Man bedient ſich mit vielem Vortheil der Buchſtaben des Alphabeths als ganz allgemeiner Zeichen, wodurch man Zahlen, Linien, und überhaupt jede andre Art von Gröſſen, welche man will, verſtehen kann. Gleiche Gröſſen werden mit einerley Buchſtaben, ungleiche mit verſchiedenen Buchſtaben bezeichnet. Die ſchon bekannten Zeichen der vier Rechnungsarten werden beybehalten. Uebrigens ſind die Buchſtaben hier gewiſſermaſſen das, was bey Rechnungen mit genannten Zahlen die Nahmen der Gröſſen ſind: alſo kann man diejenigen, welche mit einerley Buchſtaben bezeichnet ſind, als gleichartige, die übrigen als ungleichartige Gröſſen anſehen.

Die 1. Aufgabe.

7. **Eine Reihe, die aus poſitiven und negativen Gröſſen, als Theilen zuſammen geſetzt iſt, zu einer andern Reihe eben ſolcher Gröſſen zu addiren.**

Aufl. Man ſchreibe die gleichartigen Theile unter einander, und ſetze in jeder Columne die Summe mit dem dazu gehörigen Zeichen dem 3. §. gemäß darunter. Brüche, von ungleichartiger Benennung bringe man vorher auf gleiche Benennung. Wenn übrigens ungleichartige Theile vorkommen, ſo ſetze man dieſe mit den dazu gehörigen Zeichen ohne andre Veränderung in die Summe.

Exempel.

$$\begin{array}{llllll} ax & -2bb & -5ce & +6ab & -3f & \\ 5ax & +6bb & -7ce & & +2f & -g \\ \hline 6ax & +4bb & -12ce & +6ab & -f & -g \end{array}$$

Die

Die 2. Aufgabe.

8. Eine Reihe, die aus poſitiven und negativen Gliedern zuſammen geſetzt iſt, von einer andern ſolchen Reihe zu ſubtrahiren.

Aufl. Man ſchreibe die zu ſubtrahirende Reihe unter der andern hin, wie bey der Addition, verwandle in Gedanken vor jedem Gliede, welches man ſubtrahiren ſoll, das davor ſtehende Zeichen ins entgegen geſetzte, und addire das entgegen geſetzte deſſen, was man ſubtrahiren ſoll. Kommen Brüche mit vor, ſo bringe man ſie vorher auf einerley Benennung.

Exempel.

$$\begin{array}{rrrrr} 6yy & -3gxx & +hff & -c & -d \\ 5yy & -2gxx & -7hff & & -3d \\ \hline 1yy & -gxx & +8hff & -c & +2d \end{array}$$

Die 3. Erklärung.

9. Eine Gröſſe mit einer negativen Zahl multipliciren, heißt von der Gröſſe, welche dem Multiplicando entgegengeſetzt iſt, das Vielfache machen, welches der Multiplicator anzeigt. Eben ſo auch, wenn eine Gröſſe mit einer negativen Zahl dividirt werden ſoll; ſo verlangt man den Quotienten von der Gröſſe, welche dem Dividendo entgegen geſetzt iſt.

Der 1. Zuſatz.

10. Jedes Product entgegen geſetzter Factoren iſt negativ, und jedes Product nicht entgegen geſetzter Factoren iſt poſitiv.

Der 2. Zuſatz.

11. Entgegengeſetzte Gröſſen geben bey der Diviſion einen negativen, nicht entgegengeſetzte Gröſſen aber einen poſitiven Quotienten.

Der

Der 3. Zuſatz.

12. Wenn man dem 180. §. der Geom. gemäß zu dreyen graden Linien a, b, c, die vierte geometriſche Proportionallinie d ſucht, und $a = 1$ ſetzt, ſo iſt $d = b \times c$. Wird aber $b = 1$ geſetzt; ſo iſt $d = \frac{c}{a}$. Man kann alſo in dieſem Sinn eine Linie mit der andern multipliciren, oder dividiren.

Der 4. Zuſatz.

13. Bey der Vorausſetzung, daß die Einheit poſitiv angenommen werde, behalten die Regeln des 10. und 11. §. ihre völlig allgemeine Richtigkeit, auch wenn von der Multiplication und Diviſion in dem allgemeinen Sinn des 12. §. die Rede iſt.

Anmerkung.

M. ſ. davon mit mehrern den 2ten Theil meines Lehrbegriffes der geſammten Mathematik, im 17 u. f. §. §. der allgem. Rechenkunſt.

Die 3. Aufgabe.

14. **Eine Gröſſe, die aus mehrern poſitiven und negativen Theilen zuſammen geſezt iſt, mit einer andern ebenfalls zuſammen geſezten Gröſſe zu multipliciren.**

Aufl. Man multiplicire nach einander alle Theile des Multiplicandi mit einem jeden Theil des Multiplicators für ſich nach der Regel des 10. §., und bringe die einzelnen Producte alle nach den Regeln des 7. §. in eine Summe: ſo hat man das verlangte Product.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+bb \\ aa-ab \\ \hline aa-2ab+bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa-bb \end{array}$$

Die 4. Aufgabe.

15. Eine zuſammengeſetzte Gröſſe mit einer andern einfachen oder zuſammengeſetzten Gröſſe zu dividiren.

Aufl. 1. Wenn man ein Product aus zweyen oder mehrern Factoren mit einem ſolchen Diviſor dividiren ſoll, der ſelbſt unter den Factoren des Products vorkommt; ſo iſt die Diviſion geſchehen, wenn man nur den Factor weglläßt, der mit dem Diviſor einerley iſt, wie die nachſtehende Rechnung zeiget.

$$b)\ \begin{array}{c} ab \\ ab \\ \hline 0 \end{array} \Big|\ a \qquad ac)\ \begin{array}{c} abc \\ abc \\ \hline 0 \end{array} \Big|\ b \qquad x)\ \begin{array}{c} x^2y \\ x^2y \\ \hline 0 \end{array} \Big|\ xy$$

2. Demnach könnte auch das Dividendum aus mehrern Theilen beſtehen, und man würde die Theile des Quotienten nach einander eben ſo finden, wenn der Diviſor nur einfach wäre.

$$b)\ \begin{array}{ccc} a^2b & -bfg & +bc^2 \\ a^2b & -bfg & +bc^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \Big|\ a^2-fg+c^2$$

3. Wenn

3. Wenn auch der Diviſor aus mehrern Theilen beſtehet, ſo ordnet man die Theile des Dividendi am bequemſten ſo, daß diejenigen zuerſt nach einander folgen, welche den erſten Theil des Diviſors als einen Factor enthalten. Hiernächſt dividire man den erſten Theil des Dividendi mit dem erſten Theil des Diviſors, ſo erhält man den erſten Theil des Quotienten. Mit dieſem multiplicire man den ganzen Diviſor, und ziehe das Product vom Dividendo ab. Den Reſt dividire man nochmahl wie vorhin, ſo erhält man den zweyten Theil des Quotienten. Dies Verfahren ſetze man fort, bis entweder alles aufgeht, oder ein Reſt bleibt, den man zu den übrigen Theilen des Quotienten noch als den Zähler eines Bruchs hinzu ſetzen muß, wozu der Diviſor als Nenner gehört.

Exempel.

$$
\begin{array}{l|l}
ab - ac + bb - 2bc + cc & a + b - c \\
b - c) & \\
ab - ac & \\
\hline
\qquad\qquad bb - 2bc + cc & \\
\qquad\qquad b - c) & \\
\qquad\qquad bb - bc & \\
\hline
\qquad\qquad\quad - bc + cc & \\
\qquad\qquad\qquad b - c) & \\
\qquad\qquad\quad - bc + cc & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Der 1. Lehrſatz.

16. Ein Bruch wird unendlich groß, wenn ſein Zähler eine beſtimmte Gröſſe hat, ſein Nenner aber verſchwindet.

Beweis. Weil der Bruch $\frac{b}{x}$ wächſt, wenn ſein Nenner x abnimmt, der Zähler b aber einerley bleibt, ſo muß er über alle Gränzen wachſen, und gröſſer werden, als jede Gröſſe, die ſich angeben läſſet, wenn der Nenner kleiner wird, als jede Gröſſe, die ſich angeben läßt. Das iſt aber der Fall, wenn $x = 0$ wird.

Der 2. Lehrſatz.

17. Ein Bruch verſchwindet, wenn ſein Zähler eine beſtimmte Gröſſe hat, der Nenner aber unendlich groß wird.

Beweis. Der Bruch $\frac{b}{x}$ wird ohne Aufhören kleiner, wenn ſein Nenner x ohne Aufhören wächſt, der Zähler b aber einerley bleibt. Wenn alſo der Nenner gröſſer wird, als jede Gröſſe, die ſich angeben läßt; ſo muß der Bruch kleiner werden, als jede Gröſſe, die ſich angeben läßt, das heißt, er muß $= 0$ werden.

Die 4. Erklärung.

18. Jede Potenz (70. §. Rech.) oder Dignität erhält den Nahmen von der Anzahl der gleichen Factoren, welche die Potenz ausmachen. Die erſte Dignität von a iſt a ſelbſt. Die zweyte Dignität iſt mit der Quadratzahl, und die dritte mit der Cubiczahl einerley. Um eine Potenz kurz zu bezeichnen, ſchreibt man a^5 ſtatt $aaaaa$, b^7 ſtatt $bbbbbbb$, und nennt die oben rechter Hand beygefügte kleine Ziffer, welche die Anzahl der gleichen Factoren der Potenz angiebt, den Index oder Exponenten der Potenz.

Die 5. Erklärung.

19. Jeder von den gleichen Factoren, die in einander multiplicirt eine Potenz ausmachen, heißt die **Wurzel der Potenz.** Das Zeichen $\sqrt{}$ kann die Wurzel einer jeden Potenz bezeichnen, wenn man eine kleine Ziffer drüber ſetzt, welche anzeigt, wieviele ſolcher gleichen Wurzeln die unter dem Zeichen geſetzte Gröſſe durch die Multiplication in einander als eine Potenz darſtellen ſollen. Dieſe Ziffer heißt alsdenn der **Wurzel-Exponent.** Dieſemnach iſt $\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ die Zahl 81 ausmacht.

Die 5. Aufgabe.

20. **Potenzen, die gleiche Wurzeln haben, in einander zu multipliciren.**

Aufl. Das Product iſt eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent iſt die Summe der Exponenten ihrer Factoren. Man findet $a^3 \cdot a^5 = a^8$, $b^3 b^7 b^2 = b^{12}$.

Beweis. Es iſt $a^3 \cdot a^5 = aaa \cdot aaaaa = a^8$, und $b^3 b^7 b^2 = bbb \cdot bbbbbbb \cdot bb = b^{12}$.

Die 6. Aufgabe.

21. **Eine Potenz mit einer andern von eben der Wurzel zu dividiren.**

Aufl. Man ſubtrahire den Exponenten des Diviſors vom Exponenten des Dividendi: ſo iſt der geſuchte Quotient eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent iſt der herausgebrachte Reſt. Es iſt $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, $\frac{b^7}{b^4} = b^3$, wie gleich für ſich daher klar iſt, weil im Dividendo ſoviele gleiche Factoren wegfallen müſſen, als im Diviſor vorhanden ſind.

Zuſatz.

22. Wenn auch der Exponent im Diviſor gröſſer, als im Dividendo wäre, ſo könnte man nach eben der Regel verfahren: nur würde alsdenn der Exponent des Quotienten negativ werden. (4. §.) Man findet $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, und das iſt ſoviel als $\frac{1}{a^2}$, denn $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1 \cdot aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2}$.

Die 7. Aufgabe.

23. **Eine Potenz von neuen auf eine Potenz eines andern Exponenten zu erheben.**

Aufl. Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem neuen Exponenten: das Product wird der Exponent der verlangten Potenz von eben der Wurzel ſeyn. Es iſt $(a^3)^2 = a^6$, $(b^3)^4 = b^{12}$, wie man gleich ſo überſiehet: $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3}$, (20. §.) alſo auch $(b^3)^4 = b^{3+3+3+3} = b^{12}$.

Die 8. Aufgabe.

24. **Die Wurzel einer verlangten Ordnung aus einer gegebenen Potenz noch auf eine andre Art, als durch das voran geſetzte Wurzelzeichen auszudrücken.**

Aufl. Man dividire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem Wurzelexponenten, ſo iſt der Quotient zugleich der Exponent einer Potenz von eben der Wurzel, welches die geſuchte iſt. Man findet ſo $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$, $\sqrt[7]{a^{21}} = a^3$.

Der 1. Zuſatz.

25. Auch alsdenn, wenn die Diviſion nicht aufgienge, könnte man den Exponenten als einen Bruch ſchreiben, auf folgende Art:

$$\sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}}, \quad \sqrt[9]{y^4} = y^{\frac{4}{9}}.$$

Potenzen dieſer Art heiſſen Bruchpotenzen.

Der 2. Zuſatz.

26. Dergleichen Bruchpotenzen ſind wirkliche Potenzen von Wurzelgröſſen. Man bemerke nur, daß $x^{\frac{1}{3}}$ ſoviel ſey als $\sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$, ſo iſt $x^{\frac{3}{7}} = (x^{\frac{1}{7}})^3$. (23. §.) Auch iſt $\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{x} . \sqrt[7]{x} . \sqrt[7]{x} = (\sqrt[7]{x})^3$.

Die 6. Erklärung.

27. Eine Gleichung heißt ein allgemeiner Ausdruck, der es angiebt, was für Operationen mit gewiſſen Gröſſen vorgenommen werden müſſen, damit eine Gröſſe gefunden werde, die eben ſoviel beträgt, als wenn man mit denſelben, oder auch noch andern Gröſſen wiederum andre Veränderungen vornimmt. Von der Art wären ſchon die Ausdrücke $2 \times 2 = 2 + 2$, $7 \times 9 = 60 + 3$. In ſolchen Fällen, wenn man ſich bey Auflöſung einer Aufgabe der Buchſtaben als allgemeiner Zeichen bedient, iſt es bequem, daß man die bekannten Gröſſen mit den erſten Buchſtaben des Alphabets, was aber als unbekannte Gröſſe geſucht wird, mit einem von den letzten Buchſtaben bezeichne.

Zuſatz.

28. Aus einer Gleichung kann man ſehr viele andre herleiten, wenn man auf beyden Seiten glei-

ches addirt, oder ſubtrahirt, oder auf beyden Seiten mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Es ſey $ax + bb = fx + gg$,
ſo iſt auch $ax = fx + gg - bb$,
alſo ferner $ax - fx = gg - bb$
oder $(a-f)x = gg - bb$,

folglich $x = \frac{gg - bb}{a - f}$,

oder $x = \frac{(g+b)(g-b)}{a-f}$.

Die 7. Erklärung.

29. Die Gleichung, welche unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe geſchloſſen wird, nennt man die Fundamentalgleichung der Aufgabe: und die Gleichung auflöſen heißt daraus eine andre herleiten, worin die unbekannte Gröſſe an einer Seite des Gleichheitszeichens allein ſtehet, an der andern Seite aber die bekannten Gröſſen ſo mit einander verbunden ſind, daß ſich daraus erkennen läßt, wie die unbekannte Gröſſe aus den bekannten gefunden werden könne.

Zuſatz.

Wenn eine Aufgabe vorgelegt iſt, ſo beruhet der Hauptkunſtgriff, um die Auflöſung zu finden, auf der folgenden Regel. Man nimmt an, die geſuchte Gröſſe ſey bereits gefunden; man drückt ſie durch ein allgemeines Zeichen aus, und verbindet ſie hierauf mit den gegebenen Gröſſen ſo, wie es den Vorſchriften der Aufgabe gemäß iſt: ſo erhält man, die Fundamentalgleichung. Aus dieſer ſchließt man hiernächſt rückwärts auf die Veränderungen, die man

mit

mit den gegebenen Gröſſen vornehmen muß, wenn die geſuchte gefunden werden ſoll, indem man die Gleichung auflöſet.

Die 8. Erklärung.

30. Eine einfache Gleichung iſt eine ſolche, worin keine höhere Potenzen von der unbekannten Gröſſe, als die erſte, vorkommen. Höhere oder zuſammengeſetzte Gleichungen nennt man diejenigen, worin die unbekannte Gröſſe auf höhere Potenzen, als auf die erſte ſteigt. Wenn alsdenn in allen unbekannten Gliedern der Gleichung einerley Potenz der unbekannten Gröſſe vorkommt, ſo iſt es eine reine Gleichung, widrigenfalls eine unreine höhere Gleichung. Uebrigens erhält die höhere Gleichung den Nahmen einer quadratiſchen, cubiſchen, biquadratiſchen Gleichung, u. ſ. f. von der höchſten Potenz, auf welcher die unbekannte Gröſſe darin erhaben iſt.

Die 9. Aufgabe.

31. **Eine einfache Gleichung aufzulöſen.**

1. Wofern unter den Gliedern der Gleichung Brüche vorkommen, ſo multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Product aller Nenner.

2. Diejenigen ganz bekannten Glieder der Gleichung, welche nun vor dem Gleichheitszeichen ſtehen, und mit unbekannten Gliedern durch die Addition oder Subtraction verbunden ſind, ſetze man mit dem entgegen geſetzten Zeichen hinter daſſelbe.

3. Die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen, welche die unbekannte Gröſſe enthalten, ſetze man mit dem entgegen geſetzten Zeichen dem Zeichen der Gleichheit voran.

4. Nun wird das, was vor dem Gleichheitszeichen ſteht, ein Product der unbekannten Gröſſe eine Summe mehrerer bekannten Factoren ausmachen, die man hier auch Coefficienten nennt. Demnach dividire man mit dem aus allen bekannten Coefficienten zuſammengeſetzten Factor auf beyden Seiten: ſo iſt die Auflöſung der Gleichung gefunden.

$$\text{Es ſey } \frac{ax}{b} - \frac{ef}{g} = \frac{mx}{n} + c,$$

(1ſte Regel) $agnx - befn = bgmx + bcgn$

(2. 3. Regel) $agnx - bgmx = bcgn + befn$

(4te Regel) $(agn - bgm)x = bcgn + befn$

$$\text{alſo } x = \frac{bcgn + befn}{agn - bgm},$$

$$\text{oder } x = \frac{(cg + ef)bn}{(an - bm)g}.$$

Der 1. Zuſatz.

32. Eine reine höhere Gleichung kann nach eben dieſen Regeln aufgelöſet werden, nur muß man vorausſetzen, daß aus jeder vorgelegten Gröſſe die Wurzel einer vorgeſchriebenen Ordnung gefunden werden könne.

$$\text{Es ſey } a^5 + x^5 = \frac{fx^5}{g} + g^2h^3,$$

ſo erhält man $a^5g + gx^5 = fx^5 + g^3h^3$,

alſo ferner $(g - f)x^5 = g^3h^3 - a^5g$,

$$\text{und } x^5 = \frac{(g^2h^3 - a^5)g}{g - f},$$

$$\text{mithin } x = \sqrt[5]{\frac{(g^2h^3 - a^5)g}{g - f}}.$$

Der

Der 2. Zuſatz.

33. Dergleichen Wurzeln kann man in Zahlen vermittelſt der Logarithmen finden. Man ſieht leicht, daß die im 19. §. Trig. für die zweyte und dritte Potenz, auch eben ſo für die Quadrat- und Cubicwurzel bewieſenen Sätze allgemein ſind. Der Logarithme einer jeden Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; wenn aber der Logarithme der Potenz mit dem Wurzelexponenten dividirt wird, ſo erhält man den Logarihmen der Wurzel. Es iſt

alſo $\mathrm{l}.\, a^n = n\, \mathrm{l}.\, a$, und $\mathrm{l}.\, \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} b$.

Der 3. Zuſatz.

34. Die Addition und Subtraction, beſonders auch die Multiplication und Diviſion, in dem allgemeinen Sinn verſtanden, wie davon im 12. §. die Erklärung iſt gegeben worden, ſind nicht blos arithmetiſche, ſondern auch geometriſche Operationen. Wenn die Buchſtaben a und b grade Linien bedeuten; ſo ſind auch $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$, grade Linien. Eben das gilt von den Ausdrücken a^n, b^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$. Wenn nemlich eine geometriſches Progreßion von 1 anfängt, ſo ſind alle folgende Glieder Potenzen des zweyten Gliedes, wie der allgemeine Ausdruck zeiget:

$$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \; \ldots \; a^n$$

Demnach iſt a^2 zu 1 und a die dritte, ferner a^3 zu 1, a, a^2, die vierte ſtetige geometriſche Proportionallinie, u. ſ. f. fort, wenn a eine Linie bezeichnet. Dieſemnach wird die Methode, eine Auf-

gabe

gabe durch Gleichungen aufzulöſen, ſo allgemein, daß ſie ſich nicht allein auf arithmetiſche ſondern auch auf geometriſche Aufgaben anwenden läſſet.

Die 10 Aufgabe.

35. Im Dreyeck *ABC* ſind die drey Seiten gegeben, und aus der Spitze des Winkels *A* iſt *AE* auf die Grundlinie ſenkrecht herabgelaſſen: man ſoll beyde Segmente *CE* und *BE* der Grundlinie finden.

Aufl. Wenn nur eins von beyden Segmenten gefunden iſt, ſo hat man das andre auch, weil ihre Summe der gegebenen Grundlinie CB gleich iſt. Dem 27. §. gemäß ſetze man CE $= x$, AB $= a$, BC$= b$, AC $= c$, ſo wird BE $= b - x$. Im rechtwinklichten Dreyeck ACE iſt $AE^q = AC^q - CE^q$, und weil auch AE eine Perpendiculärſeite im recht winklichten Dreyeck ABE iſt, ſo hat man überdem $AE^q = AB^q - BE^q$, alſo $AB^q - BE^q = AC^q - CE^q$. Das iſt ſchon die Fundamentalgleichung der Aufgabe, wenn man nur die ſchon vorhin feſtgeſetzten Zeichen braucht. Es wird nemlich $aa - (b - x)^2 = cc - xx$. Man ſchreibe dem 14. §. gemäß $bb - 2bx + xx$, ſtatt $(b - x)^2$, ſo wird $aa - (b - x)^2 = aa - bb + 2bx - xx$, und man erhält die Gleichung $aa - bb + 2bx - xx = cc - xx$. Wird hiernächſt xx auf beyden Seiten addirt, ſo fällt dies Quadrat ganz aus der Rechnung weg, und die Gleichung, welche anfangs quadratiſch zu werden ſchien, bleibt nur eine einfache Gleichung, die man leicht nach den Regeln des 31. §. völlig auflöſet. Man hat nemlich $aa - bb + 2bx = cc$,

alſo

alſo $2bx = bb + cc - aa$, und es wird $x = \frac{1}{2}b + \frac{cc - aa}{2b}$, oder $x = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$.

Der 1. Zuſatz.

36 Die Auflöſung kommt mit derjenigen völlig überein, welche in der Trigonometrie ſchon iſt gefunden worden. Es iſt nemlich den dortigen Schlüſſen gemäß die Differenz der Segmente CG $= \frac{(c+a)(c-a)}{b}$, wovon die Hälfte zur halben Summe $\frac{1}{2}b$ addirt das gröſſere Segment geben muß. (100. §. Rech.) Man hat alſo hier ein Beyſpiel davon, wie die Methode der Gleichungen auf eben die Auflöſung führen kann, worauf auch geometriſche Schlüſſe ohne Rechnung leiten.

Der 2. Zuſatz.

37. In der zum Grunde gelegten Figur iſt AC $>$ AB, alſo $c > a$, und $c - a$ iſt eine poſitive Gröſſe: eben darum iſt auch der Ausdruck $\frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ poſitiv. Man nehme CH $= \frac{1}{2}b$, ſo iſt HE $= \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$, und E liegt in der Figur rechter Hand des Puncts E. Je weniger a von c übertroffen wird, deſto kleiner iſt $c - a$, alſo auch HE deſto kleiner, und E liegt dem Punct H deſto näher. In dem Fall $c = a$, wäre $c - a = 0$, alſo HE $= 0$: das heißt, nun fällt E mit H zuſammen, wie auch wegen der bekannten Eigenſchaften des rechtwinklichten Dreyecks nicht anders ſeyn kann.

Der

Der 3. Zuſatz.

38. Wenn $c < a$ wäre, ſo würde $c - a$ negativ, alſo auch HE eine negative Gröſſe seyn: das will ſagen, nun würde HE eine der vorigen entgegengeſetzte Lage haben, ſo wie es die 95ſte Figur vorſtellet. Alsdenn hat man $x = \frac{1}{2}b - \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, und ſo dient die Auflöſung dieſer Aufgabe zugleich, die Begriffe von den entgegengeſetzten Gröſſen, und die darauf gegründeten Rechnungsregeln zu erläutern.

Der 4. Zuſatz.

39. Je gröſſer a gegen c angenommen wird, deſto gröſſer wird $\frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, alſo x deſto kleiner. In dem Fall wird $x = 0$, wenn $\frac{1}{2}b = \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$ iſt: das will ſagen, nun fällt E in C; alſo muß AC auf CB ſenkrecht, und das Dreyeck rechtwinklicht ſeyn. Daſſelbe folgt aus der Vorausſetzung $\frac{1}{2}b = \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, oder $b = \frac{aa-cc}{b}$: denn das giebt ferner $bb = aa - cc$, alſo $bb + cc = aa$, dem §. Geometrie gemäß.

Der 5. Zuſatz.

40. Wird $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} > \frac{1}{2}b$; ſo wird x negativ, weil nun E linker Hand des Puncts C fällt. Alsdenn iſt $aa - cc > bb$, oder $aa > bb + cc$, und der Winkel ACB iſt ſtumpf, welches alles den Grundſätzen der Geometrie gemäß iſt.

Der

Der 3. Lehrſatz.

41. Wenn der Unterſcheid poſitiver und negativer Gröſſen in Betrachtung kommt; ſo hat jedes poſitive Quadrat zwo unterſchiedene Wurzeln, die zwar in Anſehung der Gröſſe einerley, einander aber entgegen geſetzt ſind.

Beweis. Weil nicht allein $+ a$ mit $+ a$, ſondern auch $- a$ mit $- a$ multiplicirt eine poſitive Quadratzahl $+ a^2$ giebt, (10. §.) ſo iſt nicht allein $+ a$ ſondern auch $- a$ die Quadratwurzel aus $+ a^2$.

Zuſatz.

42. Die Quadratwurzel iſt hier als die mittlere Proportionalgröſſe zwiſchen 1 und der Quadratzahl anzuſehen. (34. §.) Weil aber die Einheit allemahl poſitiv angenommen wird, ſo iſt nicht allein $+1 : +a = +a : +a^2$, ſondern auch $+1 : -a = -a : +a^2$. Auch aus dieſem Grunde erhellet die Richtigkeit des Lehrſatzes.

Die 9. Erklärung.

43. Ein Ausdruck bezeichnet eine unmögliche Gröſſe, wenn derſelbe verlangt, daß eine Gröſſe durch ſolche Operationen zuwege gebracht werden ſoll, die mit einander nicht beſtehen können.

Zuſatz.

44. Die Quadratwurzel aus einer negativen Gröſſe iſt unmöglich. Denn die Wurzel kann weder poſitiv noch negativ ſeyn, weil in beyden Fällen die vorgelegte Gröſſe als ihr Quadrat poſitiv ſeyn müſte, welches doch mit dem vorausgeſetzten ſtreitet.

Der 4. Lehrſatz.

45. Jede reine quadratiſche Gleichung giebt zweene Werthe für die unbekannte Gröſſe, die

die entweder beyde möglich, oder beyde unmöglich ſind.

Beweis. Wenn x die unbekannte Gröſſe bezeichnet, ſo läßt ſich x^2 nach den Regeln des 31. §. von den bekannten Gröſſen ſo abſondern, daß auf die andre Seite des Gleichheitszeichens ein Ausdruck gebracht wird, der keine andre, als bekannte Gröſſen enthält. Wenn dieſer Ausdruck $= A$ angenommen wird, ſo iſt die Gleichung auf die Form gebracht: $x^2 = A$, und es wird A entweder poſitiv oder negativ ſeyn. Ueberhaupt kann man $x = \pm \sqrt{A}$ ſetzen, weil die Quadratwurzel ſo gut negativ, als poſitiv ſeyn kann. (41. §.) Nachdem aber ferner A poſitiv oder negativ iſt, nachdem ſind beyde Wurzeln entweder möglich oder unmöglich.

Die 11. Aufgabe.

46. **Eine unreine quadratiſche Gleichung aufzulöſen.**

Aufl. 1. Die Gleichung muß zuvor auf eine ſolche Form gebracht ſeyn, daß auſſer den völlig bekannten Gliedern einige vorkommen, die x^2 als einen Factor enthalten, andre aber nur die erſte Potenz x, wenn x die unbekannte Gröſſe bezeichnet. Aus der Gleichung

$$a + \sqrt{(bb + xx)} = c + \frac{f}{g}x$$

müſte man zuforderſt das Wurzelzeichen wegſchaffen. Es wird nemlich $ag + g\sqrt{(bb + xx)} = cg + fx$, alſo $g\sqrt{(bb + xx)} = (c - a)g + fx$, mithin ferner $gg(bb + xx) = (c - a)^2 g^2 + 2(c - a) fgx + ffxx$.

2. Man

2. Man ordne nun alles ſo, daß alle ganz bekannte Glieder hinter das Gleichheitszeichen kommen, was aber x enthält, dem Gleichheitszeichen voran geſetzt werde. Von dieſen unbekannten Gliedern laſſe man diejenigen die erſten Stellen einnehmen, welche x^2 enthalten, und hiernächſt die folgen, worin x als ein Factor vorkommt. Die vorige Gleichung erhält alsdenn die Form

$$(gg-ff)xx - 2(c-a)fgx = (c-a)^2 g^2 - b^2 g^2.$$

3. Mit dem Quotienten von xx kann nun die ganze Gleichung dividirt werden, und man erhält

$$xx - \frac{2(c-a)fg}{gg-ff}x = \frac{((c-a)^2 - b^2)g^2}{gg-ff}.$$

Allemahl kann alſo, wie in dieſem Exempel, die unreine quadratiſche Gleichung auf die Form gebracht werden, daß vor dem Gleichheitszeichen xx und ein Product eines bekannten Factors mit x, hinter dem Gleichheitszeichen aber ein völlig bekannter Ausdruck ſeine Stelle erhalte. Was in x multiplicirt iſt, ſey $= P$, was hinter dem Gleichheitszeichen ſteht, $= Q$, ſo erhält die Gleichung dieſe Form $x^2 + Px = Q$.

4. Man addire nun auf beyden Seiten $\frac{1}{4}P^2$, ſo erhält man $x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = Q + \frac{1}{4}P^2$, und aus dem, was vor dem Gleichheitszeichen ſteht, iſt nun $x + \frac{1}{2}P$ die Quadratwurzel. (14. §.) Man kann alſo dieſe Gleichung auch ſo ausdrücken

$$(x + \tfrac{1}{2}P)^2 = Q + \tfrac{1}{4}P^2,$$

und ſie iſt nun als eine reine Gleichung anzuſehen, woraus man ferner

$$x + \tfrac{1}{2}P = \pm\sqrt{(Q + \tfrac{1}{4}P^2)} \text{ erhält,}$$

alſo auch $x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(Q + \frac{1}{4}P^2)}$.

Die 10. Erklärung.

47. Die Werthe der unbekannten Gröſſe, welche aus einer höhern Gleichung gefunden werden, haben den Nahmen: **Wurzeln der Gleichung**, erhalten, weil man ſie gewöhnlich nicht anders, als durch Wurzelgröſſen ausdrücken kann.

Der 5. Lehrſatz.

48. **Jede unreine quadratiſche Gleichung hat zwo Wurzeln, und nicht mehrere.**

Beweis. Daß die Gleichung wenigſtens zwo Wurzeln habe, erhellet aus dem 46 §. Man nehme an, daß a und b dieſe Wurzeln bezeichnen, ſo muß man in der Gleichung $x^2 + Px = Q$ einen jeden dieſer Werthe anſtatt x ſetzen können, und man erhält nicht allein $a^2 + Pa = Q$, ſondern auch $b^2 + Pb = Q$. Daraus folgt $a^2 + Pa = b^2 + Pb$, alſo $P(a - b) = b^2 - a^2$, und $P = \frac{bb - aa}{a - b}$, oder $P = -\frac{aa - bb}{a - b} = -(a + b)$. Hätte die Gleichung noch die dritte Wurzel c, ſo wäre auch $c^2 + Pc = Q$, alſo $b^2 + Pb = c^2 + Pc$: mithin ferner $P(b - c) = c^2 - b^2$. Daraus folgt $P = \frac{c^2 - b^2}{b - c}$, oder $P = -\frac{b^2 - c^2}{b - c} = -(b + c)$. Dieſer Werth von P dem vorigen gleich geſetzt giebt $b + c = a + b$, alſo $c = a$, und die dritte Wurzel muß mit einer der beyden vorigen einerley ſeyn.

Der 1. Zuſatz.

49. Wenn a und b die Wurzeln der Gleichung bezeichnen, ſo iſt

$$a = -\tfrac{1}{2}P + \surd(Q + \tfrac{1}{4}P^2)$$
$$b = -\tfrac{1}{2}P - \surd(Q + \tfrac{1}{4}P^2)$$

alſo $a + b = -P$, oder $P = -(a+b)$
und $ab = \tfrac{1}{4}PP - Q - \tfrac{1}{4}PP = -Q$.

Der 2. Zuſatz.

50. Der allgemeine Ausdruck der quadratiſchen Gleichung $xx + Px = Q$ giebt auch $xx + Px - Q = 0$. Man ſetze hier ſtatt P und Q die Werthe aus dem vor. §; ſo erhält man $xx - (a+b)x + ab = 0$. Weil nun $x = a$ und $x = b$ iſt, ſo hat man auch $x - a = 0$, und $x - b = 0$, und man findet nach den Multiplicationsregeln (14. §.) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$; mithin iſt auch $x^2 + Px - Q = (x-a)(x-b)$. Demnach kann der allgemeine Ausdruck der quadratiſchen Gleichung, wenn alle Glieder derſelben auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht ſind, in zwey Factoren zerlegt werden, wovon jeder $= 0$ geſetzt eine einfache Gleichung giebt, worin der Werth der unbekannten Gröſſe mit einer Wurzel der quadratiſchen Gleichung einerley iſt.

Die 12. Aufgabe.

51. Das erſte Glied, die Differenz der Glieder nebſt der Anzahl aller Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion ſind gegeben: man ſoll das letzte Glied finden.

Aufl. Es ſey das erſte Glied $= a$, das letzte $= V$, die Differenz der Glieder $= d$, und die Zahl aller Glieder $= n$; ſo hat die Progreſſion die allgemeine Form:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & r & & n \\ a & a+d & a+2d & a+3d & \ldots & a+(r-1)d & \ldots & a+(n-1)d. \end{array}$$

Jedes Glied entſteht, wenn zum erſten Gliede die Differenz der Glieder ſovielmahl genommen addirt wird, als die Anzahl aller Glieder Eins enthält, die vor demſelben bis zum erſten Gliede voran gehen. Demnach erhält man $V = a + (n - 1)d$.

Der 6. Lehrſatz.

52. Die Summe des erſten und letzten Gliedes der arithmetiſchen Progreßion iſt ſo groß, als die Summe zweyer andern Glieder derſelben Progreßion, wenn vor dem einen bis zum erſten Gliede ſoviele voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten Gliede folgen.

Beweis. Eine Summe zweyer Gröſſen bleibt einerley, wenn die eine um eben ſoviel wächſt, als die andre abnimmt. So iſt $17 + 3 = 16 + 4 = 15 + 5$ u. ſ. f. Wenn man aber die Glieder einer arithmetiſchen Progreßion vorwärts vom erſten Gliede gegen das letzte zu, und eben ſo rückwärts vom letzten Gliede gegen das erſte zu fortzählt; ſo wachſen die Glieder vom erſten gegen das letzte zu immer um eben ſoviel, als ſie vom letzten gegen das erſte zu abnehmen, wie man auf folgende Art am beſten überſiehet

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d \\ a+5d & a+4d & a+3d & a+2d & a+d & a; \end{array}$$

alſo iſt die Summe des erſten und letzten Gliedes ſo groß, als die Summe zwoer andern, wenn vor dem einen bis zum erſten ſoviele Glieder voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten folgen.

Die

Die 13. Aufgabe.

53. Das erſte und letzte Glied der arithmetiſchen Progreßion, und die Anzahl aller Glieder ſind gegeben: man ſoll die Summe aller Glieder finden.

Aufl. Wenn man die Summe des erſten und letzten Gliedes mit der Zahl aller Glieder der Progreßion multiplicirt, ſo wird das Product ſo groß, als die Summe aller Glieder der Progreßion doppelt genommen, wie aus dem vor. §. ſogleich erhellet. Man ſetze alſo die Summe aller Glieder der Progreßion $= S$, das erſte Glied $= a$, das letzte $= V$, die Zahl aller Glieder $= n$, ſo iſt $n(a + V) = 2S$, und daraus folgt $S = \frac{1}{2}n(a + V)$.

Zuſatz.

54. Man hat alſo in der Lehre von den arithmetiſchen Progreßionen zwo Fundamentalgleichungen, nemlich I.) $V = a + (n - 1)d$, und II.) $S = \frac{1}{2}n(a + V)$, woraus ſich die Auflöſung einer jeden Aufgabe muß herleiten laſſen, welche die arithmetiſchen Progreßionen angehet. Sind von den fünf Gröſſen a, d, n, V, S, drey gegeben, ſo kann man die übrigen beyden vermittelſt der erwehnten Gleichungen finden. Zur Probe dient folgende Aufgabe:

Die 14. Aufgabe.

54. Die Summe aller Glieder der arithmetiſchen Progreßion iſt gegeben, nebſt ihrer Differenz und dem erſten Gliede: man ſoll die Anzahl aller Glieder finden.

Aufl. Es ſind gegeben S, d, a, man ſucht n: alſo hat man eine Gleichung nöthig, welche nur dieſe vier Gröſſen, und kein V enthält. Aber die Gleichung $S = \frac{1}{2}n(a + V)$ giebt $\frac{2S}{n} = a + V$, alſo

$V =$

$V = \frac{2S}{n} - a$, und es iſt auch $V = a + (n-1)d$. Beyde Werthe gleich geſetzt geben die geſuchte Gleichung $\frac{2S}{n} - a = a + nd - d$, worin nun n die unbekannte Gröſſe iſt. Den Regeln des 31. und 46. §. gemäß findet man ferner

$$2S = 2na + n^2d - nd$$

$$\text{alſo } n^2d + (2a - d)n = 2S,$$

und die Gleichung wird quadratiſch. Man giebt ihr eine zur fernern Rechnung bequemere Form, wenn man ſie mit d multiplicirt, da dann

$$n^2d^2 + (2a - d)nd = 2Sd$$

gefunden wird. Nun ſetze man $nd = z$, ſo iſt $z^2 + (2a - d)z = 2Sd$, und man erhält

$$z = -(a - \tfrac{1}{2}d) \pm \sqrt{(2Sd + (a - \tfrac{1}{2}d)^2)},$$

$$\text{oder } z = \tfrac{1}{2}d - a \pm \sqrt{(2Sd + (\tfrac{1}{2}d - a)^2)}.$$

Hat man z gefunden, ſo erhält man ferner $n = \frac{z}{d}$.

Exempel.

Es ſey $S = 235$, $d = 5$, $a = 1$: ſo wird $\frac{1}{2}d - a = \frac{3}{2}$, $(\frac{1}{2}d - a)^2 = \frac{9}{4}$, $2Sd = 2 . 235 . 5 = 2350$. Folglich iſt $2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2 = 2352{,}25$, und die Quadratwurzel daraus $= 48{,}5$. Demnach iſt entweder $z = + 50$, oder $z = - 47$. Der erſte Werth giebt $n = \frac{z}{d} = 10$, der andre $n = - \frac{47}{5} = - 9\frac{2}{5}$. Die Urſache, warum hier zwey verſchiedene Werthe von n gefunden werden, iſt dieſe, weil man die Progreßion auch rückwärts fortſetzen kann, auf folgende Art:

Anzahl

Anzahl der Glieder $= n$,

$-4 \; -3 \; -2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; 7$

Glieder der Progreßion

$-24 \; -19 \; -14 \; -9 \; -4 \; 1 \; 6 \; 11 \; 16 \; 21 \; 26 \; 31$

Wenn man die Zahlen in der obern Reihe die Indices nennt, ſo gehört mit dem Index -9 in der Progreßion die Zahl -49, und mit dem Index $-9\frac{2}{5}$ die Zahl -51 zuſammen. Man ſetze $n = -9\frac{2}{5}$, und brauche dieſen Werth in der Gleichung $V = a + (n-1)d$, ſo findet man $V = 1 - 10\frac{2}{5} \cdot 5 = 1 - 52 = -51$, wie erfodert wird, und wenn man alsdenn

$$a + V = -50$$

mit $\frac{1}{2}n = -4,7$ multiplicirt,

ſo wird $\frac{1}{2}n(a + V) = 235 = S$, wie der Vorausſetzung gemäß iſt.

Die 15. Aufgabe.

55. **Das erſte Glied, der Exponent des Verhältniſſes eines jeden Gliedes zum nächſtvorhergehenden, und die Anzahl aller Glieder einer geometriſchen Progreßion ſind gegeben: man ſoll das letzte Glied finden.**

Aufl. Man ſetze das erſte Glied $= a$, den Exponenten $= m$, die Zahl aller Glieder $= n$, das letzte Glied $= V$, ſo hat die Progreßion die folgende Form

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & r & & n \\ a & ma & m^2a & m^3a & m^4a & m^5a & \ldots & m^{r-1}a & \ldots & m^{n-1}a. \end{matrix}$$

Jedes Glied entſteht, wenn das erſte Glied mit einer ſolchen Potenz des Exponenten m multiplicirt wird, wovon der Exponent um Eins kleiner iſt, als der mit dieſem Gliede zuſammengehörige Index. Demnach iſt $V = m^{n-1}a$.

Der 7. Lehrſatz.

56. Wenn man das erſte und letzte Glied der geometriſchen Progreßion in einander multiplicirt, ſo iſt das Product eben ſo groß, als das Product zweyer andern Glieder in einander, wenn vor dem einen bis zum erſten ſo viele Glieder voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten Gliede folgen.

Beweis. Ein Product bleibt von gleicher Gröſſe, wenn man einen Factor mit einer dritten Zahl multiplicirt, und dagegen den andern Factor mit eben der Zahl dividirt. Das iſt der Fall wenn man das erſte und letzte Glied der geometriſchen Progreſſion in einander multiplicirt hat, und nun das zweyte vom Anfang mit dem zweyten vom Ende, das dritte vom Anfang mit dem dritten vom Ende, u. ſ. f. multiplicirt, wie man gleich überſiehet, wenn man die Glieder der Progreßion in umgekehrter Ordnung ſo unter einander ſetzt:

a	ma	m^2a	m^3a	m^4a	m^5a	m^6a
m^6a	m^5a	m^4a	m^3a	m^2a	ma	$a.$

Das Product iſt immer m^6a^2.

Die 16. Aufgabe.

57. Die Summe aller Glieder der geometriſchen Progreßion zu finden, wenn das erſte und letzte Glied, nebſt dem Exponenten gegeben ſind.

Aufl. Man ſetze das erſte Glied $= a$, den Exponenten $= m$, das letzte Glied $= V$, die Anzahl aller Glieder $= n$, und die Summe aller Glieder $= S$, ſo iſt $V = m^{n-1}a$, alſo

$S - V = a + ma + m^2a + m^3a + \ldots + m^{n-2}a$, und

$m(S - V) = ma + m^2a + m^3a + m^4a + \ldots + m^{n-2}a.$

Ferner

Ferner iſt

$S - a = ma + m^2a + m^3a + m^4a + \ldots + m^{n-1}a$; alſo findet man $m(S - V) = S - a$. Weil nun a, V, m, gegeben ſind, und S geſucht wird, ſo dient die gefundene Gleichung, wenn man S als die unbekannte Gröſſe behandelt. Es wird nemlich $mS - S = mV - a$, alſo $S = \frac{mV - a}{m - 1}$.

Der 1. Zuſatz.

58. Aus der Gleichung $m(S - V) = S - a$ folgt auch die Proportion: es verhält ſich 1 zum Exponenten m, wie die Summe aller Glieder weniger das letzte S − V zur Summe aller Glieder weniger das erſte $S - a$.

Der 2. Zuſatz.

59. Für die Theorie von den geometriſchen Progreßionen hat man wiederum zwo Fundamentalgleichungen $V = m^{n-1}a$, und $m(S - V) = S - a$. Wenn alſo von den fünf Gröſſen a, m, n, V, S, drey gegeben ſind, ſo können die übrigen drey gefunden werden.

Die 17. Aufgabe.

60. Aus zwoen einfachen Gleichungen, wenn ſie zwo unbekannte Gröſſen x und y enthalten, eine unbekannte Gröſſe x ſo wegzuſchaffen, daß man aus beyden gegebenen Gleichungen eine dritte herleitet, die allein y mit bekannten Gröſſen verbunden enthält.

1. Aufl. Man ſehe die Gröſſe y als bekannt an, und ſuche aus jeder Gleichung den Werth von x nach den Regeln des 31. §. Hiernächſt ſetze man beyde Werthe einander gleich, ſo hat man eine Gleichung die nur y enthält.

Exempel.

Es ſey $x + y = a$, und $fx + gy = bb$, ſo giebt die erſte Gleichung $+ = a - y$, die zweyte $x = \frac{bb - gy}{f}$, und beydes gleich geſetzt giebt $a - y = \frac{bb - gy}{f}$, oder $f(a - y) = bb - gy$. Eine Probe dieſes Verfahrens hat die Auflöſung der Aufgabe im 54. §. ſchon gegeben.

2. Aufl. Nachdem der Werth von x aus der einen Gleichung hergeleitet iſt, kann man ihn auch ſtatt x in der andern ſubſtituiren, ſo wird ebenfalls x weggeſchaft. Setzt man im vorigen Exempel den Werth $x = a - y$ in der zweyten Gleichung ſtatt x, ſo wird $f(a - y) + gy = bb$, alſo wie vorhin $f(a - y) = bb - gy$.

3. Aufl. Man kann beyde Gleichungen allemahl ſo verändern, daß ſie unter folgenden allgemeinen Ausdrücken begriffen ſind:

$$ax + by = cc$$
$$fx + gy = hh.$$

Man multiplicire jede Gleichung mit den Coefficienten, worin x in der andern Gleichung multiplicirt iſt, ſo erhält man

$$afx + bfy = ccf,$$
$$afx + agy = ahh.$$

Man ſubtrahire eine Gleichung von der andern, ſo wird $(bf - ag)y = ccf - ahh$, und x iſt weggeſchaft.

Zuſatz.

61. Aus dreyen Gleichungen, wenn ſie drey unbekannte Gröſſen, x, y, z, enthalten, kann man auf völlig ähnliche Art eine Gleichung herleiten, die nur eine davon enthält. Aus zweyen

ſchaft

ſchaft man zuerſt x weg, und aus einer von dieſen mit der dritten verbunden ſchaft man x ebenfalls weg, ſo hat man zwo Gleichungen, die nur noch y und z enthalten. Aus dieſen beyden kann y weggeſchaft werden, ſo kommt man auf eine Gleichung die nur noch z enthält. Aus der erſten und zweyten von den Gleichungen $x+y=a$, $x+z=b$, $fx+gy=hz$, erhält man $a-y=b-z$, aus der zweyten und dritten aber $b-z=\frac{hz-gy}{f}$, alſo $fb-fz=hz-gy$, und es wird $y=\frac{(h+f)z-bf}{g}$, ſo wie auch $y=a-b+z$. Mithin iſt ferner $a-b+z=\frac{(h+f)z-bf}{g}$, oder $(a-b+z)g=(h+f)z-bf$, und dieſe Gleichung enthält allein z.

Die 11. Erklärung.

62. Eine Aufgabe heißt eine **beſtimmte Aufgabe**, wenn ſie auf eben ſo viele Gleichungen leitet, als unbekannte Gröſſen geſucht werden ſollen. Kann man im Gegentheil nicht eben ſoviele Gleichungen daraus herleiten, als man Gröſſen finden ſoll, ſo iſt es eine unbeſtimmte Aufgabe.

Die 18. Aufgabe.

63. **Eine beſtimmte Aufgabe aufzulöſen.**

Aufl. Man leite ſo viele Gleichungen, als unbekannte Gröſſen z, y, x, u. ſ. f. zu ſuchen ſind, aus den Bedingungen der Aufgabe her. Aus dieſen Gleichungen ſchaffe man alle unbekannte Gröſſen bis auf eine z weg, ſo erhält man eine Gleichung, woraus der Werth von z gefunden wird. Unter

den Gleichungen, die auf die letzte geleitet haben, müſſen ſolche ſeyn, die auſſer z noch x oder y enthalten: in dieſer ſetze man den gefundenen Werth ſtatt z, ſo erhält man den Werth von x oder y in lauter bekannten Gröſſen. Man gehe weiter zurück auf die Gleichungen, die auſſer einer der beyden vorigen, oder allen beyden, noch die dritte enthalten, und verfahre wie vorhin, ſo erhält man den Werth der dritten Gröſſe, und kann ſo fortſahren, bis alle unbekannte Gröſſen beſtimmt ſind.

Exempel. Wendet man dieſe Schlüſſe auf die drey Gleichungen im 61. §. an, ſo findet man aus der Gleichung $(a-b)g+gz=(h+f)z-bf$ den Werth $z=\frac{(a-b)g+bf}{h+f-g}$. Alſo ferner $x=b-\frac{(a-b)g+bf}{h+f-g}$, und $y=a-x=a-b+\frac{(a-b)g+bf}{h+f-g}$.

Zuſatz.

64. Wenn die Aufgabe unbeſtimmt iſt, alſo nicht genug Gleichungen vorhanden ſind, um auf dieſe Art alle unbekannte Gröſſen zu finden; ſo dienen doch die Gleichungen, worauf die Aufgabe leitet dazu, daß man findet, wie einige unbekannte Gröſſen von den übrigen abhängen; wie alſo jene gefunden werden können, wenn dieſe willkührlich angenommen oder ſonſt beſtimmt werden.

Die Mechaniſchen Wiſſenſchaften.

Erſte Gründe
der
Statik feſter Körper.

Die 1. Erklärung.

1. Die um uns her befindlichen Körper ſind aus Beſtandtheilen zuſammen geſetzt, welche die Materie oder Maſſe des Körpers ausmachen. Bley, Eiſen, ſind Maſſen, eine bleyerne oder eine eiſerne Kugel, die daraus verfertigten Körper.

Die 2. Erklärung.

2. Zwiſchenräume in einer Maſſe ſind ſolche Theile des Raums, den die Maſſe im ganzen einzunehmen ſcheint, welche wenigſtens nicht mit Materie von eben der Art angefüllet ſind. Je mehr Materie in einerley Raum beyeinander, je geringer alſo die ganze Summe der Zwiſchenräume iſt, deſto dichter iſt die Maſſe. Eine gleichförmig dichte, oder in allen ihren Theilen gleichartige Maſſe iſt eine ſolche, worin Materie und Zwiſchenräume ſo gleichförmig vertheilt ſind, daß gleichgroſſe Theile des Raums, den die Maſſe im ganzen einnimmt, gleichviele Maſſe enthalten. Die ungleichförmig dichte Maſſe iſt von entgegengeſetzter Beſchaffenheit.

heit. Gleichförmig oder ungleichförmig dichte Körper ſind ſolche, die aus gleichförmig oder ungleichförmig dichter Maſſe beſtehen.

Zuſatz.

3. Wenn man die Menge der Beſtandtheile einer gleichförmig dichten Maſſe zählen könnte, ſo würde man diejenige Menge, welche den Raum eines Cubicfuſſes oder Cubiczolles einnimmt, für das Maaß ihrer Dichtigkeit annehmen können. Denn eine andre gleichförmig dichte Maſſe hätte 2mahl, 3mahl ſoviele Dichtigkeit, die in einem eben ſo groſſen Raum 2mahl oder 3mahl ſoviele Beſtandtheile enthielte.

Die 1. Erfahrung.

4. Alle um uns her befindliche Körper fallen, wenn ſie nicht unterſtützt ſind, gegen die Erde herab. Ein Stein von mäßiger Gröſſe, ein Stück Bley, oder ſonſt etwas dergleichen, wenn wir es mit der Hand unterſtützen, drückt die Hand. Wir haben auch allen Grund dafür zu halten, daß jede andre Unterſtützung von dem Körper ebenfalls Druck leide.

Die 3. Erklärung.

5. Die Bewegung beſtehet in einer ununterbrochenen Veränderung des Orts, und wir nennen alles das eine bewegende Kraft, wovon wir urtheilen, daß es eine Bewegung entweder wircklich hervorbringe, oder doch hervorzubringen ſtrebe. Die Kraft, welche die Körper unterwärts drückt, ſo lange ſie unterſtützt ſind, und gegen die Erde zu beweget, wenn es keine Unterſtützung hindert, nennen wir die Schwere.

Die

Die 4. Erklärung.

6. Der Druck eines ſchweren Körpers gegen das, was ihn unterſtützt, heißt ſein Gewicht. Man nennt auch wohl die ſchweren Körper ſelbſt Gewichte, wenn man bey denſelben nichts weiter als die beſtimmte Gröſſe des Drucks gegen dasjenige betrachtet, was einen ſolchen Körper herab zu fallen hindert.

Der 1. Zuſatz.

7. Ein jedes auch noch ſo kleines Theilchen der uns bekannten Körper iſt ſchwer, und man hat Grund, wenigſtens bis auf weitere Prüfung anzunehmen, daß gleiche materielle Theilchen gleiches Gewicht haben. Das Gewicht eines jeden ſchweren Körpers iſt die Summe der Gewichte aller ſeiner Elementartheilchen: demnach ſind die Gewichte ſolcher Körper gleich groß, die gleichviele Maſſe haben.

Der 2. Zuſatz.

8. Doppelt ſoviel Maſſe hat doppelt ſoviel Gewicht, als die einfache Maſſe, mithin die dreyfache, vierfache Maſſe auch dreymahl oder viermahl ſoviel Gewicht, als die einfache. Demnach verhalten ſich die Gewichte der Körper, wie ihre Maſſen.

Der 3. Zuſatz.

9. Wenn es gleichartige und gleichförmig dichte Körper ſind, ſo enthalten gleich groſſe Körper gleichviele Maſſe: alſo haben gleich groſſe Körper dieſer Art auch gleiches Gewicht. Ueberdem enthält der doppelt oder dreymahl gröſſere Körper auch doppelt oder dreymahl mehr Maſſe; (2. §.) mithin verhalten ſich die Gewichte gleichartiger und gleichförmig dichter Körper wie ihre geometriſche Gröſſe. Zwey Cubiczoll Bley,

Waſſer, Eiſen, ſind doppelt ſo ſchwer, als ein Cubiczoll Bley, Waſſer oder Eiſen.

Die 5. Erklärung.

10. Das eigenthümliche oder ſpecifiſche Gewicht einer Maſſe iſt das Gewicht eines Cubicfuſſes oder eines Cubiczolles dieſer Maſſe, nachdem man die geometriſche Gröſſe des Raums, den ſie einnimmt, in Cubicfuſſen oder Cubiczollen ausdrückt.

Zuſatz.

11. Das eigenthümliche Gewicht einer Maſſe giebt zugleich das Maaß ihrer Dichtigkeit ab. Wenn ein Cubiczoll Queckſilber 14 mahl ſchwerer als ein Cubiczoll Waſſer iſt, ſo enthält ein Cubiczoll Queckſilber 14mahl mehr Maſſe, (8. §.) und iſt folglich 14mahl dichter als Waſſer. (3. §.)

Die 1. Aufgabe.

12. **Das eigenthümliche Gewicht einer gleichförmig dichten Maſſe zu finden.**

Aufl. 1. Aus einer feſten Maſſe kann man einen Körper verfertigen laſſen, der die Geſtalt und Gröſſe eines Cubiczolles, oder eines Cubicfuſſes hat, und das Gewicht deſſelben vermittelſt einer richtigen Wage ſuchen. Auch kann man einen hohlen Würfel von der Art verfertigen laſſen. Wenn derſelbe alsdenn zuerſt leer, hiernächſt aber mit Waſſer oder einer andern flüßigen Maſſe angefüllt gewogen wird: ſo findet man das Gewicht der flüßigen Maſſe, die den Raum des Würfels ausfüllt, wenn man das Gewicht des leeren Würfels von dem Gewicht des mit der flüßigen Maſſe angefüllten Würfels ſubtrahirt.

2. Es

2. Es iſt indeſſen eben nicht nothwendig, daß man das Gewicht eines Cubicfuſſes, oder Cubiczolles der Maſſe unmittelbar vermittelſt der Wage ſucht; ein Cylinder, ein Priſma, und jeder andre Körper, was er auch für eine Geſtalt, und Gröſſe hat, kann dazu dienen, wenn man nur die Gröſſe des Raums, den die Maſſe ausfüllt, im Cubicmaß durch Rechnung finden kann. Man ſucht alsdenn das Gewicht der Maſſe wie gewöhnlich in Pfunden, oder Unzen, und dividirt dieſe Zahl mit der Anzahl der Cubiczolle, welche die Gröſſe des Raums ausmachen, den die Maſſe ausfüllt: ſo hat man das Gewicht eines Cubiczolles der Maſſe, alſo ihr eigenthümliches Gewicht.

Exempel. $2\frac{3}{8}$ Cubiczoll Waſſer Rheinl. Maaß betragen im Cöllniſchen Gewicht, 998 Gran, alſo 1 Cubiczoll Waſſer 296 Gran, und 1 Cubicfuß Waſſer $44\frac{1}{2}$ Pfund Cöllniſch.

Der 1. Zuſatz.

13. Die geometriſche Gröſſe eines Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit ſey $= V$, das ſpecifiſche Gewicht ſeiner Maſſe $= G$, und das Gewicht, des ganzen Körpers $= P$; ſo ſind das drey Gröſſen, die ſo von einander abhängen, daß allemahl die dritte leicht gefunden wird, wenn zwey davon bekannt ſind. Es iſt nemlich $G = \frac{P}{V}$: alſo $P = G.V$ und $V = \frac{P}{G}$.

Der 2. Zuſatz.

14. Man kann unter den Bekannten gleichförmig dichten Maſſen in der Natur eine wählen, und mit ihrem ſpecifiſchen Gewicht das eigenthümliche Gewicht andrer gleichförmig dichter Maſſen verglei-

chen. Im folgenden wird gezeigt werden, daß man die ſpecifiſchen Gewichte andrer Maſſen am leichteſten mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers vergleiche: daher kommt es, daß man für viele andre bekannte Maſſen in der Natur die Zahlen gesucht hat, welche angeben, wie vielmahl das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers im ſpecifiſchen Gewicht der übrigen Maſſen enthalten ſey. Die Redensart: Queckſilber iſt 14mahl ſchwerer als Waſſer, will alsdenn ſagen: jede Menge Queckſilber ſey 14mahl ſchwerer als eine eben ſo groſſe Menge Waſſer. Eben die Zeichen drücken zugleich aus, wievielmahl die ſchwerere Maſſe dichter, als die leichtere ſey.

Der 3. Zuſatz.

15. Folgende kleine Tabelle giebt das eigenthümliche Gewicht einiger Maſſen in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers an.

Fein Gold, iſt —	19,640	mahl ſchwerer als Waſſer
fein Silber — —	11,091	
Bley — — —	11,325	
Kupfer — —	8,784	
Eiſen — — —	7,645	
Engliſches Zinn —	7,295	
Eichenholz — —	0,929	
Tannenholz — —	0,550	
ganz reines Queckſilber	14,000	
engliſches Queckſilber	13,593	
rectificirter Weingeiſt	0,866	

Will man nun wiſſen, wieviel $2\frac{1}{2}$ Rheinländ. Cubiczoll Silber im Cöllniſchen Gewicht betragen, ſo findet man

1 Rheinl.

1 Rheinl. Cubiczoll Silber wiegt 11,091 mahl 296 Gran Cöllniſch, alſo 3283 Gran, oder 6 Unzen 6 Drachmen 2 Scrupel 3 Gran: mithin betragen $2\frac{1}{2}$ Cubiczoll Silber am Gewicht 17 Unzen 2 Drachmen $7\frac{1}{2}$ Gran.

Die 6. Erklärung.

16. Gegen einen Körper kann eine Kraft ſo drücken, daß nur ein Theil allein den Druck unmittelbar leidet, oder nur einige Theile allein dem Druck unmittelbar ausgeſetzt ſind. Alsdenn würde eine Zerreiſſung der Beſtandtheile deſſelben erfolgen, wenn nicht ihr Zuſammenhang unter einander es hinderte, und eine Maſſe, deren Beyſtandtheile in einer ſolchen Verbindung ſind, nennt man eine feſte Maſſe. Wenn mehr Kräfte zugleich auf eine Maſſe unter ſolchen Umſtänden wirken, daß keine Bewegung erfolgen kann, ſo ſind ſie im Gleichgewicht: und die Statik muß die Geſetze des Gleichgewichts ſolcher Kräfte erklären, die auf feſte Maſſen wirken.

Die 7. Erklärung.

17. Eine ſchwere feſte Maſſe kann an einem Faden ruhig hängend erhalten werden, und die grade Linie nach welcher der Faden alsdenn gedehnt iſt, ſtellt zugleich die Richtung vor, nach welcher der Körper gegen die Erde herab fällt, wenn der Faden zerreißt, oder doch ſonſt nicht mehr gehalten wird. Dieſe grade Linie heißt die Richtung der Schwere, und die Erfahrung lehrt, daß ſie auf der Erde, ſoweit ſie uns eine ebene Fläche zu ſeyn ſcheint, ſenkrecht ſey.

Zuſatz.

18. Wofern die Erde eine Kugel iſt, ſo laufen die Richtungen der Schwere in ihrem Mittelpunct zuſammen.

Die 8. Erklärung.

19. Jede mit der Richtung der Schwere parallele Linie heißt eine verticale, lothrechte oder bleyrechte Linie, und jede Ebene, auf welcher die Richtung der Schwere ſenkrecht iſt, nennt man eine horizontale oder wagrechte Ebene. Auch eine grade Linie liegt wagrecht oder horizontal, wenn ſie von der Richtung der Schwere ſenkrecht geſchnitten wird.

Zuſatz.

Wagrechte Linien und Ebenen ſind alſo mit der Erdfläche, ſoweit ſie eben zu ſeyn ſcheint, parallel.

Die 9. Erklärung.

20. Eine Ebene ſteht vertical oder lothrecht, wenn jede grade Linie, die aus einem Punct der Ebene lothrecht herab gelaſſen wird, in der Ebene liegt. Die Ebene iſt alsdenn auf jeder horizontalen Ebene ſenkrecht. (§. Geom.)

Die 10. Erklärung.

95 F. 21. Eine kreisrunde feſte Scheibe BDFG, die ſo unterſtützt iſt, daß ſie ſich um ihren Mittelpunct C zwar frey drehen, ſonſt aber nicht weichen kann, heißt eine Rolle. Hier wird ſie anfangs ſo betrachtet, als wenn ſie ſelbſt kein Gewicht hätte. Wegen des Gebrauchs, wozu ſie dienen ſoll, muß ſie am Umfange eine Vertiefung haben, damit man eine biegſame Schnur herumlegen und Gewichte daran hängen, oder auch ſonſt Kräfte anbringen kann, die an der Schnur ziehen.

Der

Der 1. Grundſatz.

22. Zwo gleiche Kräfte, wenn ſie die Rolle auf entgegengeſetzte Art zu drehen ſtreben, und ihre Richtungen BA, DE, in der Ebene der Rolle den Umfang derſelben berühren, erhalten einander im Gleichgewicht.

Zuſatz.

23. Wenn bey E an dem Faden ABDE ein Gewicht P hängt, und der Faden bey A befeſtiget iſt; ſo iſt zwar die urſprüngliche Richtung DE, nach welcher das Gewicht den Faden zieht, vertical: allein der Punct A wird nach der Richtung AB eben ſo ſtark gezogen, als ihn das Gewicht P lothrecht herab ziehen würde, wenn es an dem Faden frey, ohne über die Rolle geführt zu ſeyn, herab hienge. Demnach kann man durch eine Rolle zuwege bringen, daß ein Gewicht nach jeder verlangten Richtung ſo ſtark zieht, als es nach ſeiner urſprünglichen lothrechten Richtung ziehen würde. Auch läßt ſich die Gröſſe einer jeden bewegenden Kraft auf die Art ganz beſtimmt und verſtändlich ausdrücken, wenn man ein Gewicht angiebt, das nach lothrechter Richtung eben ſo ſtark, als die bewegende Kraft in ihrer Richtung drückt oder ziehet. 96 F.

Die II. Erklärung.

24. Eine grade unbiegſame Linie BC, die man ſich ohne Schwere, und in einem gewiſſen Punct A ſo unterſtützt vorſtellet, daß ſich die Linie zwar um denſelben drehen, ſonſt aber nicht in Bewegung kommen kann, nennt man einen mathematiſchen Hebel, den unterſtützten Punct ſeinen Ruhepunct, und was ihn daſelbſt hält, die Unterlage. 97 F.

Die 12. Erklärung.

25. Kräfte, die den Hebel auf entgegengeſetzte Art zu drehen ſtreben, können einander im Gleich-
97 F. gewicht erhalten. Iſt alsdenn die eine an B, die andre auf der andern Seite des Ruhepuncts an C angebracht, ſo können ſie nach übereinſtimmigen Richtungen ziehen, und dieſer Hebel der erſten Art kann auch ein doppelarmiger Hebel heiſſen. Am
98 Hebel der andern Art liegen die Stellen B und C,
99 F. an welchen die Kräfte angebracht ſind, an einer Seite des Ruhepuncts.

Die 13. Erklärung.

26. Wenn am Hebel Gewichte ziehen oder drücken, ſo ſiehet man gewöhnlich das gröſſere als die Laſt, das kleinere als die Kraft an, die jene Laſt im Gleichgewicht erhalten ſoll. Hier werden nur die Fälle vornemlich betrachtet werden, wenn die Richtungen der Kräfte auf dem Hebel ſenkrecht ſind, da dann der Hebel horizontal liegen muß, wenn die Gewichte in ihrer urſprünglichen Richtung dran ziehen.

Die 14. Erklärung.

106 27. Einen gradlinichten Winkel BAC, deſſen
Fig. Schenkel AB, AC, unbiegſame grade Linien ohne Schwere, und bey A ſo an einander befeſtiget ſind, daß wenn der eine um A gedrehet wird, der andre in eben die Bewegung kommen muß, nennt man einen Winkelhebel. Der Punct A muß zwar gehalten werden, jedoch ſo, daß die Umdrehungsbewegung frey bleibt. Eine Kraft P an einem Schenkel in B, und eine andre Q am andern Schenkel in C ſo angebracht, daß ſie den Hebel auf entgegengeſetzte

geſetzte Art zu drehen ſtreben, können einander im Gleichgewicht erhalten.

Der 2. Grundſatz.

28. Wenn der Hebel BC horizontal liegt, und 97 F. die Gewichte P, Q, welche an den Stellen B, C, lothrecht herab ziehen, einander im Gleichgewicht erhalten; ſo trägt die Unterlage A die Summe der Gewichte.

Der 3. Grundſatz.

29. Gleiche Gewichte, die am doppelarmigen Hebel in gleichen Entfernungen vom Ruhepunct hängen, erhalten einander im Gleichgewicht. Ungleiche Gewichte in gleichen Entfernungen aber erhalten einander nicht im Gleichgewicht, das grössere überwiegt das kleinere.

Der 1. Lehrſatz.

30. **Wenn ein Paar Gewichte am Hebel der einen Art im Gleichgewicht ſind, ſo ſind eben die Gewichte in eben den Entfernungen auch am Hebel der andern Art im Gleichgewicht.**

Beweis. Wenn P und Q in B und C angebracht 97 F. am doppelarmigen Hebel im Gleichgewicht ſind; ſo nehme man AD = AC, hänge an D ein Gewicht R = Q, und laſſe an eben der Stelle D ein Gewicht S = R = Q aufwärts ziehen: ſo ſind alle vier Gewichte noch im Gleichgewicht. Aber auch R in D, und Q in C ſind im Gleichgewicht: (29. §.) alſo müſſen auch P und S im Gleichgewicht ſeyn.

Wüſte man umgekehrt, daß P mit S im Gleichgewicht ſey; ſo könnte man in D und C die Gewichte R und Q beyde = S anbringen, da dann wiederum alle vier Gewichte in Gleichgewicht bleiben müſten.

 Weil

Weil aber R und S für ſich im Gleichgewicht ſind; ſo müſten auch P und Q im Gleichgewicht ſeyn.

Der 2. Lehrſatz.

31. Wenn das eine Gewicht doppelt ſo groß als das andre, und die Entfernung des einfachen Gewichts vom Ruhepunct doppelt ſo groß iſt, als die Entfernung des doppelten vom Ruhepunct; ſo ſind beyde am Hebel im Gleichgewicht.

98 F. Beweis. Wenn CA = CB iſt, an A und B aber die gleichen Gewichte P und R hängen, ſo iſt alles im Gleichgewicht, wenn C unterſtützt iſt. Auf die Unterlage in C drückt alsdenn die Summe der Gewichte P + R = 2P. An C ſey eine Schnur befeſtiget, oben bey D über eine Rolle geführt, und ein Gewicht Q = 2P daran aufgehängt; ſo bedarf es in C keiner Unterlage, weil nun alle drey Gewichte P, Q, R, im Gleichgewicht ſind. Das Gewicht R hindert, daß der Punct A nicht ſteigen kann, und ſtatt deſſen kann in A eine Widerlage angebracht ſeyn, ſo bedarf es des Gewichts R nicht. Alsdenn iſt das einfache Gewicht P in der doppelten Entfernung AB mit dem doppelten Gewicht Q in der einfachen Entfernung AC im Gleichgewicht. Der Hebel AB iſt einarmig, aber eben darum gilt daſſelbe Geſetz auch für den doppelarmigen Hebel. (30. §.)

Zuſatz.

101 Fig. 32. Beym doppelarmigen Hebel AB ſey CB = 2CA, Q = 2P, und in C ziehe ein Gewicht R = P + Q = 3P an einer über die Rolle E geführten Schnur aufwärts, ſo iſt alles im Gleichgewicht. (31. §.)

(31. §.) Statt des Gewichts Q bringe man in A eine Widerlage an, die es hindert, daß A nicht ſteigen kann, ſo iſt das dreyfache Gewicht R = 3P in der einfachen Entfernung CA mit dem einfachen Gewicht P in der dreyfachen Entfernung AB im Gleichgewicht. Wenn alſo CB = 3CA und P = 3Q genommen wird, ſo folgt wie vorhin, daß R = 4P in der Entfernung CA mit P in der Entfernung AB = 4CA im Gleichgewicht ſey. Der Schluß gilt immer weiter für die nächſtfolgende um Eins gröſſere Zahl.

Der 3. Lehrſatz.

33. **Wenn das Verhältniß zweyer Gewichte am Hebel in umgekehrter Ordnung einerley iſt, mit dem Verhältniß der Entfernungen vom Ruhepunct; ſo ſind ſie im Gleichgewicht.**

Beweis. Wenn der Exponent dieſer gleichen Verhältniſſe eine ganze Zahl iſt; ſo erhellet die Richtigkeit des Satzes aus dem 32. §. Wäre $P = \frac{3}{4}Q$, 102
alſo $4P = 3Q$, und $AC = \frac{3}{4}AB$: ſo nehme man Fig.
$AD = \frac{1}{4}AB$, $AE = \frac{1}{3}AC$, alſo $AD = AE$. In D hänge man ein Gewicht $S = 3Q$, in E ein Gewicht $R = 4P$; ſo iſt R mit P, und S mit Q im Gleichgewicht, (32. §.) mithin bleibt der Hebel in Ruhe. Aber R und S ſind für ſich im Gleichgewicht, (29. §.) demnach müſſen auch P und Q im Gleichgewicht ſeyn. Der Beweis findet allemahl ſeine Anwendung, was man auch ſonſt für Brüche ſtatt $\frac{3}{4}$ ſetzen will.

Der 1. Zuſatz.

34. Wenn in C ein Gewicht *g* aufgehängt wird, das

das gröſſer oder kleiner iſt als $\frac{AB}{AC}P$, ſo kann es mit P nicht im Gleichgewicht ſeyn. Man nehme AF = AC, und hnege in F das Gewicht $p = q$, ſo ſind p und q im Gleichgewicht. Ferner iſt $Q = \frac{AB}{AC}P$ in C mit P in B im Gleichgewicht. Wenn nun q mit P das Gleichgewicht hielte, ſo wäre auch p mit Q im Gleichgewicht, dem 29. §. entgegen.

Der 2. Zuſatz.

35. Wenn Kraft und Laſt am Hebel im Gleichgewicht ſind, ſo iſt ihr Verhältniß gegen einander in umgekehrter Ordnung gleich dem Verhältniß der Entfernungen vom Ruhepunct.

Der 3. Zuſatz.

103 Fig. 35. Wenn ſich der Hebel um A drehet, und das Gewicht P in der lothrechten Richtung um die Tiefe BD ſinkt; ſo ſteigt zugleich Q um die Höhe EC. Weil nun ABD und ACE ähnliche Dreyecke ſind, ſo iſt BD : CE = AD : AE, und AD : AE = Q : P, (33. §.) mithin Q : P = BD : CF, oder es verhält ſich die Laſt zur erhaltenden Kraft umgekehrt, wie der **Weg der Kraft zum Wege der Laſt**, wenn diejenigen Wege verſtanden werden, welche Kraft und Laſt nach gehobenen Gleichgewicht jede in ihrer Richtung in gleicher Zeit zurück legen würden.

Die 15. Erklärung.

36. Das **Moment**, oder wie es die practiſchen Schriftſteller nennen, die Abwage einer Kraft am Hebel iſt das Product, welches gefunden wird, wenn man die Kraft mit ihrer Entfernung vom Ruhepunct

hepunct multiplicirt. In eben dem Sinne braucht man den Ausdruck: Moment der Laſt.

Zuſatz.

37. Kraft und Laſt erhalten einander am Hebel im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich ſind, oder wenn ſie gleiche Abwage haben.

Der 4. Lehrſatz.

38. Wenn Kraft und Laſt am Hebel *BC* 103
gleiche Abwage haben, ſo bleibt derſelbe auch Fig.
in jeder gegen den Horizont geneigten Lage in Ruhe.

Beweis. Wenn A ſo gehalten wird, daß ſich der Hebel zwar um dieſen Punct frey drehen, ſonſt aber nicht weichen kann; wenn ferner BP, CQ, die lothrechten Richtungen der Gewichte vorſtellen; ſo ſind BP, CQ parallel, und in der Ebene dieſer Parallellinien liegt auch BC. In derſelben Ebene ſey DE wagrecht, ſo ſind AD, AE, die Entfernungen der Gewichte P und Q, und man hat vermöge der Vorausſetzung AD . P = AE . Q, alſo P : Q = AE : AD. Man ſtelle ſich DE als einen andern Hebel vor, der mit dem vorigen BC bey A feſt verbunden iſt, jedoch ſo, daß die Umdrehungsbewegung um A frey bleibt. An D ziehe ein Gewicht R = P, an E ein Gewicht S = Q aufwärts: ſo iſt auch R : S = AE : AD, und die Gewichte R und S ſind im Gleichgewicht. Ueberdem ſtellen nun DAB, CAE ein Paar Winkelhebel vor, woran Q und S, ſo wie P und R für ſich im Gleichgewicht ſind, wie für ſich klar iſt: alſo erhalten alle vier Kräfte den Hebel in Ruhe. Weil aber auch R und S für ſich allein im Gleichgewicht ſind, ſo

folgt,

folgt, daß P und Q den Hebel ebenfalls in Ruhe erhalten.

Die 16. Erklärung.

39. Der Punct im gradlinichten Hebel, welcher unterſtützt werden muß, wenn der mit Gewichten beſchwerte Hebel ruhen ſoll, heißt der gemeinſchaftliche Schwerpunct der Gewichte. Dieſer Punct allein leidet alsdenn einen Druck, welcher der Summe der Gewichte am Hebel gleich iſt.

Die 2. Aufgabe.

102 Fig. 40. Die Länge *BC* des Hebels iſt gegeben, und die Gröſſe der in *B* und *C* hängenden Gewichte *P*, *Q*, man ſoll den gemeinſchaftlichen Schwerpunct *A* finden.

Aufl. Es wird erfodert, daß P : Q = AC : AB ſey, alſo P + Q : Q = AC + AB : AB, und P + Q : P = AC + AB : AC. (§. Geom.) Es iſt aber AC + AB die gegebene Länge des Hebels AB: alſo kann man BA oder CA nach der Regel detri finden.

Zuſatz.

104 Fig. 41. Wenn ein feſter Körper MN nur zwey ſchwere Elementartheilchen P, Q, hätte, ſo würde es in der graden Linie PQ für beyde einen gemeinſchaftlichen Schwerpunct A geben, und es wäre ſoviel, als wenn A allein ein ſchweres Element wäre, und das Gewicht P + Q hätte. Kommt noch ein ſchweres Element R hinzu, ſo hat es mit dem Gewicht P + Q einen gemeinſchaftlichen Schwerpunct in B, und es iſt ſoviel, als wenn B allein das Gewicht P + Q + R hätte. Es ſey noch das vierte Element S ſchwer, es mag mit den vorigen dreyen in einerley Ebene liegen, oder nicht; ſo hat das in B befindliche

liche Gewicht P + Q + R, mit dem Gewicht S einen gemeinſchaftlichen Schwerpunct in C, und es iſt ſo viel, als wenn der Punct C allein das Gewicht P + Q + R + S hätte. So gilt der Schluß von jeder Anzahl ſchwerer Elemente des Körpers auf die um Eins gröſſere Anzahl.

Die 17. Erklärung.

42. Man nennt den Schwerpunct eines feſten Körpers denjenigen Punct, welcher unterſtützt werden muß, wenn der Körper in jeder Lage ruhen ſoll, und der alsdenn zugleich dem Druck vom ganzen Gewicht des Körpers ausgeſetzt iſt.

Der 1. Zuſatz.

43. Jeder feſte Körper hat einen Schwerpunct: denn es iſt der gemeinſchaftliche Schwerpunct aller ſeiner Elementartheile. (41. §.)

Der 2. Zuſatz.

44. Der feſte Körper kann ruhend erhalten werden, wenn auch nur ein Punct unterſtüzt iſt, der in der Verticallinie durch den Schwerpunct liegt. Wofern derſelbe oberhalb des Schwerpuncts liegt, ſo wird der Körper hangend erhalten. Iſt dagegen der Körper unterhalb ſeines Schwerpuncts unterſtützt, ſo iſt ſein Stand deſto ſicherer, je gröſſer die Grundfläche iſt, womit er an das, was ihn unterſtützt, anſchließt.

Die 18. Erklärung.

45. Eine Ebene, die den Körper durch ſeinen Schwerpunct ſchneidet, heißt eine Ebene der Schwere, und eine grade Linie durch des Körpers Schwerpunct ein Durchmeſſer der Schwere.

Der

Der 1. Zuſatz.

46. Wenn die Maſſe eines Körpers durch ſeinen ganzen Raum gleichförmig vertheilt iſt; ſo haben gleich groſſe Theilchen deſſelben auch gleiches Gewicht. Eine Ebene, die einen ſolchen Körper ſchneidet, iſt eine Ebene der Schwere, wenn nicht allein die ganze Maſſe des Körpers, mithin der Raum, welchen ſeine Maſſe einnimmt, dadurch halbirt wird, ſondern auch mit jedem Theilchen auf der einem Seite dieſer Ebene ein eben ſo groſſes Theilchen auf der andern Seite in gleicher Entfernung zuſammen gehört. Der Punct, worin drey Ebenen der Schwere einander ſchneiden, iſt des Körpers Schwerpunct.

Der 2. Zuſatz.

47. Der Schwerpunct einer gleichförmig dichten Kugel iſt mit ihrem Mittelpunct einerley, der Schwerpunct eines ſolchen Cylinders liegt in der Mitte ſeiner Axe.

Der 3. Zuſatz.

48. Eigentlich giebt es keine ſchwere Ebenen oder ſchwere grade Linien in der Natur. Wenn aber die Maſſe einer graden cylindriſchen oder priſmatiſchen Stange nach ihrer Länge gleichförmig vertheilt iſt, ſo kann man ſie als eine grade Linie betrachten, deren Schwerpunct in ihrer Mitte liegt.

Der 4. Zuſatz.

49. Sehr dünne Metallblätter und andre ſehr dünne Körper die zwar eigentlich in die Klaſſe der Priſmen oder Cylinder gehören würden, aber ſehr kleine Höhen haben, kann man als ſchwere Ebenen von gleichförmiger Dichtigkeit anſehen, wenn ihre Maſſe der Grundfläche proportional iſt. In einem ſolchen

ſolchen Sinn kann man auch vom Schwerpunct ebener Figuren reden. In dem Sinne kann man ſagen, daß des Kreiſes Schwerpunct in ſeinem Mittelpunct liegt.

Anmerkung.

Mehrere Lehren vom Schwerpunct findet man im 2ten Theil der Anfangsgründe im 71. u. f. §. §. der Statik.

Die 3. Aufgabe.

50. Die ſchwere cylindriſche oder priſmatiſche Stange *BC* ſoll als Hebel dienen, ihr Gewicht *M*, die Stelle des Schwerpuncts *G*, und die Länge der Stange ſind bekannt: man ſoll die Laſt *Q* finden, die in *C* aufgehängt mit der Kraft *P* in *B* das Gleichgewicht hält. 100 Fig.

Aufl. Man kann BC als einen mathematiſchen Hebel betrachten, woran auſſer der Kraft P in B und der Laſt Q in C noch ein drittes Gewicht M in G hängt, welches ſchon mit einem Theil der Laſt Q das Gleichgewicht hält. Man ſetze dieſen Theil $= m$, den übrigen $= q$, welcher mit P im Gleichgewicht iſt: ſo erhält man $m = \frac{AG}{AC} . M$, und $q = \frac{AB}{AC} P$,

alſo $Q = m + q = \frac{AG . M + AB . P}{AC}$.

Der 1. Zuſatz.

51. Dieſer Ausdruck giebt $AC . Q = AG . M + ABP$, oder die Summe der Momente muß an der einen Seite der Unterlage A ſo groß als an der andern Seite ſeyn. Wäre alſo die Laſt Q gegeben, und man ſollte die Kraft P ſuchen; ſo fände man

$AB \cdot P = AC \cdot Q - AG \cdot M$, mithin $P = \frac{AC \cdot Q - AG \cdot M}{AB}$.

Der 2. Zuſatz.

52. Wenn Kraft und Laſt nebſt den übrigen Stücken gegeben wären, und man ſollte die Stelle der Unterlage A ſuchen, ſo fände man $BA = \frac{AC \cdot Q - AG \cdot M}{P}$, oder auch $AC = \frac{AG \cdot M + AB \cdot P}{Q}$.

Die 19. Erklärung.

53. Eine **Wage** nennt man ein Werkzeug, das dazu dient, das Gewicht eines Körpers vermittelſt eines Gegengewichts zu erfahren. Am bequemſten wird ein Wagebalken, der die Natur eines Hebels hat, mit gleichen oder ungleichen Armen gebraucht, da dann die Wage im letzten Fall eine Schnellwage heißt.

Der 1. Zuſatz.

105 Fig. 54. Der Wagebalken AB iſt ein gleicharmiger Hebel, wenn man haben will, daß im Zuſtande des Gleichgewichts Gewicht und Gegengewicht gleich groß ſeyn ſollen. In A und B ſind die Stellen, woran die Schalen mit ihren Schnüren oder Ketten aufgehängt werden, die gleich ſchwer ſeyn müſſen, wenn der Schwerpunct G in der Mitte zwiſchen A und B bleiben ſoll. In der graden Linie CL, die auf AB ſenkrecht iſt, werden die Zapfen angebracht, die ſich unten in einer Schärfe nach Art eines Keils endigen, damit ſich der Balken um dieſe Schärfe als ſeine Axe drehen könne, wenn die Zapfen in den Pfannen liegen. Bey dieſer Einrichtung, wenn

der

der Schwerpunct G etwas niedriger als die unterſtützte Stelle C liegt, kann der Wagebalken ſowohl für ſich allein, als auch wenn die Schalen dran hängen, und gleiche Gewichte darin liegen, nur alsdenn ruhen, wenn CG vertical, alſo AB horizontal iſt, und dieſe Lage anzuzeigen, dient die auf AB ſenkrechte Zunge KL.

Der 2. Zuſatz.

55. Wenn an B ein Gewicht hängt, das etwas ſchwerer iſt, als das Gegengewicht in A, ſo fällt der Schwerpunct in D weiter nach B hin. Nun muß der Arm GB ſinken, und der Balken kann nur ruhen, wenn CD vertical, und AB gegen die Verticallinie unter dem Winkel CDG geneigt iſt. Demnach giebt der Wagebalken von einerley Gegengewicht einen deſto ſtärkern Ausſchlag, je kleiner die Entfernung CG zwiſchen dem Schwerpunct, und der untern Schärfe der Zapfen iſt.

Der 3. Zuſatz.

56. Die Schnellwage wird in der Hauptſache eben ſo eingerichtet, nur daß es am bequemſten iſt, wenn der kurze Arm für ſich mit dem langen im Gleichgewicht, oder auf den langen Arm äquirt iſt. Ueberdem bedarf es nur einer Schale mit Schnüren am kurzen Arm, am langen Arm aber muß das Gegengewicht verſchoben werden können. Die Eintheilungen am langen Arm werden entweder den Gründen der Theorie gemäß, (33. §.) oder welches eben ſo gut und für die Richtigkeit der Ausübung noch ſicherer iſt, durch Verſuche gefunden.

Der 4. Grundſatz.

106 Fig. 57. Wenn die Richtungen zwoer gleichen Kräfte, die den Winkelhebel auf entgegengeſetzte Art zu drehen ſtreben, auf den Armen deſſelben ſenkrecht, und ihre Entfernungen vom Ruhepunct gleich groß ſind; ſo erhalten ſie einander im Gleichgewicht.

Der 5. Lehrſatz.

107 Fig. 58. Kräfte *P*, *Q*, deren Richtungen *BP*, *CE*, auf den Armen *AB*, *AC*, des Winkelhebels *BAC* ſenkrecht ſind, erhalten einander im Gleichgewicht, wenn ihr Verhältniß gegen einander in umgekehrter Ordnung dem Verhältniß der Hebelsarme gleich iſt.

Beweis. Man verlängere BA nach D, nehme AD = AC, und laſſe an D die Kräfte R und S, wovon jede = Q iſt, nach entgegen geſetzten auf AD ſenkrechten Richtungen ziehen. Iſt alsdenn P : Q = AC : AB, ſo hat man auch P : R = AD : AB, und P iſt mit R im Gleichgewicht. (33. §.) Aber auch S iſt mit Q im Gleichgewicht, (57. §.) alſo ruhet der Hebel. Weil nun R und S für ſich im Gleichgewicht ſind; ſo erhalten auch P und Q einander im Gleichgewicht.

Zuſatz.

108 Fig. 59. Wenn auch die Richtungen P*p*, Q*q*, zwoer Kräfte am Winkelhebel PAQ mit den Armen deſſelben ſchiefe Winkel machen, ſo erhalten ſie dennoch einander im Gleichgewicht, wenn nur ihr Verhältniß gegen einander dem Verhältniß der Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Ruhepunct in umgekehrter Ordnung gleich iſt. Man ziehe AB und AC auf P*p* und Q*q* ſenkrecht, und bringe nach den Richtun-

tungen Bb und Cc die Kräfte $R = P$, $S = Q$ an, ſo ſind P und R, ſo wie Q und S im Gleichgewicht. Ferner iſt vermöge der Vorausſetzung $P : Q = AC : AB$, alſo auch $R : S = AC : AB$, und R iſt mit S im Gleichgewicht: folglich auch P mit Q.

Die 20. Erklärung.

60. Wenn eine cylindriſche Axe KL ſenkrecht 109
durch die Mitte einer Scheibe DGHI geht, und an Fig.
derſelben ſo befeſtiget iſt, daß die Axe, wenn ſie gehörig unterſtützt iſt, ſich mit der Scheibe zugleich drehen muß; ſo heißt das Hebezeug ein **Rad an der Axe**, und die cylindriſche Axe nennt man die zum Rade gehörige **Welle**. Letztere iſt gewöhnlich an beyden Enden A und B mit runden Zapfen verſehen, die auf gehörig eingeſchnittenen oder gebohrten Zapfenlagern ruhen. Wenn die Welle mit einer Ebene auf ihrer geometriſchen Axe AB ſenkrecht geſchnitten wird; ſo heißt der Halbmeſſer EF des kreisförmigen Schnitts Kürze halber der **Halbmeſſer der Welle**.

Zuſatz.

61. Wenn an der Welle ein Seil befeſtiget iſt, das ſich auf dieſelbe aufwickeln muß, wenn das Rad umläuft; ſo läßt ſich vermittelſt des Rades eine am Seil hängende Laſt Q herauf ziehen, wenn eine am Umfang des Rades angebrachte Kraft daſſelbe umdrehet.

Die 21. Erklärung.

62. Man kann alle Arten der ſo genannten **Haſpel** und **Winden** als Räder an der Welle anſehen, wenn mit der Welle nur etliche Arme, wie CD, CG, CH, CI, verbunden ſind, die von Menſchen umgetrieben werden können. Die Welle kann

wagrecht liegen, wie beym Kreuzhaſpel, oder lothrecht ſtehen, wie bey der Erdwinde, und dem Göpel. Ein Radhaſpel iſt ein wirkliches Rad, das am Umfange Zapfen hat, welche Menſchen angreifen können. Auch hat die Kurbel DEF (118. Fig.) die Natur des Rades, wenn mit der Welle AB ein grader oder krummer Arm DE ſo verbunden iſt, daß an EF ein Menſch mit der Hand angreifen, und ſo die Welle drehen kann.

Der 6. Lehrſatz.

109 Fig. 63. Wenn die Richtungslinie der Kraft *P* den Umfang des Rades, und die Richtung der Laſt den Umfang eines auf der Welle ſenkrechten kreisförmigen Schnitts berührt; ſo erhalten Kraft und Laſt einander im Gleichgewicht, wenn ſich die Kraft zur Laſt verhält, wie der Halbmeſſer der Welle zum Halbmeſſer des Rades.

Beweis. Man laſſe an F eine Kraft R = Q ziehen, und die Richtung FR ſey der Richtung FQ grade entgegen geſetzt. Wenn ferner der Halbmeſſer CD den Umfang der Welle in M ſchneidet, ſo ſey auch an M eine Kraft S = Q auf CM ſenkrecht, und der Kraft P entgegengeſetzt angebracht. Alsdenn iſt für ſich klar, daß R und S im Gleichgewicht ſind. Weiter hat man vermöge der Vorausſetzung P : Q = EF : CD, alſo auch P : S = CM : CD, mithin ſind P und S im Gleichgewicht. (33. §.) Ueberdem ſind Q und R im Gleichgewicht, ſo daß das Rad ruhen muß. Weil aber R und S für ſich einander im Gleichgewicht erhalten, ſo muß auch P mit Q im Gleichgewicht ſeyn.

Zuſatz.

Zuſatz.

64. Wenn vom Umfange des Rades an einer Schnur ein Gewicht P herab hienge, ſo würde bey einem Umlauf des Rades, das Gewicht P als Kraft betrachtet, um eine Tiefe ſinken, die der Peripherie des Rades gleich wäre, und das Gewicht Q würde zugleich um eine Höhe ſteigen, ſo groß als die Peripherie der Welle. Alſo verhält ſich der Weg der Kraft zum Wege der Laſt wie des Rades Halbmeſſer zum Halbmeſſer der Welle, (§. Geom.) mithin auch bey dieſem Hebezeuge wie die Laſt zur erhaltenden Kraft.

Die 22. Erklärung.

65. Ein Rad kann ein andres mit umdrehen, wenn jenes auf ſeinem Umfange Erhöhungen hat, die in Vertiefungen auf des andern Umfang eingreifen. Dergleichen Erhöhungen heiſſen Zähne, wenn ſie in der Ebene des Rades, welches nun ein Sternrad heißt, nach den Richtungen der Halbmeſſer am äuſſern Umfange aufgeſetzt ſind. Dagegen nennt man ſie Kämme, und das Rad ſelbſt ein Kammrad oder Kronrad, wenn ſie auf des Rades Ebene ſenkrecht ſind.

Die 23. Erklärung.

66. Von zweyen Rädern, davon eins ins andre eingreift, iſt gewöhnlich das eine in Vergleichung mit dem andern nur klein, und man nennt es ein Getriebe. In dem Fall insbeſondre wird es ein Trilling genannt, wenn es aus zwoen parallelen Scheiben beſtehet, die vermittelſt mehrerer am Umfange mit der Axe parallel eingeſetzter Stäbe zuſammen gefüget ſind. Die Stäbe dienen ſtatt der Zähne.

Wenn in der Welle nur Vertiefungen eingeſchnitten ſind, die ſtatt des Getriebes dienen, ſo heißt es ein Rumpf.

Die 24. Erklärung.

67. Räder, welche durch eine um ihre Peripherie geführte Schnur, die in ſolcher Abſicht eine Vertiefung haben muß, einander in Bewegung ſetzen, heiſſen Seilräder. Beyde Enden der Schnur müſſen alsdenn gehörig zuſammen gefüget ſeyn, da ſie dann eine Schnur ohne Ende heißt.

Der 7. Lehrſatz.

68. **Die Kraft am Umfange des erſten Rades, wenn mehrere in einander greifen, verhält ſich zur Laſt an der letzten Welle, wie das Product der Halbmeſſer aller Getriebe, die Welle, woran die Laſt hängt, ſtatt des letzten Getriebes verſtanden, zum Product der Halbmeſſer aller Räder.**

110. Fig. Beweis. Es ſey a des Rades ABC, und α des Getriebes DHI Halbmeſſer: ſo drückt der Triebſtecken D gegen den Zahn E, wenn an B die Laſt P hängt. Setzt man dieſen Druck $= K$, ſo iſt $K = \frac{a}{\alpha} P$. (63. §.) Dieſer Druck K iſt als eine Kraft anzuſehen, die das folgende Rad EFG zu drehen ſtrebt. Wenn an deſſelben Welle LMN die Laſt Q hängt, und des Rades Halbmeſſer $= b$, der Welle Halbmeſſer $= \beta$ iſt; ſo wird im Fall des Gleichgewichts erfodert, daß $Q = \frac{b}{\beta} K$ ſey,

alſo

alſo $Q = \frac{b}{\beta} \cdot \frac{a}{\alpha} \cdot P$, oder $P : Q = \alpha \cdot \beta : a \cdot b$. Wenn aber die Welle LMN noch ein Getriebe hat, ſo drückt der Triebſtecken R gegen den Zahn S mit der Gewalt $\frac{b}{\beta} \cdot K$, und an der Welle VW, wenn ihr Halbmeſſer $= \gamma$, des Rades Halbmeſſer $= c$ iſt, hält eine Laſt $R = \frac{c}{\gamma} \cdot \frac{b}{\beta} K$ damit das Gleichgewicht, oder $R = \frac{c \cdot b \cdot a}{\gamma \cdot \beta \cdot \alpha} P$. So gilt der Schluß von jeder Zahl von Rädern auf die folgende um Eins gröſſere Anzahl.

Die 25. Erklärung.

69. Man kann zwey oder mehr Rollen vermittelſt zweener Kloben, worin die Rollen umlaufen, ſo zuſammen ordnen, wie es die 111. Figur vorſtellet. Der obere Kloben hängt vermittelſt eines Hakens an einer zulänglich feſten Unterſtützung, unten bey A iſt ein neuer Haken, woran ein Seil befeſtiget und wechſelsweiſe um eine untere und obere Rolle geführt iſt, bis es zuletzt von I nach K herab hängt. Eine ſolche Zuſammenordnung mehrer obern und untern Rollen nennt man einen Flaſchenzug.

Zuſatz.

70. Die Seile müſſen ſich nicht aneinander reiben, darum ſucht man alles ſo einzurichten, daß ſie nur wenig von der parallelen Lage abweichen, wenn ſie durch die unten anhängende Laſt Q geſpannt ſind.

Der 8. Lehrſatz.

71. Wenn alle Seile am Flaſchenzuge parallel hängen, und vollkommen biegſam ſind; ſo iſt die Kraft in der Laſt, der ſie das Gleichgewicht hält, ſovielmahl enthalten, als Eins in der Zahl aller Seile, woran der untere Kloben mit der Laſt hängt.

Beweis. Im Zuſtande des Gleichgewichts müſſen alle Seile gleich ſtark geſpannt ſeyn: mithin trägt jedes Seil, wofern ſie parallel hängen, ſoviel von der Laſt, als jedes der übrigen. Demnach wird dieſer Theil der Laſt gefunden, wenn man die Laſt mit der Zahl der Seile dividirt, woran der untere Kloben hängt: und dieſer Theil der Laſt wird von der Kraft P im Gleichgewicht erhalten.

Zuſatz.

72. Wenn die Kraft P ſinkt, und die Laſt Q gehoben wird, ſo verkürzen ſich alle Seile, woran der untere Kloben mit der Laſt hängt, und das Seil wird länger, woran die Kraft P hängt. Steigt die Laſt um einen Fuß höher, ſo ſinkt die Kraft um ſoviele Füſſe als Seile vorhanden ſind, woran die Laſt hängt. Demnach verhält ſich auch beym Flaſchenzuge die Laſt zur erhaltenden Kraft umgekehrt, wie der Weg der Kraft zum Wege der Laſt.

Der 9. Lehrſatz.

112 Fig. 73. Wenn eine grade Linie *AB* um den ſonſt feſten Punct *B* wie ein Hebel beweglich iſt, an einem andern Punct *A* aber die Kräfte *P* und *Q* in den Richtungen *AP*, *AQ*, in einerley Ebene mit *AB* ſo angebracht ſind; daß

daß die Sinus der Winkel *BAP*, *BAQ*, ſich in umgekehrter Ordnung wie die Kräfte verhalten; ſo bleiben die Kräfte im Gleichgewicht.

Beweis. Man ziehe BE und BF auf AP, AQ, ſenkrecht, nehme auch überdem an, daß an E eine Kraft R = P in der Richtung E*p*, an F aber eine Kraft S = Q in der Richtung F*q* entgegen drücke; ſo ſind alle vier Kräfte im Gleichgewicht. Ferner ſind BE, BF, die Sinus der Winkel BAP, BAQ, für den Halbmeſſer AB: mithin iſt vermöge der Vorausſetzung P : Q = BF : BE, alſo auch R : S = BF : BE und die Kräfte R, S, ſind im Gleichgewicht: (58. §.) alſo müſſen auch P und Q im Gleichgewicht ſeyn.

Die 26. Erklärung.

74. Der Punct B leidet von der vereinigten Gewalt beyder Kräfte P und Q einen Druck in der Richtung BG, wenn man AB nach G verlängert. Beyde Kräfte zuſammen drücken alſo auch den Punct A in der Richtung AB, welche man die mittlere Richtung der Kräfte P und Q nennt. Eine Kraft, welche den Punct A nach der mittlern Richtung AB ſo ſtark drückt, als er von beyden Kräften P und Q zuſammen nach dieſer Richtung gedrückt wird, nennt man die mittlere Kraft, und von derſelben unterſcheidet man die Kräfte P und Q durch den Nahmen der Seitenkräfte.

Der 10. Lehrſatz.

75. Wenn man aus dem Winkel *PAQ*, 113 Fig.
den die Richtungen *AP*, *AQ*, der Seitenkräfte *P*, *Q*, einſchlieſſen, ein Parallelogramm *ACBD* ſo verzeichnet, daß die Seitenlinien *AC*,

AC, *AD*, ſich wie die nach dieſen Richtungen drückenden Seitenkräfte verhalten: ſo iſt die Diagonallinie *AB* die mittlere Richtung: die mittlere Kraft ſelbſt aber verhält ſich zu jeder von den Seitenkräften *P*, oder *Q*, wie die Diagonallinie *AB* zu der Seitenlinie, welche zugleich der Kraft *P* oder *Q* Richtung vorſtellt.

Beweis. Vermöge der Vorausſetzung iſt P : Q = AC : AD, alſo auch P : Q = AC : BC, weil AD = BC. Im Dreyeck ABC aber iſt AC : BC = ſin ABC : ſin BAC (§. Trigon.) und ABC = BAD (101. §. Geom.) alſo AC : AD = ſin BAD : ſin BAC, mithin auch P : Q = ſin BAD : ſin BAC. Demnach iſt AB die mittlere Richtung. (74. §.) Man verlängere AB nach E, und ſetze es ſey an A in der Richtung AE eine Kraft R angebracht, die der mittlern Kraft gleich iſt; ſo ſind P, Q, R, im Gleichgewicht. Alsdenn ſind Q und R ein Paar Seitenkräfte und AF iſt ihre mittlere Richtung, wenn AD : AE = Q : R genommen, und das Parallelogramm AEFD verzeichnet wird. Demnach muß AF mit AC in grader Linie liegen, und daraus folgt, daß EAF = BAC ſey. Ferner iſt EF mit BC parallel, weil beyde mit AD parallel ſind, alſo der Winkel AFE = ACB, ſo wie AEF = ABC. Ueberdem iſt EF = BC, weil beyde ſo groß als AD ſind, alſo haben die Dreyecke AFE, ABC auch gleiche Seiten, und es iſt AE = AB. Vermöge der Vorausſetzung war AD : AE = Q : R, alſo iſt AD : AB = Q : R. Ueberdem iſt AC : BD = P : Q, alſo auch AC : AB = P : R. (§. Geom.)

Die

Die 27. Erklärung.

76. Bey Anwendung dieſer Lehren iſt die Redensart gewöhnlich, die mittlere Kraft R ſey aus den Seitenkräften zuſammengeſetzt, und man ſiehet leicht, daß die Meinung nicht ſeyn könne, die mittlere Kraft ſey die Summe der Seitenkräfte. Wenn umgekehrt ſtatt der mittlern Kraft die Seitenkräfte geſucht werden, ſo drückt man das ſo aus: man ſolle die mittlere Kraft in die Seitenkräfte zerlegen.

Die 2. Erfahrung.

77. Die Oberflächen der feſten Körper ſind nie ſo vollkommen glatt, daß ſich auf denſelben nicht eine groſſe Menge kleiner Erhöhungen und Vertiefungen finden ſollte, ob man gleich den Oberflächen recht harter Körper, dergleichen Steine, Glas, einige Metalle und Holzarten ſind, durch Abſchleifen und mancherley Arten von Politur eine ziemliche Glätte zuwege bringen kann. Wenn nun ein Körper an der Fläche eines andern fort geſchoben, und zugleich gegen dieſelbe gedrückt wird; ſo greifen die kleinen Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern, und einer kann ſich alsdenn am andern nicht fortbewegen, ohne daß die Theile des einen, welche dem andern im Wege ſind, niedergebeuget, oder wohl gar von den übrigen abgeriſſen werden.

Die 28. Erklärung.

78. Der Widerſtand, welcher die Bewegung eines Körpers hindert, wenn er an der Oberfläche eines andern fortgeführt, und zugleich gegen dieſelbe gedrückt wird, heißt das Reiben, oder die Friction.

Zuſatz.

Zuſatz.

79. Wenn ein ſchwerer Körper auf einer wagrechten Ebene ruhig liegt, ſo trägt dieſe das ganze Gewicht des Körpers. Derſelbe müſte alſo von jeder auch nur geringen Kraft nach horizontaler Richtung in Bewegung geſetzt werden, wenn die Friction kein Hinderniß machte. Hat der Körper eine ebene Grundfläche, womit er an die Ebene anſchließt, welche ihn unterſtützte; ſo iſt die Friction ſehr beträchtlich. Der daher rührende Widerſtand der Bewegung kann ſoviel betragen, als wenn eine Kraft die Bewegung zu hindern ſtrebte, die dem vierten ja wohl dem dritten Theil vom Gewicht des auf der wagrechten Ebene liegenden Körpers gleich iſt.

Der 11. Lehrſatz.

114 Fig. 80. Auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene *ABDI* kann ein ſchwerer Körper Q nicht ruhig liegen, es wäre denn, daß die Friction ſeine Bewegung hinderte.

Beweis. Es ſey CBDR eine horizontale Ebene, welche die geneigte Ebene in BD ſchneidet. Ferner ſey G des Körpers Schwerpunct, und GH auf dem Horizont, GK auf der ſchiefen Ebene ſenkrecht: ſo iſt die Ebene des Winkels HGK auf beyden Ebenen ABDI, CBDR ſenkrecht. (§. Geom.) Wenn alſo AB und BC ihre Durchſchnitte mit den erwehnten Ebenen ſind, ſo iſt ABC der ſchiefen Ebene Neigungswinkel gegen den Horizont. Man ziehe HE mit GK, HF und GE mit AB parallel; ſo läßt ſich der Druck des Gewichts Q nach der lothrechten Richtung GH in zwo andre Kräfte nach den Richtungen GF und GE zerlegen. (75. §.) Der Druck nach der

der Richtung GF iſt auf der Ebene ABDI ſenkrecht, und wird von ihr völlig aufgehalten: aber dem Druck nach der Richtung GE iſt nichts im Wege. Demnach muß der Körper längſt der Ebene herab ſinken, wenn es nicht vielleicht die Friction hindert.

Die 29. Erklärung.

81. Die Kraft, welche den Körper längſt der ſchiefen Ebene herab zu ſinken nöthiget, nennt man das relative, oder reſpective Gewicht des Körpers, und unterſcheidet es von ſeinem abſoluten Gewicht, deſſen Richtung lothrecht iſt.

Der 1. Zuſatz.

82. Die Richtung GE des relativen Gewichts iſt mit der ſchiefen Ebene parallel, (§. Geom.) und liegt zugleich in der Ebene des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene gegen den Horizont. Wenn AC in dieſer Neigungsebene auf BC ſenkrecht geſetzt wird, ſo ſind die Dreyecke ABC, EHG, einander ähnlich. Denn bey C und E ſind rechte Winkel, auch iſt EGH = BAC, weil GE mit AB, HA mit AC parallel iſt. (§. Geom.) Demnach iſt ferner GE : GH = AC : AB, und eben ſo verhält ſich das relative Gewicht des Körpers auf der ſchiefen Ebene zu ſeinem abſoluten Gewicht.

Der 2. Zuſatz.

83. Wenn man Kürze halber AB die Länge, AC die Höhe, BC die Grundlinie der ſchiefen Ebene nennt; ſo verhält ſich das relative Gewicht des Körpers zu ſeinem abſoluten Gewicht, wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge. Eine Kraft, die den Körper als Laſt betrachtet auf der ſchiefen Ebene im Gleichgewicht erhalten ſoll, muß dem relativen Gewicht deſſelben

gleich

gleich ſeyn, wenn ihre Richtung mit der ſchiefen Ebene parallel, und unter eben dem Winkel gegen den Horizont geneigt ſeyn ſoll.

Der 3. Zuſatz.

84. An der Laſt Q ſey eine mit AB parallel laufende Schnur befeſtiget, die bey M über eine Rolle geführt iſt; und daran hänge das Gewicht P als Kraft betrachtet: ſo muß P um eine lothrechte Tiefe ſinken, die der Länge AB der Ebene gleich iſt, wenn die Laſt Q in ihrer lothrechten Richtung um die Höhe AC ſteigen ſoll. Für das Gleichgewicht wird erfodert, daß ſich Q : P = AB : AC verhalte, alſo wiederum die **Laſt zur Kraft, wie der Weg der Kraft zum Wege der Laſt.**

Der 4. Zuſatz.

85. Eine Kraft, deren Richtung GN in der Neigungsebene ABC liegt, und mit der Grundlinie BC parallel iſt, kann die Laſt auf der ſchiefen Ebene ebenfalls im Gleichgewicht erhalten. Man ziehe LN auf GN ſenkrecht, ſo läßt ſich der ſenkrechte Druck gegen die ſchiefe Ebene in der Richtung GK aus zwoen andern Preſſungen in den Richtungen GH und GN zuſammenſetzen. Alsdenn wird erfodert, daß ſich die Laſt in der Richtung GH zur erhaltenden Kraft in der Richtung GN verhalte, wie GH : GN, oder wie GH : HL. Es iſt aber HGL = FHL (§. Geom.) = ABC, und GHL = 90° = ACB: alſo ſind die Dreyecke ABC, GHL einander ähnlich, und man erhält GH : HL = BC : AC. Demnach verhält ſich die Laſt zur erhaltenden Kraft in der mit der Grundlinie parallelen Richtung, wie die Grundlinie der Ebene zu ihrer Höhe.

Die

Die 30. Erklärung.

86. Der Keil iſt ein grades dreyſeitiges Priſma DEFGHI, woran zwo Seitenflächen DFGH, EFGI, einen ſehr ſpitzen Winkel mit einander einſchlieſſen, um vermittelſt deſſelben durch Schläge oder einen ſtarken Druck auf die dritte Seite EH, welche der Rücken des Keils heißt, die Theile eines andern Körpers von einander zu treiben. Wenn die Grundflächen DEF, GHI, des Priſma, alſo auch alle damit parallele Schnitte, gleichſchenklichte Dreyecke ſind; ſo heißt auch der Keil gleichſchenklicht. In der 116. Figur ſtellet das Dreyeck ABC einen Schnitt durch den Schwerpunct des gleichſchenklichten Keils vor, der mit den Grundflächen parallel iſt. Man nennt alsdenn Kürze halber AB den Rücken, AC oder BC die Seitenlinie des Keils, und DC ſeine Länge. 115 Fig.

Zuſatz.

87. Wenn EHIF einen ſchon zum Theil zerſpaltenen Körper vorſtellet, worin der Keil bis an EF ſo ſteckt, daß die Mittellinie DC vertical, und der Rücken AB horizontal iſt; ſo kann man ſich auf dem Rücken ein Gewicht P vorſtellen, welches den Keil weiter zu treiben ſtrebt. Der zerſpaltene Körper drücke an den Stellen E und F entgegen, und die grade Linie EF ſey mit AB parallel. Ferner ziehe man durch E und F ein paar auf den Seitenlinien des Keils ſenkrechte grade Linien, ſo werden ſich dieſe in einerley Punct K der Linie DC ſchneiden: der Druck P in der ſenkrechten Richtung DC aber zerlegt ſich in zwo andre Preſſungen nach den Richtungen KE und KF, die auf den Seitenflächen des Keils ſenkrecht und bey den hier angenommenen Voraus- 116 Fig.

ſetzungen gleich groß ſind. Woſern man überdem vorausſetzen kann, daß die Richtung des Widerſtandes bey E ſowohl als bey F auf der Seite des Keils ſenkrecht, auch der Widerſtand ſelbſt auf beyden Seiten von gleicher Gröſſe ſey; ſo muß im Fall des Gleichgewichts jede von den Seitenkräften nach KE oder KF dem entgegen drückenden Widerſtande gleich ſeyn.

Der 12. Lehrſatz.

88. In ſolchen Fällen, wenn die im vor. §. angenommenen Vorausſetzungen ſtatt finden, verhält ſich die Kraft, welche den Keil in dem zerſpaltenen Körper weiter zu treiben ſtrebt, zum Widerſtande an jeder Seite, wie der Rücken des Keils zur Seitenlinie.

116 Fig. Beweis. Man ziehe durch E und F grade Linien mit KF und KE parallel, ſo wird das Parallelogramm der Kräfte EKFO ein Rhombus, und KO = 2KL, mithin die Kraft P in der Richtung KO zur Kraft KE = 2KL : KE. Ferner iſt der Winkel EKL = CEL (§. Geom.) = CAD, und bey L und D ſind rechte Winkel: demnach ſind die Dreyecke EKL, ACD, einander ähnlich, und man erhält KL : KE = AD : AC, alſo auch 2KL : KE = 2AD : AC = AB : AC. Dieſe Proportion mit der vorigen verglichen giebt folgende: die Kraft P : Kraft KE = AB : AC.

Zuſatz.

89. Dieſe Regel giebt Borellus in ſeinem Werke: De motu animalium. Setzt man mit dem Merſennus voraus, die Richtung des Widerſtandes ſey die mit AB parallele Linie EL, ſo macht die nach M verlängerte Richtung der Kraft KE mit EL den

den Winkel MEL. Wenn alsdenn EN ſothrecht iſt; ſo hält eine Kraft $p = \frac{AC}{AB} P$ in der Richtung EM mit dem Widerſtande R in der Richtung EL das Gleichgewicht, wenn ſich verhält $p : R = \sin NEL : \sin NEM$. (73. §.) Es iſt aber $NEL = 90°$, und $NEM = CKE = DAC$: mithin wird $p : R = \text{ſin. tot.} : \sin DAC = AC : CD$, alſo $p = \frac{AC}{CD} . R$, mithin auch $\frac{AC}{AB} . P = \frac{AC}{CD} . R$, und daraus folgt $P = \frac{AB}{CD} . R$. Das iſt Merſenni Regel, es verhalte ſich die Kraft zum Widerſtande, wie der Rücken des Keils zur Länge.

Die 31. Erklärung.

90. Es ſey ABHG ein grader Cylinder, und GH ein Schnitt mit der Grundfläche in der Entfernung AG parallel: auf der Oberfläche dieſes Cylinders ſey eine krumme Linie AMNG nach dem Geſetz gezeichnet, daß wenn durch einen Punct M derſelben eine grade Linie mit der Axe EF des Cylinders parallel gehet, und den Umfang der Grundfläche in P trift, allemahl das Verhältniß AP : PM dem Verhältniß des Umfangs der Grundfläche zur Höhe AG gleich ſey. Dieſe Linie heißt eine Schraubenlinie, und AG iſt eines Schraubenganges Höhe. Der Cylinder ſelbſt wird die Spindel, und der Umfang ſeiner Grundfläche oder eines jeden auf der Grundfläche ſenkrechten Schnitts der Umfang der Spindel genannt. 117 Fig.

Der 1. Zuſatz.

91. Wenn PT in der Ebene der Grundfläche liegt, und ihre Peripherie in P berührt; ſo berührt die Ebene MPT die Cylinderfläche in der graden Linie PM, und ſie iſt auf dem Halbmeſſer EP der Grundfläche ſenkrecht. (§. Geom.) Man nehme PT dem Bogen PA, und PV dem Bogen PBLA gleich: ſo iſt TV dem Umfang der Spindel APBLA gleich. Man ziehe ferner TM, und ſetze VX auf TV ſenkrecht, ſo iſt $VX = \frac{TV}{TP} . PM$, oder $VX = \frac{APBLA}{AP} . PM$, alſo $VX = AG$, und TX iſt eine Tangente des Schraubenganges.

Der 2. Zuſatz.

92. Es ſey die grade Linie MR in der Ebene TVX auf der Tangente TX des Schraubenganges ſenkrecht, ſo iſt ſie zugleich auf dem Schraubengange in M ſenkrecht. Ferner iſt der Winkel $RMP = 90 - PMT = PTM$. Man ſtelle ſich über der Schraubenlinie einen erhöheten Schraubengang und TVX als ein feſtes lothrecht ſtehendes Dreyeck vor, auf deſſen Hypothenuſe der Schraubengang in M ruhet. Oben auf der Spindel drücke das Gewicht P, ſo daß die Stelle M in der lothrechten Richtung MS einen Druck = P leidet. Ferner ſey MZ mit PT parallel, alſo $PMZ = 90°$, und gegen eben die Stelle M des Schraubenganges, die den Druck P in der Richtung MS leidet, drücke eine Kraft V in der Richtung MZ ſo, daß aus beyden Kräften P und V nach der mittlern Richtung MR ein Druck entſtehe, der, weil er auf TX ſenkrecht iſt, davon völlig auf-

aufgehalten wird. Alsdenn wird erfodert, daß ſich verhalte P : V = ſin RMZ : ſin RMS. Weil nun RMS = PTM war, ſo iſt RMZ = PMT, alſo P : V = ſin PMT : ſin PTM = PT : PM, oder P : V = Peripherie APBLA : AG.

Die 32. Erklärung.

93. Man ſtelle ſich vor, die Ebene des Dreyecks VTX werde um die Schraubenſpindel ſo gewunden, daß PT an den Bogen PA, und PV an den Bogen PBLA anſchlieſſe; ſo wird die Ebene des Dreyecks ſo gekrümmt, daß ſie an die Cylinderfläche anſchließt, VX fällt mit AG zuſammen, und die Hypothenuſe TX krümmt ſich in die Figur des Schraubenganges AMNG. Dieſen neuen Schraubengang ſtelle man ſich hohl vor, ſo daß der erhöhete Schraubengang AMNG darin paſſe: ſo wird das die Mutterſchraube.

Der 13. Lehrſatz.

94. Wenn Schraube und Mutterſchraube in einander greifen, und eine Kraft *V* bey *A* in einer auf der Axe *EF* ſenkrechten Ebene, deren Richtung *AC* den Umfang der Spindel berührt, die Spindel um ihre Axe zu drehen ſtrebt: wenn ferner eine Laſt *P* die Spindel nach der Richtung *FE* drückt, die ſich gegen die Kraft *V* verhält, wie der Umfang der Spindel zur Höhe des Schraubenganges; ſo iſt alles im Gleichgewicht, wofern die Mutterſchraube nicht weichen kann. 117 Fig.

Beweis. Wenn alles, wie hier vorausgeſetzt wird, richtig in einander paſſet, ſo vertheilt ſich der Druck P über den ganzen Schraubengang gleichförmig. Man ſetze die Höhe des Schraubenganges = *a*,

die Peripherie der Spindel $= b$; man nehme alsdenn an, daß die Stelle M den Theil des Drucks $\frac{1}{m}P = p$ in der Richtung MS leide, und bringe an M eine Kraft $v = \frac{a}{b} . \frac{1}{m}P$ in der Richtung MZ an, zugleich aber auch eine eben ſo groſſe Kraft in der grade entgegen geſetzten Richtung MY; ſo iſt $v = \frac{1}{m}V$, und $V = mv$. Alle Kräfte v in der Richtung MY ſind mit V im Gleichgewicht, und an jeder Stelle M entſteht aus den Kräften v in der Richtung MZ, und p in der Richtung MS ein gegen den hohlen Schraubengang ſenkrechter Druck in der Richtung MR, der völlig aufgehalten wird: alſo iſt alles im Gleichgewicht.

Der 1. Zuſatz.

117 Fig. 95. Wäre mit der Schraube der Hebelsarm EO in einer auf der Axe EF ſenkrechten Ebene verbunden, und daran eine auf EO ſenkrechte Kraft W angebracht; ſo entſteht daraus bey A in der Richtung AC ein Druck $V = \frac{EO}{EA} . W$. Damit dieſer mit P das Gleichgewicht halte, wird erfodert, daß $P = \frac{b}{a} . V$ ſey, alſo $P = \frac{b}{a} . \frac{EO}{EA} . W$. Der Exponent des Verhältniſſes der Peripherie des Kreiſes zum Durchmeſſer ſey π, ſo iſt $b = 2\pi EA$, alſo auch $P = \frac{2\pi . EO}{a} . W$.

Der 2. Zuſatz.

96. Die von der Kraft W angegriffene Stelle O macht einen Umlauf, oder die Stelle O legt den

Weg

Weg 2π. EO zurück, wenn die Laſt P um die Höhe AG $= a$ eines Schraubenganges gehoben wird: alſo gilt auch bey der Schraube in einem gewiſſen richtigen Sinne das Geſetz: die Laſt verhalte ſich zur Kraft umgekehrt wie der Weg der Kraft zum Wege der Laſt.

Die 33. Erklärung.

97. Eine Schraube ohne Ende wird aus einer Schraubenſpindel AB und einem Sternrade HI ſo zuſammengefüget, daß die Schraubengewinde zwiſchen den Zähnen des Sternrades, deren Figur darnach eingerichtet ſeyn muß, eingreifen, einen Zahn des Rades nach dem andern fortſchieben, und ſo das Rad in Umlauf bringen können, wenn die Spindel umläuft. Letztere iſt alsdenn, wie die Welle eines Rades, an beyden Enden mit gehörig unterſtützten Zapfen C, D, verſehen, und um ſie in Umlauf zu bringen, kann die Kurbel DEF dienen. Die Lage ihrer Axe CD muß mit der Tangente des Rades, da wo die Schraubengänge eingreifen, parallel ſeyn. 118 Fig.

Zuſatz.

98. Wenn eine Kraft V die Kurbel DEF zu drehen ſtrebt, und DE $= r$, die Höhe der Schraubengänge $= a$ geſetzt wird; ſo entſteht von der Kraft V gegen den Zahn G ein Druck $= \frac{2\pi r}{a}$. V. Man ſetze ferner der Welle KL Halbmeſſer $= e$, des Rades HI Halbmeſſer $= f$, die bey L herabhängende Laſt $=$ P; ſo iſt im Fall des Gleichgewichts

$$\frac{2\pi r}{a} V = \frac{e}{f} . P, \text{ alſo } P = \frac{2\pi r . f}{a . e} V.$$

Die 34. Erklärung.

99. Hebel und Rolle, das Rad an der Axe, der Keil und die Schraube heiſſen einfache Maſchinen, weil es die gewöhnlichſten Theile ſind, woraus man gröſſere Maſchinen zuſammenſetzt.

Zuſatz.

100. Wenn man den Keil ausnimmt, ſo findet bey den übrigen einfachen Maſchinen das Geſetz ſeine Anwendung, vermöge deſſen zwo Kräfte, davon man eine als die Laſt betrachtet, welche von der andern als der Kraft bewegt werden ſoll, einander im Gleichgewicht erhalten, wenn ſie ſich in umgekehrter Ordnung wie die Wege verhalten, die ſie in gleicher Zeit zurück legen würden. Es iſt vom *des Cartes* zuerſt in der Maſchinenlehre gebraucht worden, und heißt von ihm das Carteſianiſche Grundgeſetz der Statik. Am Keil wirken drey Kräfte gegen einander, um deßwillen findet bey demſelben das erwehnte Geſetz nicht ſchlechthin ſeine Anwendung. Ueberhaupt bedarf das Geſetz noch mehrerer Erläuterung, und die Maſchinenlehre wird davon weiter unten mehr Unterricht geben.

Erſte Gründe der Hydroſtatik.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Maſſe iſt flüßig, wenn ſich gar keine Theile in derſelben angeben laſſen, welche aus noch kleinern Theilen beſtehen, die unter ſich wie Theilchen einer feſten Maſſe zuſammen hängen.

Der 1. Zuſatz.

2. Wenn alſo nur ein Theil, oder einige Theile allein, der Wirkung bewegender Kräfte ausgeſetzt ſind, ſo können dieſe Theile für ſich allein in Bewegung kommen, ohne daß die ganze Maſſe mit in Bewegung kommt.

Der 2. Zuſatz.

3. Zwo Kräfte an zwoen verſchiedenen Elementartheilchen einer flüßigen Maſſe, wenn ihre Richtungen in der graden Linie zwiſchen dieſen Elementartheilchen liegen, und einander entgegen geſetzt ſind, können einander nicht im Gleichgewicht erhalten: es müſte denn auf irgend eine Art verhindert werden, daß die dazwiſchen liegenden Theilchen nicht ausweichen können, wenn die Richtungen der Kräfte wider einander laufen.

Die 2. Erklärung.

4. Eine flüßige Maſſe heißt hier eine unelaſtiſche Maſſe ſoweit ſie ſich durch einen äuſſern Druck

nicht in einen engern Raum zuſammen preſſen läßt, wenn ſie gleich wegen ihrer Flüßigkeit dem Druck nach allen Seiten auszuweichen ſtrebt. Die Wiſſenſchaft von den Geſetzen des Gleichgewichts ſolcher Kräfte, die auf unelaſtiſche flüßige Maſſen wirken, heißt die Hydroſtatik.

Der 1. Grundſatz.

119 Fig. 5. Wenn eine unelaſtiſche nicht ſchwere flüßige Maſſe in einer graden priſmatiſchen oder cylindriſchen feſten Röhre *AB* zwiſchen zwoen Stempeln *CD*, *EF*, eingeſchloſſen iſt, und wenn alsdenn gleiche Kräfte dieſe Stempel einander entgegen treiben; ſo bleiben dieſe Kräfte im Gleichgewicht, und der Druck pflanzt ſich durch die flüßige Maſſe nach allen Seiten auch gegen die feſte Röhre gleichförmig fort.

Der 1. Zuſatz.

6. Wenn EF kein beweglicher Stempel, ſondern ſtatt deſſen ein feſter Boden wäre, ſo litte derſelbe eben ſoviel Druck, als wenn er dem Druck des Stempels CD unmittelbar ausgeſetzt wäre. Damit alles in Ruhe bliebe, müſte nun die feſte Röhre gehalten werden, daß ſie nicht weichen könnte.

Der 2. Zuſatz.

7. Wenn die Röhre priſmatiſch iſt, ſo leidet jedes Stück GH einer von ihren ebenen Seitenflächen, das der Grundfläche des Stempels gleich iſt, ebenfalls ſoviel Druck, als wenn der Stempel unmittelbar dagegen preßte. Jedes gröſſere oder kleinere Stück GL, der feſten Fläche der Röhre leidet einen Druck, der ſich zu dem Druck des Stempels gegen

CD

CD verhält, wie der Flächeninnhalt von GL zur Grundfläche des Stempels CD.

Der 3. Zuſatz.

8. Um über die Gröſſe des Drucks zu urtheilen, wenn die Röhre cylindriſch oder ihr Umfang ſonſt gekrümmet iſt, muß man ſich ein ſo kleines Stück vom feſten Umfange der Röhre vorſtellen, daß die Krümme deſſelben nicht merklich iſt. Ein ſo kleines Stück der krummen Fläche kann alsdenn als eine ebene Fläche betrachtet werden, und man kann die Schlüſſe des vor. 7. §. darauf anwenden.

Der 4. Zuſatz.

9. Zwo grade Röhren AB, BC, von ungleicher 120 Fig.
Weite könnten bey B wohl ſo an einander gefügt ſeyn, daß ihre Axen in einerley grade Linie zuſammen fielen. Wenn nun die ungleich groſſen Stempel DE und FG einander entgegen gepreßt werden; ſo kann nur alsdenn das Gleichgewicht beſtehen, wenn ſich der Druck gegen DE zum Druck gegen FG verhält, wie die Fläche DE zur Fläche FG.

Der 5. Zuſatz.

10. Würde die Röhre ſonſt gehalten, daß ſie nicht weichen könnte, und wäre ſtatt des Stempels bey FG ein feſter Boden; wenn die Fläche DE einem Druck = P ausgeſetzt iſt; ſo litte FG einen Druck

$$= \frac{FG}{DE} P.$$

Die 3. Erklärung.

11. In allen Fällen, wenn eine nicht ſchwere flüſ- 122 Fig.
ſige Maſſe in einem feſten Gefäß ABCDEF, von welcher Figur man will, eingeſchloſſen iſt; und wenn alsdenn von auſſen her an einer ſolchen Stelle, AB,

wo das Gefäß eine Oefnung hat, gegen die flüßige Maſſe ein Druck preßt, muß man denjenigen Druck, welchen die Fläche AB unmittelbar leidet, von dem nach allen Seiten durch die flüßige Maſſe fortgepflanzten Druck unterſcheiden. Es wird übrigens hier und im folgenden allemahl vorausgeſetzt, daß die feſten Gefäſſe ſonſt gehalten werden, damit ſie nicht weichen können.

Der 1. Zuſatz.

122 Fig. 12. Man ſetze den Druck, welchen die Fläche AB unmittelbar leidet $= P$, und FE ſey ein ebenes Stück von der feſten Fläche, welche die flüßige Maſſe von allen Seiten umgiebt; ſo iſt der gegen FE fortgepflanzte Druck $= \frac{FE}{AB} . P$.

Der 2. Zuſatz.

13. Wäre FE eine andre offene Stelle des Gefäſſes, ſo würde ein Druck P gegen AB ohne Zweifel die flüßige Maſſe zur Oefnung EF heraus treiben. Um das zu hindern, müſte auch gegen FE von auſſen her ein Druck preſſen, der $= \frac{FE}{AB} . P$ wäre. Derſelbe würde alsdenn mit dem Druck P gegen AB im Gleichgewicht ſeyn.

Der 2. Grundſatz.

121 Fig. 14. Wenn ein grades lothrecht ſtehendes priſmatiſches oder cylindriſches Gefäß *ABCD* mit ſchwerem Waſſer angefüllt iſt; ſo leidet der Boden *BC* einen Druck, der dem Gewicht der ganzen darüber ſtehenden Waſſermaſſe gleich iſt.

Der

Der 1. Zuſatz.

15. Das Gewicht einer ſolchen graden Waſſerſäule wird leicht gefunden, wenn die Grundfläche BC im Quadratinhalt, und ihre Höhe im Längenmaſſe, auch überdem das eigenthümliche Gewicht des Waſſers bekannt iſt. Setzt man ihren körperlichen Inhalt im Cubicmaaß = V, ſo iſt V = BC . AC. (§. Geom.) Setzt man ferner das eigenthümliche Gewicht des Waſſers = g, und das Gewicht der Säule = P, ſo iſt P = g . BC . AB. (13. §. Stat.)

Der 2. Zuſatz.

16. Ein Rheinländiſcher Cubicfuß Waſſer wiegt 66 Pfund im Cöllniſchen Gewicht, und 1 Duodecimal Cubiczoll Waſſer 293 Gran; ein decimal Cubiczoll aber 506 Gran. Demnach muß man eine von dieſen Zahlen ſtatt g ſetzen, nachdem man den Inhalt der Säule in Cubicfüſſen, Duodecimal- oder Decimal-Cubiczollen ausdrückt.

Die 4. Erklärung.

17. Wenn eine ebene Fläche einen gleichförmig darüber vertheilten Druck leidet, deſſen Richtung auf der Ebene ſenkrecht iſt; ſo wird durch die Höhe des Drucks die Höhe einer graden Waſſerſäule verſtanden, deren Grundfläche eben ſo groß iſt, als die Fläche, welche den Druk leidet, und deren Gewicht dem Druck gegen dieſe ebene Fläche gleich iſt.

Die 1. Aufgabe.

18. Die Gröſſe der Fläche *AB* iſt im Qua- 122
dratmaaß gegeben, und die Gröſſe des Drucks Fig.
gegen dieſe Fläche iſt ebenfalls wie gewöhnlich in Pfunden ausgedrückt: man ſoll die Höhe des Drucks finden.

Aufl.

Aufl. Der Druck ſey ſo groß, als wenn ein Gewicht von 100 Pfunden lothrecht gegen AB preßte: ſo kann man leicht finden, wie viel Raum 100 Pfund Waſſer einnehmen. Dividirt man dieſe 100 Pfund mit 66 Pfund als dem Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer, ſo giebt der Quotient die Gröſſe dieſes Raums in Cubicfuſſen. Wenn man aber mit 293 Gran oder 506 Gran dividirt; ſo erhält man die Gröſſe dieſes Raums im erſten Fall in Duodecimal- im letzten Fall in Decimal-Cubiczollen. Man wählt das eine oder das andre, nachdem die Gröſſe der Fläche AB in Quadratfüſſen oder Quadratzollen ausgedrückt iſt.

Die 100 Pfund Waſſer betragen 768000 Gran, und dieſe mit 293 Gran dividirt geben 2621 Cubiczoll für die Gröſſe des Raums, den 100 Pfund Waſſer einnehmen. (Man vergl. den 13. §. Stat.) die Fläche AB ſey 24 Quadratzoll groß, ſo findet, man, dem   §. Geom. gemäß, wie hoch eine grade Säule über einer Grundfläche von 24 Quadratzoll ſeyn muß, damit ihr Inhalt 2621 Cubiczoll betrage, wenn man dieſen Cubicinhalt der Säule mit dem Quadratinhalt ihrer Grundfläche dividirt. In dem erwählten Exempel findet man $\frac{2621}{24} = 109\frac{5}{24}$ Zoll, und das iſt die geſuchte Höhe des Drucks gegen AB.

Der 1. Lehrſatz.

122 Fig. 19. Wenn die im Gefäß *ABCDEF* eingeſchloſſene flüßige Maſſe von auſſen her einem Druck gegen *AB* ausgeſetzt iſt; ſo pflanzt ſich der Druck gegen jedes Stück *EF* von dem feſten Umfange des Gefäſſes, wenn daſſelbe eine ebene Fläche iſt, ſo fort, daß die Höhe des Drucks gegen *EF* der Höhe des Drucks gegen *AB* gleich iſt.

Beweis.

Beweis. Wenn A die Höhe des Drucks gegen AB bezeichnet; ſo will das ſagen, der Druck gegen AB iſt dem Gewicht einer Waſſerſäule gleich, deren Grundfläche = AB, und deren Höhe = A iſt. Das eigenthümliche Gewicht des Waſſers ſey alſo = g; ſo iſt dieſer Druck = g . AB . A. Ferner ſey der gegen EF fortgeflanzte Druck = P, ſo iſt P = $\frac{EF}{AB}$. g . AB . A (12 §.), alſo P = g . EF . A, und die Höhe dieſes Drucks iſt ebenfalls = A. (18. §.)

Der 2. Lehrſatz.

20. **Wenn ein Gefäß *ABCD*, das einen ebenen wagrechten Boden hat, mit ſchwerem Waſſer angefüllt und alles in Ruhe iſt; ſo leidet der Boden *AB* einen Druck, deſſen Höhe ſo groß iſt, als die lothrechte Höhe *CP* der über demſelben ſtehenden Waſſermaſſe.** 123 Fig.

Beweis. Die ganze Waſſermaſſe ſey vermittelſt der wagrechten Ebenen EF, GH, KL, in mehrere Schichten von ſo kleinen Höhen getheilt, daß man jede davon für ſich als ein grades prismatiſches oder cylindriſches Gefäß anſehen kann: ſo iſt jeder von den Querſchnitten KL, GH, EF, u. ſ. f. für ſich einem unmittelbaren Druck ausgeſetzt, der vom Gewicht der darüber ſtehenden Schichte herrührt. Aber auch jeder Druck gegen einen ſolchen Querſchnitt, wie KL, pflanzt ſich gegen den nächſtfolgenden GH fort, und vermehrt den Druck, welchem GH für ſich ſchon wegen des Gewichts der Schichte KGHL ausgeſetzt iſt. Demnach leidet GH einen Druck, deſſen Höhe CM + MN = CN, und eben darum auch EF einen Druck, deſſen Höhe = CN + NO = CO, folglich

AB einen Druck, deſſen Höhe CO + OP = CP. Dieſe Schlüſſe gelten allemahl, die Zahl der Schichten, worin die Waſſermaſſe getheilt iſt, ſey ſo groß als man will.

Der 1. Zuſatz.

21. Wenn die höchſte Fläche CD der im Gefäß befindlichen Waſſermaſſe eben und wagrecht iſt; ſo bedarf es deſſen nicht, daß das Gefäß oben geſchloſſen ſey; die ſchwere Waſſermaſſe bleibt alsdenn für ſich im Gleichgewicht, weil CD weiter keinem Druck ausgeſetzt iſt.

Der 2. Zuſatz.

22. Der Druck in jeder Tiefe CO unter der höchſten Waſſerfläche pflanzt ſich auch ſeitwärts fort, und die Höhe des Drucks gegen E oder F iſt = CO. Dieſer Druck wächſt alſo nach dem Geſetz der Stetigkeit, und iſt in jeder folgenden Tiefe gröſſer, als in der vorigen.

Der 3. Lehrſatz.

23. Schweres Waſſer kann nur alsdenn in einem Gefäß ruhig, und alle ſchwere Elemente des Waſſers können nur alsdenn im Gleichgewicht ſeyn, wenn die höchſte Fläche deſſelben eben und wagrecht iſt.

124 Fig. Beweis. Wenn die höchſte Fläche EMFNG nicht beydes zugleich eben und wagrecht wäre, ſo wäre jeder wagrechte Querſchnitt wie MN einem Druck ausgeſetzt, und die Höhe dieſes Drucks wäre ſo groß, als die Tiefe dieſes Querſchnitts unter der höchſten Gränze F der Waſſermaſſe. Eben dieſer Druck würde ſich auch ſeitwärts fortpflanzen, alſo würde die Waſſermaſſe zerflieſſen, und das Gleichgewicht könnte nicht beſtehen.

Der

Der 4. Lehrſatz.

24. In Gefäſſen und Röhren, *ABHF*, 125
GHDE, die unter einander ſo verbunden ſind, Fig.
daß aus dem einen das etwa darin befindliche Waſſer ins andre hinüber treten kann, bleibt ſchweres Waſſer nur alsdenn ruhig ſtehen, wenn die höchſten Waſſerflächen *AF*, *GE*, in einerley wagrechten Ebene liegen.

Beweis. In jeder Tiefe AL unter der höchſten Gränze AF der Waſſermaſſe im Gefäß ABHF iſt das Waſſer einem Druck ausgeſetzt, der ſich auch ſeitwärts fortpflanzt. Wenn nun H eine Stelle in dieſer Tiefe iſt, woſelbſt das Waſſer ſeitwärts aus einem Gefäß ins andre treten kann; ſo iſt jedes in dieſer Tiefe befindliche Element des Waſſers auch von der andern Seite her einem Druck ausgeſetzt, wozu die Höhe GQ gehört. Im Fall des Gleichgewichts müſſen dieſe Preſſungen von beyden Seiten her gleich ſeyn, alſo wird erfodert, daß AL = GQ ſey.

Der 5. Lehrſatz.

25. Wenn in zuſammenhängenden Gefäſſen oder Röhren *AKB*, *CKD*, zwey ſchwere Flüßigkeiten von verſchiedener Art, die ſich nicht mit einander vermiſchen, im Gleichgewicht ſind; ſo verhalten ſich ihre lothrechten Höhen *AG*, *DH*, über der Ebene *EF*, womit ſie an einander gränzen, in umgekehrter Ordnung, wie die eigenthümlichen Gewichte der flüßigen Maſſen.

Beweis. Wenn eine von den Maſſen für ſich allein den Raum EFKCD ausfüllet; ſo erhellet, daß EF nicht mit CD in einer wagrechten Ebene liegen

könne, weil EF einem Druck ausgeſetzt iſt, der von der ſchweren Flüßigkeit AEFB herrührt. Wenn nun EF und LM in einer wagrechten Ebene liegen, ſo iſt die Flüßigkeit im untern Raum EFKLM für ſich im Gleichgewicht. (24. §.) Man ſetze, die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht der einen Maſſe AEFB ſey $= g$, der andern $= G$; ſo leidet EF einen Druck $= g \,.\, EF \,.\, AG$, und LM iſt dem Druck $G \,.\, LM \,.\, DH$ ausgeſetzt. (20. §.) Das Gleichgewicht aber erfodert, daß ſich verhalte $g \,.\, EF \,.\, AG : G \,.\, LM \,.\, DH = EF : LM$, (13. §.) und daraus folgt $g \,.\, AG : G \,.\, DH = 1 : 1$, alſo $g \,.\, AG = G \,.\, DH$, mithin ferner $AG : DH = G : g$.

Der 6. Lehrſatz.

127 Fig. 26. Ein feſter Körper *ABC*, der in eine flüßige Maſſe *DEF* ganz eingetaucht iſt, verliert darin ſoviel von ſeinem Gewicht, als eine eben ſo groſſe Menge des flüßigen wiegt.

Beweis. Der feſte Körper leidet an jeder Stelle wie A oder B nach einer auf ſeiner Oberfläche ſenkrechten Richtung einen Druck, der dem Gewicht einer Säule des flüßigen gleich iſt, wovon die Grundfläche der Stelle, die den Druck leidet, gleich iſt, und die Höhe ſo groß, als die Tiefe dieſer Stelle unter der höchſten Fläche DF der flüßigen Maſſe. Jede dieſer Preſſungen wie AG zerlegt ſich in zwo andre in den Richtungen AL und AK, wovon jene horizontal, und dieſe vertical iſt. Eben ſo zerlegt ſich der Druck BH nach der horizontalen Richtung BN, und der verticalen BM. Den im 75. §. der Statik feſtgeſetzten Gründen gemäß findet man, daß die Summe aller der verticalen Preſſungen, welche

wie AK den feſten Körper zu heben ſtreben, die Summe aller der lothrechten Preſſungen übertreffe, die den Körper wie BM unterwärts drücken, und daß der Ueberſchuß ſo groß ſey, als das Gewicht einer ſo groſſen Menge der flüßigen Maſſe, die mit dem feſten Körper einerley Raum ausfüllet. Auch findet man, daß die horizontalen Preſſungen einander insgeſammt im Gleichgewicht erhalten.

Aber auch ohne dieſe Schlüſſe völlig auseinander zu ſetzen, welches nicht ſo ganz im Kurzen geſchehen kann, läßt ſich die Richtigkeit des behaupteten Satzes ſehr leicht aus folgenden Gründen herleiten. Wenn der Raum ABC anſtatt des feſten Körpers mit einer eben ſo groſſen Menge des flüßigen angefüllt, und nun alles in Ruhe iſt; ſo leidet die den Raum ABC ausfüllende flüßige Maſſe von allen Seiten her offenbar eben ſoviel Druck, als der feſte Körper leidet, wenn er in eben dem Raum enthalten, und mit dem Flüßigen umgeben iſt. In jenem Fall aber muß nothwendig das Reſultat aller lothrechten Preſſungen dem Gewicht der im Raum ABC enthaltenen flüßigen Maſſe gleich ſeyn, und alle horizontale Preſſungen müſſen einander im Gleichgewicht erhalten: alſo muß es auch in dieſem Falle mit dem geſammten Druck gegen den feſten Körper eben die Bewandniß haben.

Zuſatz.

27. Wenn ABC ein hohles Gefäß und der innere Raum mit der flüßigen Maſſe angefüllet iſt; ſo leidet der feſte Umfang des Gefäſſes an jeder Stelle einen eben ſo groſſen Druck, als in dem Fall, wenn die feſte Fläche ABC mit der flüßigen Maſſe von auſſenher umgeben und grade ſo tief eingetaucht iſt,

127 Fig.

iſt, daß ihre höchſte Gränze die Waſſerfläche OP berührt: nur iſt im erſten Fall der Druck gegen jede Stelle dem Druck entgegen geſetzt, welchen dieſe Stelle im letzten Falle leidet. Demnach iſt der geſammte Druck, womit die ſchwere flüßige Maſſe ein Gefäß, welches ſie anfüllet, unterwärts preßt, dem Gewicht der ganzen im Gefäß enthaltenen Menge des Flüßigen gleich.

Anmerkung.

M. ſ. hievon die Anfangsgründe der Mathem. Wiſſenſchaften, 2. Theil, 18. 25. §.

Der 7. Lehrſatz.

128 Fig. 28. Ein feſter Körper *ABCK*, der nicht ſoviel wiegt, als eine eben ſo groſſe Menge des Flüßigen, worin er verſenkt wird, ſinkt nur ſo weit hinein, bis der eingetauchte Theil *ABC* dem körperlichen Raum nach ſo groß iſt, als eine Menge des Flüßigen, deren Gewicht eben ſo groß, als das Gewicht des ganzen Körpers iſt.

Beweis. Die flüßige Maſſe, ſoweit ſie den eingetauchten Theil umgiebt, ſtrebt ihn mit einer Gewalt zu heben, die ſo groß iſt, als das Gewicht einer ſo groſſen Menge des Flüßigen, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllen würde. Weil nun der feſte Körper mit ſeinem ganzen Gewicht zu ſinken ſtrebt; ſo kann nur alsdenn das Gleichgewicht beſtehen, wenn das Gewicht einer Menge der flüßigen Maſſe, die mit dem eingetauchten Theil einerley körperlichen Inhalt hat, ſo groß iſt, als das Gewicht des feſten Körpers.

Der

Der 1. Zuſatz.

29. Es ſey g der Mittelpunct der Gröſſe des eingetauchten Theils ABC: ſo erhellet, daß alle verticale Preſſungen, die den feſten Körper zu heben ſtreben, im Gleichgewicht bleiben, wenn der Punct g allein ſo gehalten wird, daß derſelbe nicht ſteigen kann. Das iſt aber der Fall, wenn G der Schwerpunct des ganzen Körpers iſt, und beyde Puncte G, g, in einerley lothrechten Linie liegen. Die grade Linie Gg ſteht alsdenn auf der wagrechten Waſſerfläche DH ſenkrecht.

Der 2. Zuſatz.

30. In dem Fall, wenn der Schwerpunct des feſten Körpers niedriger liegt, als der Mittelpunct der Gröſſe des eingetauchten Theils, wird derſelbe gleichſam hängend erhalten: er hat alsdenn einen weit mehr ſichern Stand, als in dem umgekehrten Fall, wenn ſein Schwerpunct höher liegt, als der Mittelpunct der Gröſſe des eingetauchten Theils.

Die 2. Aufgabe.

31. **Das eigenthümliche Gewicht einer feſten oder flüßigen Maſſe in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers zu finden.**

Aufl. 1) Einen feſten Körper wiegt man zuerſt in freyer Luft, hiernächſt aber im Waſſer, und bemerkt den Theil ſeines Gewichts, welchen er im Waſſer verliert. Weil das zugleich das Gewicht einer Menge Waſſer iſt, die mit dem feſten Körper einerley cubiſchen Inhalt hat; (26. §.) ſo dividire man das ganze Gewicht des feſten Körpers mit dem Theil deſſelben, welchen er im Waſſer verliert: der Quotient giebt an, wievielmahl

der feſte Körper ſchwerer iſt, als eine eben ſo groſſe Menge Waſſer.

2) Wofern der feſte Körper leichter iſt, als eine eben ſo groſſe Menge Waſſer, ſo wird er im Waſſer nicht ganz unterſinken, es ſey denn, daß man ihn mit einem andern feſten Körper verbindet, deſſen Maſſe um ein anſehnliches ſchwerer als Waſſer iſt. Die zum hydroſtatiſchen Gebrauch beſonders eingerichteten Wagen ſind gewöhnlich mit einem kleinen gläſernen Eimer verſehen, welches man mit einem metallenen Deckel ſchlieſſen kann, um einen hinein gelegten Körper, der ſpecifiſch leichter als Waſſer iſt, zu hindern, daß er im Waſſer nicht empor komme. Von dem Gewicht, welches das Eimer mit dem hineingelegten Körper zuſammen im Waſſer verliert, zieht man den Theil ab, welchen das Eimer für ſich allein im Waſſer verliert, ſo bleibt das Gewicht einer Menge Waſſer übrig, die mit dem ins Eimer hineingelegten Körper einerley cubiſchen Inhalt hat. Dieſe nimmt man zum Diviſor, und dividirt mit demſelben das Gewicht des feſten Körpers, welches nun kleiner als jener Diviſor ſeyn wird; ſo erhält man einen ächten Bruch, der das eigenthümliche Gewicht der feſten Maſſe in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers angiebt.

3) Um das eigenthümliche Gewicht andrer Flüſſigkeiten mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers zu vergleichen, wählt man am beſten ein maßives Stück Glas, deſſen Figur an ſich willkührlich iſt, nur daß man es bequem an einem zarten Faden muß aufhängen können. Die zum hydroſtatiſchen Gebrauch eingerichteten Wagen ſind damit gewöhnlich

lich unter dem Nahmen der Glasperle verſehen. Dieſe wiegt man ein für allemahl in der Luft und im Waſſer, damit man wiſſe, wieviel ſie im Waſſer verliert. Sie wird alsdenn mehr in einer ſchwerern und weniger in einer leichtern Flüßigkeit verlieren. Das Gewicht, was ſie in einer jeden andern flüßigen Maſſe verliert, wird mit demjenigen dividirt, was ſie im Waſſer verliert; ſo weiß man das eigenthümliche Gewicht der flüßigen Maſſe in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Waſſers.

Der 1. Zuſatz.

23. Von dieſen Quotienten werden ſich wenige in ganzen Zahlen angeben laſſen, und es hat hier ſeine groſſe Bequemlichkeit, wenn man die übrigen in Decimaltheilen ausdrückt, ſo wie die kleine Tafel im 15. §. der Statik davon eine Probe giebt. Die in derſelben aufgeführten Zahlen ſind, vermittelſt des hier beſchriebenen Verfahrens gefunden worden.

Der 2. Zuſatz.

33. Beym Gebrauch recht ſcharfer hydroſtatiſcher Wagen findet man, daß nicht alle Arten des gemeinen Waſſers, als Regenwaſſer, Brunnenwaſſer, Flußwaſſer, einerley eigenthümliches Gewicht haben. Daher wählte man gewöhnlich Regenwaſſer, um das eigenthümliche Gewicht der übrigen Maſſen damit zu vergleichen, weil man es für das reinſte hält. Es muß aber alsdenn, wie leicht zu erachten iſt, nicht von den Dächern, ſondern unter freyen Himmel aufgefangen werden. Um es von den fremden Theilen, die etwa demſelben noch beygemiſcht ſind, zu reinigen, iſt das filtriren allein nicht hinlänglich: es muß, wenn man alles

aufs genaueſte beobachten will, deſtillirtes Regen- oder Schneewaſſer ſeyn.

Der 8. Lehrſatz.

128 Fig. 34. Der geſammte Druck, womit die im Gefäß *DEFH* enthaltene flüßige Maſſe das Gefäß unterwärts preßt, wird um eben ſoviel gröſſer, als der darin verſenkte feſte Körper *ABCK* von ſeinem Gewicht verliert, er mag ganz oder zum Theil eingetaucht ſeyn.

Beweis. Die flüßige Maſſe ſteigt im Gefäß höher, wenn der feſte Körper hinein getaucht wird. Wenn nun anfangs LM die höchſte Fläche war, und wenn dieſe beym Verſenken des feſten Körpers bis DH ſteigt, ſo wiegt die zwiſchen LM und DH enthaltene flüßige Maſſe ſoviel, als der feſte Körper am Gewicht verliert. Aber auch um eben ſoviel nimmt der Druck zu, womit die flüßige Maſſe das Gefäß unterwärts preßt: denn es hat eben den Erfolg, als wenn noch ſoviel mehr flüßiges ins Gefäß hineingegoſſen wäre, als den Raum von LM bis an DH ausfüllet.

Der 9. Lehrſatz.

129 Fig. 35. Wenn eine feſte Kugel *KLST* überall in gleicher Höhe *AK* mit Waſſer umgeben iſt, deſſen Elemente gegen den Mittelpunct der Kugel ſchwer ſind; ſo erhält ſich alles im Gleichgewicht. Die feſte Kugelfläche *KLST* aber leidet einen gleichförmig darüber vertheilten Druck, der dem Gewicht einer graden Waſſerſäule gleich iſt, wovon die Grundfläche ſo groß als die Kugelfläche *KLST*, und die Höhe der Höhe *AK* gleich iſt.

Beweis. Man ſtelle ſich vor, daß die ganze Waſſer-

Waſſermaſſe durch Kugelflächen, die mit der feſten Kugel concentriſch ſind, in mehrere Schichten von ſehr kleinen Höhen KH, HF, FD, DA, getheilt ſey; ſo leidet jede Kugelfläche, wie DEP einen gleichförmig darüber vertheilten Druck, der dem Gewicht der unmittelbar darauf liegenden Schichte gleich iſt. Eben dieſer Druck pflanzt ſich gegen die nächſtfolgende Kugelfläche FGQ ſo fort, daß AD die Höhe des fortgepflanzten Drucks bleibt, und dazu kommt die Höhe DF des unmittelbaren Drucks: mithin leidet FGQ einen Druck, deſſen Höhe = AD + DF = AF iſt. Dieſe Schlüſſe ſetzt man leicht auf ähnliche Art wie im 20. §. weiter fort, und findet alsdenn allemahl, daß jede von den concentriſchen Kugelflächen, alſo auch die unterſte KLST einen Druck leide, deſſen Höhe einerley iſt, mit der Höhe der drüber ſtehenden Waſſermaſſe. Weil übrigens die höchſte Kugelfläche ABMN gar keinen Druck leidet; ſo erhellet, daß die ganze kugelförmige Maſſe Waſſer ſich ſelbſt im Gleichgewicht erhalte.

Der 1. Zuſatz.

36. Weil die vorgetragenen Schlüſſe allemahl ihre Anwendung finden, die innere feſte Kugel KLST mag ſo klein angenommen werden, als man will; ſo erhellet, daß auch dieſer innere Raum mit Waſſer angefüllet ſeyn könnte, wenn alle Elemente deſſelben gegen denſelben Mittelpunct C ſchwer ſind.

Der 2. Zuſatz.

37. Nur alsdenn, wenn die äuſſere Fläche der gegen den Mittelpunct C ſchweren Waſſermaſſe ABDEF kugelförmig iſt, erhält ſich alles im Gleichgewicht. Wäre nemlich nicht ABDEF, ſondern 130 Fig.

BDGH eine aus C beſchriebene Kugelfläche, welche die Oberfläche der Waſſermaſſe ſo ſchnitte, daß oberhalb BKD, wenn das ein Stück der Kugelfläche iſt, ſich noch ein Theil BGDK der Waſſermaſſe befände; ſo litte BKD noch einen Druck, der ſich auch ſeitwärts fortgepflanzt. Demnach würde die Waſſermaſſe BGKD noch zerflieſſen, und das Gleichgewicht könnte nicht beſtehen.

Der 3. Zuſatz.

38. Weil alles Waſſer auf der Erde eigentlich gegen den Mittelpunct der Erde ſchwer iſt; ſo erhellet aus den eben vorgetragenen Schlüſſen, daß die Oberfläche des Weltmeeres, wenn alles ruhig iſt, ein Stück von einer Kugelfläche ſey, die mit der Erde ſelbſt einerley Mittelpunct hat.

Die 3. Aufgabe.

39. Das Gewicht eines feſten Körpers der auf dem Waſſer ſchwimmend erhalten wird, iſt gegeben: man ſoll die Gröſſe des eingetauchten Theils im Cubicmaaß finden.

Aufl. Man ſuche im Cubicmaaß, wie groß der Raum ſey, welchen eine Menge Waſſer füllet, die eben ſoviel wiegt, als der ganze Körper. (28. §.) Die Gröſſe dieſes Raums wird in Cubicfüſſen oder Cubiczollen gefunden, nachdem man das Gewicht des feſten Körpers mit dem Gewicht eines Cubicfuſſes, oder Cubiczolles Waſſer dividirt.

Z. E. Wenn der feſte Körper 330 Pfund wiegt, ſo nimmt der eingetauchte Theil ſoviel Raum ein, als 330 Pfund Waſſer, und dieſe füllen einen Raum von 5 Cubicfuß, weil 1 Cubicfuß Waſſer 66 Pfund wiegt.

Zuſatz.

40. Wenn umgekehrt die Gröſſe des eingetauchten Theils im Cubicmaaß bekannt iſt; ſo läßt ſich daraus leicht das Gewicht des ganzen feſten Körpers finden. Denn er wiegt ſoviel, als die Menge Waſſer, welche mit dem eingetauchten Theil gleichviel Raum einnimmt. Man multiplicire alſo die Zahl, welche die Gröſſe des eingetauchten Theils in Cubicfuſſen oder Cubiczollen angiebt, im erſten Fall mit dem Gewicht eines Cubicfuſſes im letzten Fall mit dem Gewicht eines Cubiczolles Waſſer; ſo hat man das Gewicht der Menge Waſſer, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllet: alſo zugleich das Gewicht des feſten Körpers.

Die 4. Aufgabe.

41. **Ein Körper iſt aus zweyen mit einander vermiſchten ungleichartigen Maſſen zuſammen geſetzt, die nach der Vermiſchung noch einen Raum füllen, welcher der Summe der Räume gleich iſt, die ſie vor der Vermiſchung einnahmen: man ſoll durch eine hydroſtatiſche Probe finden, wieviel von jeder dieſer Maſſen in der aus ihrer Vermiſchung entſtandenen enthalten ſey.**

Aufl. Man muß zuförderſt das eigenthümliche Gewicht einer jeden von beyden unvermiſchten Maſſen ſuchen, wofern es nicht ſonſt ſchon bekannt iſt: überdem ſucht man auch das eigenthümliche Gewicht der vermiſchten Maſſe, (31. §.) und findet alsdenn leicht nach der Alligationsregel (111. §. Rech.) in welchem Verhältniſſe beyde Maſſen zur Vermiſchung genommen ſind. Hiernächſt giebt die Vermiſchungsregel, welche mit der Societätsregel

(110. §.

(110. §. Rech.) einerley iſt, wieviel eigentlich von jeder Maſſe in dem Körper enthalten ſey, der aus ihrer Vermiſchung entſtanden iſt.

Exempel. Ein aus Gold und Silber zuſammen geſchmolzener Körper wiegt 20 Pfund, und verliert im Waſſer $1\frac{1}{4}$ Pfund: die Frage iſt, wieviel Gold, und wieviel Silber derſelbe enthalte?

1) Man ſuche mit Hülfe der im 15. §. der Statiſchen mitgetheilten Tafel, wieviel 20 Pfund fein Gold, und 20 Pfund fein Silber im Waſſer verlieren, das feine Gold iſt 19,64mahl ſchwerer als Waſſer: alſo wiegt eine Menge Waſſer, die mit 20 Pfund Gold einerley Raum füllet, 19,64mahl weniger, und man findet, wieviel 20 Pfund Gold im Waſſer verlieren, wenn man das Gewicht der 20 Pfunde oder 9600 Gran mit 19,64 dividirt. Das giebt 7821 Gran. Silber iſt 11,091 mahl ſchwerer als Waſſer. Wenn alſo 20 Pfund oder 9600 Gran mit 11,091 dividirt werden, ſo findet man, daß 20 Pfund Silber 13849 Gran im Waſſer verlieren.

2) Man ſetze nach der Alligationsregel

verlieren	Grane	auf
20 Pf. fein Gold	7821	4249 Gran fein Gold
20 Pf. ſchlecht Gold	9600	ſind alſo
20 Pf. Silber	13849	1779 Gran Silber zugeſetzt.
		Summe 6028 Gr. ſchlecht Gold.

3) Man ſetze ferner nach der Vermiſchungsregel

ſchlecht Gold fein Gold

6028 Gr. — 4249 Gr. — 20 Pfund?

Antw. 14,1 Pfund fein Gold,

alſo 5,9 Pfund Silber.

Die

Die 5. Aufgabe.

42. Das ſpecifiſche Gewicht einer flüßigen Maſſe vermittelſt eines hineingetauchten feſten Körpers zu finden, der darin nicht ganz unterſinkt.

Aufl. Man ſuche die Gröſſe des eingetauchten Theils im Cubicmaaß, ſo iſt das zugleich die Gröſſe einer Menge des flüßigen, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum ausfüllet, und deren Gewicht ſo groß iſt, als das Gewicht des feſten Körpers. Wenn alſo dieſes Gewicht des feſten Körpers mit der Zahl dividirt wird, welche die Gröſſe des eingetauchten Theils im Cubicmaaſſe angiebt; ſo erhält man das Gewicht eines Cubicfuſſes oder Cubiczolles des flüßigen, nachdem die Gröſſe des eingetauchten Theils in Cubicfuſſen, oder Cubiczollen ausgedrückt iſt.

Exempel. Von einem feſten Körper der 10 Cubicfuß groß, und 330 Pfund ſchwer iſt, taucht ſich nur die Hälfte wovon die Gröſſe 5 Cubicfuß beträgt, ins Waſſer: wieviel wiegt alſo ein Cubicfuß Waſſer? Antwort $\frac{330}{5} = 66$ Pfund.

Zuſatz.

43. Wenn von einem und eben demſelben feſten Körper in zweyen verſchiedenen Flüßigkeiten, ſich ungleiche Theile eintauchen, ſo verhalten ſich die eigenthümlichen Gewichte der Flüßigkeiten umgekehrt, wie die eingetauchten Theile: eine Flüßigkeit iſt nochmal ſo ſchwer als die andre, wenn der in der erſten eingetauchte Theil des feſten Körpers nur halb ſo groß iſt, als der, welcher ſich in der andern eintaucht. Es bleibt nemlich das Dividendum einerley: alſo müſſen die Quotienten, welche die eigen-

thüm-

thümlichen Gewichte der Flüßigkeiten anzeigen, ſich umgekehrt wie die Diviſoren verhalten, (21. §. Rech.) alſo umgekehrt wie die Gröſſe der eingetauchten Theile.

Die 5. Erklärung.

44. Durch eine Senkwage verſteht man einen zu dem Gebrauch eingerichteten feſten Körper, daß man aus der Gröſſe des Theils, der ſich davon in eine Flüßigkeit ſenkt, auf das eigenthümliche Gewicht der Flüßigkeit, oder auch wohl noch eines andern mit jenem verbundenen feſten Körpers ſchlieſſen kann.

Der 1. Zuſatz.

131 Fig. 45. Gewöhnlich beſteht die Senkwage aus einer Röhre AB, die unten mit einer hohlen Kugel BC zuſammen hängt, oder auch wohl mit zweyen ſolchen Kugeln, einer gröſſern BC, und einer andern CD unter der vorigen, die noch kleiner als jene iſt. Man legt alsdenn ſoviel Bleyſchrot oder ſonſt was ſchweres hinein, als nöthig iſt, damit das Werkzeug in der einen oder der andern Flüßigkeit ſich bis auf eine gewiſſe Tiefe ſenke, die an der Röhre durch ein Zeichen bemerkt wird. In leichtere Flüßigkeiten ſinkt alsdenn die Senkwage tiefer, als in ſchwerere.

Der 2 Zuſatz.

46. Man kann der Senkwage die Einrichtung geben, daß ſie anzeigt, wievielmahl das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers im ſpecifiſchen Gewicht der mit der Senkwage zu prüfenden flüßigen Maſſe enthalten iſt, und die alsdenn erforderliche Eintheilung der Röhre läßt ſich nach theoretiſchen Gründen durch Rechnung finden. M. ſ. davon die Anfangsgründe der Math. Wiſſenſch. 2. Band 52 u. f. §. der Hydroſtatik 198 u. f. S. auch die Anfangsgründe der Naturlehre 170 u. f. §. 179 u. f. S.

Erſte Gründe
der
Aerometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Eine flüßige Maſſe nennt man elaſtiſch, wenn ſie zwar durch einen äuſſern Druck in einen engern Raum zuſammen gepreßt werden kann; aber auch deſto ſtärker entgegen drückt, und zugleich nach allen Seiten ſich auszubreiten ſtrebt, je kleiner der Raum iſt, worin ſie ſchon iſt zuſammen gepreßt worden. Ihr Beſtreben ſich nach allen Seiten auszubreiten nennt man ihre Federkraft, oder Elaſticität.

Der 1. Grundſatz.

2. Wenn eine elaſtiſche nicht ſchwere flüßige Maſſe in einer graden priſmatiſchen oder cylindriſchen Röhre AB zwiſchen zwoen Stempeln CD, EF, eingeſchloſſen iſt, und wenn alsdenn gleiche Kräfte dieſe Stempel einander entgegen treiben: ſo kommen dieſe Kräfte alsdenn allererſt ins Gleichgewicht, wenn die flüßige Maſſe ſoweit zuſammengedrückt iſt, daß ihr Gegendruck gegen jeden Stempel der Kraft an jedem Stempel gleich iſt. Der Druck pflanzt ſich alsdenn zugleich nach allen Seiten auch gegen die feſte Röhre gleichförmig fort. 119 Fig.

Der 1. Zuſatz.

3. Wenn CD, EF, keine bewegliche Stempel, ſondern ſtatt deſſen feſte mit dem übrigen Umfang 119 Fig.

der

der Röhre zuſammenhängende Seitenflächen wären; ſo würde die eingeſchloſſene elaſtiſche flüßige Maſſe gegen jede von dieſen Flächen noch eben ſo ſtark, als vorhin drücken. Die Gröſſe dieſes Drucks iſt der Federkraft der flüßigen Maſſe gleich.

Der 2. Zuſatz.

119 Fig. 4. Der von der Federkraft der eingeſchloſſenen Maſſe herrührende Druck gegen die Flächen CD, EF, und eben ſo gegen jedes andere Stück vom feſten Umfange des Gefäſſes, welches die Maſſe umgiebt, iſt über dieſe Flächen gleichförmig vertheilt: auch iſt die Gröſſe dieſes Drucks gegen jede ſolche Fläche, wie EF, bekannt, wenn die Höhe einer graden und ſchweren Waſſerſäule bekannt iſt, die wenn ſie über derſelben Fläche lothrecht ſtünde, vermöge ihres Gewichts dieſe Fläche eben ſo ſtark drücken würde.

Die 2. Erklärung.

5. Wenn eine ebene Fläche dem von der Federkraft einer elaſtiſchen flüßigen Maſſe herrührenden Druck ausgeſetzt iſt; ſo verſteht man durch die Höhe des Drucks, wie im 16. §. der Hydroſtatik die Höhe einer graden Waſſerſäule deren Grundfläche ſo groß iſt, als die Fläche, die den Druck leidet, und deren Gewicht dem Druck gegen dieſe Fläche gleich iſt. Hier nennt man eben dieſe Höhe auch wohl die der Federkraft der elaſtiſchen flüſſigen Maſſe zugehörige Höhe.

Zuſatz.

6. Dieſe Höhe iſt einerley, die gepreßte Fläche mag groß oder klein ſeyn, ſo lange die flüßige Maſſe und ihre Federkraft einerley bleibt. Denn die doppelte

pelte Fläche leidet doppelt ſoviel Druck, und das Gewicht einer Waſſerſäule über der doppelten Grundfläche iſt doppelt ſo groß, als über der einfachen Grundfläche, wenn die Höhe einerley bleibt.

Die 3. Erklärung.

7. Jede elaſtiſche flüßige Maſſe kann hier Kürze halber **Luft** heiſſen: daher hat die Wiſſenſchaft von den Geſetzen des Gleichgewichts ſolcher Kräfte, die auf elaſtiſche flüßige Maſſen wirken, den Nahmen Aerometrie oder Aeroſtatik erhalten.

Die 1. Erfahrung

8. Es giebt in der Natur wirklich eine ſolche elaſtiſche Luft, und alle Räume, die uns ſonſt leer zu ſeyn ſcheinen, ſind damit angefüllet, wir ſind überall mit einer ſolchen Luft umgeben, und es kann uns jeder Athemzug davon überzeugen. Allerley leichte Erfahrungen überzeugen uns, daß dieſe Luft ſich zwar zuſammendrücken laſſe, aber auch ein Beſtreben äuſſere, ſich wieder auszubreiten. Man iſt nicht im Stande, einen Stempel, der in einem hohlen feſten Cylinder genau paſſet, bis auf den Boden herab zu ſtoſſen, der Cylinder müſte denn im Boden eine Oefnung haben, durch welche die im Cylinder befindliche Luft ausweichen könnte. Sobald der Druck gegen den Stempel, nachdem derſelbe bis auf eine gewiſſe Tiefe in den Cylinder hineingetrieben iſt, nachläßt, fährt der Stempel zurück, welches ein Erfolg iſt, den man der Federkraft der im Cylinder eingeſchloſſenen Luft zuſchreiben muß. Wenn der Cylinder im Boden, oder ſeitwärts, eine Oefnung hat, die man anfangs, wenn der Stempel hineingetrieben wird, mit einem Hahn verſchlieſ-

ſen kann; ſo dringt die Luft hiernächſt nach Oefnung des Hahns mit einem deſto ſtärkern Geräuſche heraus, je ſtärker man ſie vermittelſt des Stempels zuſammengedrückt hatte.

Die 2. Erfahrung.

132 Fig. 9. Mit dem Gefäß EFG, welches nur oben bey G eine Oefnung hat, ſey eine Röhre GH, und dieſe wieder mit dem Cylinder ABCD, worin ein Stempel K beweglich iſt, in Verbindung. Die Röhre ſey mit dem Hahn KL verſehen, damit die Verbindung zwiſchen dem Gefäß und Cylinder nach Gefallen geſperret werden könne. Man ziehe den Stempel vom Boden des Cylinders zurück, und drehe hiernächſt den Hahn ſo, daß die Verbindung zwiſchen dem Cylinder und Gefäß hergeſtellet werde. In demſelben Augenblick wird man ein Geziſche hören, und daß dieſes daher rühre, weil ein Theil von der Luft, die im Gefäß befindlich war, in den Cylinder getreten iſt, davon kann man ſich auf mehr als eine Art überzeugen. Wird der Hahn ſogleich wieder verſchloſſen, ſo läßt ſich nun der Stempel nicht mehr ganz bis auf den Boden zurück treiben, wofern anders alles gut ſchlieſſet, und der Erfolg iſt übrigens mit dem im 8. §. beſchriebenen einerley.

Zuſatz.

10. Es folgt daraus, daß die Luft ſchon in dem Zuſtande, wie ſie um uns her befindlich iſt, ein Beſtreben äuſſere, ſich nach allen Seiten auszubreiten. Der Verſuch gelingt allemahl, die Oefnung G mag oben, unten oder ſeitwärts befindlich ſeyn. In dem
133 Fall, wenn ſie unten oder ſeitwärts befindlich wäre,
Fig. lieſſe ſich wohl eine andre mögliche Urſache des Erfolgs

Folgs angeben. Die Luft könnte auch ſchwer ſeyn, und als eine ſchwere Flüßigkeit durch eine Seitenöfnung, oder auch unten ausflieſſen. Sie würde aber in den Cylinder auch alsdenn nur ſo hoch hineintreten können, als ſie in dem damit verbundenen Gefäß geſtanden hätte, und in dem Fall, welchen die 132. Figur vorſtellet, würde ſie dem Stempel gar nicht folgen.

Die 3. Erfahrung.

11. Man kann anſtatt des Hahnen im Boden des Cylinders über der Oefnung H eine Klappe oder ein ſogenanntes Ventil anbringen, welches ſich durch einen leichten Druck von auſſenher öfnen läſſet, aber die Oefnung nur deſto feſter ſchlieſſet, wenn von innen her etwas dagegen drückt. Ferner kann auch der Stempel eine Oefnung erhalten, die von oben auf ähnliche Art mit einem Ventil geſchloſſen wird. Wenn alsdenn nach dem erſten Zuge der Stempel wieder gegen den Boden des Cylinders zurück geſtoſſen, und dadurch die durch das Ventil bey H hineingetretene Luft zuſammengedrückt wird, ſo ſtößt ſie das Ventil im Stempel offen, und tritt durch dieſe Oefnung aus dem Cylinder heraus. Ein neuer Stempelzug nimmt alsdenn abermahl einen Theil Luft aus dem mit dem Cylinder verbundenen Gefäſſe weg, und man kann dies Verfahren mit eben dem Erfolge mehrmahls wiederhohlen. 132 Fig.

Zuſatz.

12. Es folgt daraus, daß auch ſolche Luft, deren Dichtigkeit um ein beträchtliches geringer iſt, als die Dichtigkeit der um uns her befindlichen Luft im natürlichen Zuſtande, noch ein Beſtreben behalte,

ſich nach allen Seiten auszubreiten. Mit jedem Stempelzuge breitet ſich die Luft, welche im Gefäſſe war, durch den ganzen innern Raum des Gefäſſes und des Cylinders aus: alſo wird ein Theil davon zwar weggenommen, im Gefäß aber bleibt allemahl noch Luft zurück, deren Dichtigkeit nun geringer iſt, als die Dichtigkeit der in eben dem Gefäß eingeſchloſſenen Luft vor dem Stempelzuge war.

Die 4. Erklärung.

13. Man nennt ein ſolches Werkzeug eine **Luftpumpe**, welches dazu dient, die Luft aus einem eingeſchloſſenen Raum, wo nicht gänzlich, doch wenigſtens gröſtentheils wegzunehmen, auch wohl umgekehrt mehr Luft hinein zu bringen, als derſelbe für ſich ſchon enthält.

Der 1. Zuſatz.

14. Wenn die Luftpumpe dienen ſoll, die Luft zu verdünnen; ſo kann ſie in der Hauptſache die im 9. bis 12. §. beſchriebene Einrichtung haben, ob man gleich die Sache auf mancherley Art abändern, und alles zum Gebrauch unter andern auch dadurch bequemer einrichten kann, daß man, um die Bewegung des Stempels zu erleichtern, eine eigene mechaniſche Anordnung, entweder nach Art einer Winde, oder einer Zug- und Druckſtange damit verbindet. Damit man ſehen könne, was in der verdünnten Luft vorgehet, wählt man am liebſten gläſerne Gefäſſe, und damit man deſto bequemer allerley Sachen hinein legen könne, läßt man einem ſolchen Gefäſſe die Geſtalt einer Klocke geben, die man hiernächſt auf einen metallenen recht eben abgeſchliffenen horizontal liegenden Teller ſetzen kann. Der

Teller

Teller dient alsdenn wie ein Boden des Gefäſſes, worin die Luft verdünnt werden ſoll, er hat in der Mitte bey G eine Oefnung, und dieſe iſt vermittelſt 133 einer Röhre HIG mit dem Boden des Cylinders Fig. ABCD in Verbindung. Der untere Rand der Klocke muß recht eben abgeſchliffen ſeyn, damit er an den Teller gut anſchlieſſe. Um jedoch deſto ſicherer das Hineindringen der äuſſern Luft abzuhalten, legt man ein Stück naſſes nicht gar zu dickes Leder auf den Teller, und darüber ſetzt man die Klocke.

Der 2. Zuſatz.

15. Anſtatt der Ventile dient auch im Boden 133 des Cylinders ein doppelt durchborter Hahn, den Fig. man bey jedem Stempelzuge ſo ſtellen kann, daß ein Weg aus der Klocke durch den Hahn in den Cylinder hinein offen iſt, bey jedem Rückzuge aber in einer andern Stellung ſo, daß ein Weg aus dem Cylinder durch den Hahn in die äuſſere freye Luft offen iſt. Wenn alsdenn die Klocke ſtark genug iſt, daß man ſie vermittelſt einer dazu dienlichen Anordnung mit Schrauben am Teller befeſtigen kann; oder wenn ſtatt deſſen bey G ſonſt ein hinlänglich ſtarkes Gefäß feſtgeſchroben wird; ſo dient die Luftpumpe auch, die Luft im Gefäſſe zu verdichten. Man muß alsdenn, wenn der Stempel vom Boden des Cylinders weggezogen wird, den Hahn ſo ſtellen, daß von auſſen durch den Hahn Luft in den Cylinder hineintreten kann; beym Rückzuge aber muß der Hahn die andre Stellung haben, damit die in den Cylinder hinein getretene Luft durch den Hahn in die Klocke, oder ein andres Gefäß, das ihre Stelle vertritt, hinein getrieben werden könne.

Der 3. Zuſatz.

133 Fig. 16. Auch wenn die Pumpe Ventile hat, kann auf mehr als eine Art die Anordnung ſo gemacht werden, daß ſie zum Verdichten dient: die Anordnung der Pumpe wird aber alsdenn ziemlich zuſammengeſetzt. Wenn das Werkzeug nur als Druckpumpe dienen ſoll; ſo iſt nur ein Ventil im Boden des Cylinders nöthig, welches ſich von innen nach auſſen öfnet, wenn der Stempel gegen den Boden des Cylinders getrieben wird. Im Stempel könnte ein eben ſo liegendes Ventil angebracht ſeyn: ſtatt deſſen kann aber auch eine kleine Oefnung oberwärts im Cylinder dienen, wie bey L. vorgeſtellet iſt. Sobald der Stempel ſoweit herauf gezogen iſt, daß er ein wenig über dieſe Oefnung tritt; ſobald dringt die Luft von auſſen in den Cylinder hinein, und wird beym Rückzuge von dem Stempel durchs Ventil im Boden des Cylinders wieder hinausgetrieben.

Anmerkung.

Herr Otto von Guericke, vormahls Bürgermeiſter in Magdeburg und Churbrandenburgiſcher Rath, erfand um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die Luftpumpe. Der damahlige Lehrer der Mathematik zu Würzburg, Caſpar Schott, machte eine Beſchreibung davon im Jahr 1657 in einem Werke bekannt, das den Titel führt: Ars mechanico-hydraulico-pneumatica, daraus lernte ſie Herr Robert Boyle kennen, und machte dieſe Erfindung mit einigen Veränderungen auch in Engelland weiter bekannt. Von allen dem findet man mehr Nachricht in den Anfangsgründen der Mathematiſchen Wiſſenſchaften, 2. Band, III. Abſchnitt, 21 u f. §. 239 u. f. S. und im VI. Theil des Lehrbegriffes der geſammten Mathematik in V. Abſch. der Pneumatik, im 60. u. f. §. §. 406. u. f. S. Die Verſuche, welche man anſtellet, um dadurch zu erfahren, was mit mancherley Maſſen in der verdünnten Luft vorgehet, gehören in die Naturlehre, und man kann darüber meine Anfangsgründe der Naturlehre zu Rath ziehen, beſonders im XI. und XII. Abſchn. 225. u. f. S.

Die 4. Erfahrung.

17. Eine feſt zugebundene trockene Blaſe, worin nur wenig Luft in den Falten verſteckt iſt, ſchwillt auf, wenn man ſie erwärmt. Sie zerſpringt auch wohl mit einem Knall, wenn man ſie, ohne ſie zu verbrennen, ſtark genug erhitzt, und Luft genug darin vorhanden iſt.

Der 1. Zuſatz.

18. Einerley Luftmaſſe hat alſo bey gleicher Dichtigkeit in einerley Raum mehr Federkraft, wenn ſie mehr erwärmt, und weniger Federkraft, wenn ſie weniger erwärmt iſt.

Der 2. Zuſatz.

19. Die Verſuche lehren ferner, daß die Federkraft gleich warmer und ungleich dichter Luftmaſſen ſich ſehr nahe, wie ihre Dichtigkeit verhalte. Doppelt ſo dichte Luft hat bey gleicher Wärme doppelt ſoviele Federkraft, als Luft von der einfachen Dichtigkeit. Weil Hr. Mariotte im Diſcours de la Nature de l'Air 1676, und im Traité des mouvemens des eaux, II Partie, II Diſcours, pag. 165, Paris 1686. dieſes Geſetz mit Verſuchen beſtätiget hat, ſo nennt man es gewöhnlich das Mariottiſche Geſetz der Dichtigkeiten der Luft, obgleich auch Robert Boyle ſchon auf eben dieſes Geſetz verfallen war.

Die 5. Erfahrung.

20. Eine hohle Kugel, die mit einem Hahn verſchloſſen werden kann, nachdem man vorher die Luft ſoviel möglich herausgezogen hat, wäge man leer, und hiernächſt auch mit Luft angefüllt; ſo findet man, daß im letzten Fall allemahl mehr Gegengewicht, als im erſten Fall nöthig iſt. Demnach

iſt die Luft ſchwer. Gewöhnlich findet man in den niedrigſten Gegenden unten an der Erdfläche, die Luft bey mittelmäßiger Wärme ohngefehr 800 bis 850mahl leichter als Waſſer, bald etwas mehr, bald weniger, weil die Dichtigkeit der Luft nicht immer einerley iſt.

Zuſatz.

21. Weil überall auf der ganzen Erde Luft anzutreffen iſt, ſelbſt auf den höchſten Bergen, wo nur Menſchen hingekommen ſind, und weil eben dieſe Luft auch ſchwer iſt; ſo wird es begreiflich, wie ſelbige nach den Geſetzen des Gleichgewichts (35. §. Hydroſt.) die ganze Erdkugel bis auf eine anſehnliche Höhe umgeben könne, ohne daß ſie wegen ihrer Elaſticität ſich ausbreite und von der Erde entferne. Dieſe geſammte die ganze Erde umgebende Luftmaſſe heißt die Atmoſphäre oder der Dunſtkreis.

Der 1. Lehrſatz.

22. Wenn in der Atmoſphäre alles im Gleichgewicht iſt, ſo hat die Luft unten an der Erdfläche die gröſte Federkraft und Dichtigkeit, in gröſſern Höhen von der Erdfläche nimmt aber ihre Federkraft und Dichtigkeit immer mehr ab, bis endlich an der äuſſerſten Gränze der Atmoſphäre ihre Federkraft unmerklich wird.

129 Fig. Beweis. Weil die Luft flüßig und gegen den Mittelpunct der Erde ſchwer iſt, ſo muß ſie im Zuſtande des Gleichgewichts die Erdkugel überall in gleicher Höhe umgeben. (35. §. Hydroſt.) Demnach ſtelle KLST die Erdkugel vor, und die Atmoſphäre ſey vermittelſt ſolcher Kugelflächen HIR, FGQ,

FGQ, DEP, u. ſ. f. die mit der Erdkugel einerley Mittelpunct haben, in Schichten von ſehr kleinen Höhen eingetheilt, ſo leidet jede Schichte wegen des Gewichts der über ihr befindlichen Luftmaſſe von oben her Druck, der aber deſto kleiner iſt, je höher dieſe Schichte ſchon über der Erdfläche erhaben iſt. Weil nun in jeder Schichte die Federkraft der Luft mit dieſem Druck im Gleichgewicht iſt, ſo iſt die Federkraft der Luft in einer ſolchen Schichte deſto kleiner, mithin auch die Dichtigkeit der Luft deſto kleiner, (19. §.) je höher die Schichte über der Erdfläche erhaben iſt. An der äuſſerſten Gränze der Atmoſphäre iſt die Luft weiter keinem Druck ausgeſetzt: alſo muß daſelbſt ihre Federkraft unmerklech ſeyn.

Die 6. Erfahrung.

23. Eine gläſerne etwas mehr als 28 Pariſer Zoll lange Röhre, die an dem einen Ende verſchloſſen iſt, kann man mit Queckſilber füllen. Wenn man hiernächſt dieſe Röhre umkehrt, und die Oefnung mit dem Finger beym Umkehren verſchloſſen hält; ſo kann man das offene Ende in ein Gefäß mit Queckſilber ſetzen, ohne daß alles Queckſilber aus der Röhre herabfiele, wenn man die Röhre unten nur alsdenn allererſt öfnet, wenn das Ende der Röhre ins Queckſilber eingetaucht iſt. Das Queckſilber ſinckt zwar anfangs in der Röhre etwas herab, es bleibt aber bald darauf ohngefehr 28 Pariſer Zoll hoch über der Oberfläche des Queckſilbers im Gefäß ſtehen. Evangeliſta Torricellius hat dieſen Verſuch mit den daraus flieſſenden Folgen zuerſt bekannt gemacht, und daher hat die Röhre von ihm den Nahmen der Torricellianiſchen

Röhre, nachher aber auch den Nahmen des Barometers erhalten.

Der 2. Lehrſatz.

24. In den niedrigſten Gegenden an der Erdfläche drückt die Luft wegen ihrer Federkraft gegen jede ebene Fläche ſo ſtark, als wenn eine Queckſilber-Säule 28 Pariſer Zoll hoch, oder ſtatt deſſen eine 32 Fuß hohe Waſſerſäule lothrecht darüber ſtünde.

135 Fig. Beweis. Wenn AB die oben bey A verſchloſſene und unten bey B offene Torricellianiſche Röhre, CD aber das Gefäß vorſtellet, worin das Queckſilber bis an EF ſteht, wenn es ſich in der Röhre in der Höhe GH erhält; ſo erhellet, daß das Queckſilber nur bis an G in die Röhre hineintreten könnte (24. §. Hydroſtat.) wenn nicht ein Druck gegen die Fläche EF des Queckſilbers im Gefäß mit der Säule GH das Gleichgewicht hielte. Dieſer Druck muß ſo groß ſeyn, als das Gewicht einer Queckſilberſäule über der Grundfläche EF in der Höhe GH. Weil nun nichts vorhanden iſt, das gegen die Fläche EF drücken könnte; als die Luft; ſo muß dieſer Druck der Luft mit der Queckſilberſäule GH im Gleichgewicht ſeyn. Jede andre Ebene leidet demnach ebenfalls ſoviel Druck, als wenn eine 28 Zoll hohe Queckſilberſäule lothrecht darüber ſtünde, (6. §.) oder ſtatt deſſen eine 14mahl 28 Zoll, oder 32 Fuß hohe Waſſerſäule, weil Queckſilber 14mahl ſchwerer als Waſſer iſt.

Der 1. Zuſatz.

35. Wenn man die Höhe der Queckſilberſäule in der Torricellianiſchen Röhre, welche mit dem Druck

Druck der Luft das Gleichgewicht hält, die Barometerhöhe nennt; ſo dient dieſe aufs genaueſte die Gröſſe des Drucks der Luft jedesmahl zu finden, weil die Erfahrung lehrt, daß dieſe Höhe an einerley Ort nicht immer einerley ſey, ſondern bald etwas höher bald etwas kleiner, als 28 Pariſer Zolle ausfalle.

Der 2. Zuſatz.

36. Die eigentliche Barometerhöhe läßt ſich am bequemſten meſſen, wenn Röhre und Gefäß an einer in Zolle und Linien eingetheilten Tafel beveſtiget ſind. Die gewöhnlichſte Einrichtung des Barometers, wie es die 136 Figur vorſtellet, iſt jetzt ſehr allgemein bekannt, wobey das Gefäß mit Queckſilber eine kleine gläſerne Flaſche FG iſt, die mit der Röhre AB zuſammen hängt. Wenn in der kleinen Flaſche das Queckſilber bis an DE in der Röhre bis an H ſteht, ſo iſt CH die Barometerhöhe. Von andern Einrichtungen findet man Nachrichten im 2ten Bande der Anfangsgründe der Math. Wiſſ. im IV Abſch. der Aeroſtatik, und im 3ten Theil des Lehrbegriffes der geſ. Math. im 3 Abſchnitt der Aeroſtat. 136 Fig.

Der 3. Zuſatz.

37. Wenn man einen Berg hinan ſteigt, und ein Barometer mitnimmt, deſſen Höhe man am Fuß des Berges angemerkt hat, ſo muß dieſe Höhe deſto mehr abnehmen, je höher man den Berg hinauf kömmt. (24. §.) Ja es muß möglich ſeyn, ein Geſetz zu finden, nach welchem ſich die Barometerhöhe in jeder Höhe über der Erdfläche angeben, alſo auch umgekehrt, aus der auf einem Berge

ge beobachteten Barometerhöhe, die lothrechte Höhe des Berges über der Erdfläche herleiten läſſet.

Die 7. Erfahrung.

38. Alle bekannte beſonders flüßige Maſſen werden von der Wärme in einen gröſſern Raum ausgedehnt, und nehmen nach der Erkaltung wieder einen kleinern Raum ein.

Die 5. Erklärung.

39. Ein Thermometer nennt man ein ſolches Werkzeug, welches ungleiche Grade der Wärme mit einander zu vergleichen, oder auch nur Aenderungen beſonders in der Wärme der Luft bemerklich zu machen dient.

Zuſatz.

137 Fig. 40. Wenn man eine enge gläſerne Röhre AB, die unten mit einer Kugel, oder ſonſt mit einem kleinen Behältniß von willkührlicher Geſtalt in Verbindung iſt, bis an eine gewiſſe Stelle der Röhre mit geſchwächten Weingeiſt, oder Queckſilber, gefüllt hat; ſo ſteigt die flüßige Maſſe in der Röhre höher, wenn man das Werkzeug erwärmt, und fällt tiefer herab, wenn das Werkzeug kälter wird. Die Urſache iſt, weil Wärme und Kälte ſtärker auf die Flüßigkeit als auf das Glas wirken. Eine ſolche Röhre mit der Kugel befeſtiget man an einer eingetheilten Tafel, ſo hat man ein Thermometer.

Die 8 Erfahrung.

41. Man ſetze die Kugel mit dem untern Ende der Röhre in ſchmelzenden Schnee, oder in zerfloſſenes thauendes Eis, und bemerke die Stelle an der Röhre, wo die Flüßigkeit ſtehen bleibt, unter

dem Nahmen des Froſtpuncts. Nachher erwärme man die Kugel und Röhre allmählig, tauche ſie zuletzt in ſiedendes Waſſer, und bemerke die Stelle, wo nun die Flüßigkeit ſtehen bleibt, unter dem Nahmen des Siedepuncts. Hat man dieſe Stellen an einem Thermometer einmahl richtig geſucht, und man wiederhohlt das Verfahren mehrmahl zu verſchiedenen Zeiten, auch an verſchiedenen Orten; ſo lehrt die Erfahrung, daß ſowohl im ſchmelzenden Schnee oder Eiſe, als auch im ſiedenden Waſſer die Flüßigkeit immer bey einerley Stelle ſtehen bleibe, wenn man nur den Verſuch im ſiedenden Waſſer immer zu einer ſolchen Zeit anſtellet, wenn das Barometer in derſelben Höhe ſtehet, wie es das erſtemahl ſtand. Den Froſtpunct zeigt die Flüßigkeit in freyer Luft allemahl beym angehenden Froſtwetter.

Zuſatz.

42. Die übrige Einrichtung des Thermometers kommt nur darauf an, daß man den Abſtand zwiſchen dem Froſtpunct und Siedepunct, welcher der Fundamentalabſtand heiſſen kann, in eine gewiſſe Menge gleicher Theile unter dem Nahmen der Thermometergrade richtig eintheile. Nachdem man demſelben entweder 180, oder nur 80, oder 150 gleiche Theile giebt, nachdem erhält man die Fahrenheitiſche, oder die Reaumüriſche, oder die Delisliſche Scale. Nach Reaumur ſetzt man beym Froſtpunct 0, und zählt 80 Grade bis zum Siedepunct hinauf. Nach Delisle wird oben beym Siedepunct 0 geſetzt, und man zählet 150 Grade von oben herab bis zum Frierpunct. Nach Fahrenheit aber trägt man zuförderſt 32 ſolcher Grade,

Grade, wovon 180 den Fundamentalabſtand ausmachen, unter den Froſtpunct gegen die Kugel zu, und ſetzt dahin, wo ſich die 32 Abtheilung endiget, die Null: von dieſer Null an zählet man hiernächſt 212 Grade bis zum Siedepunct hinauf, ſo fällt der 32ſte mit dem Froſtpunct zuſammen. M. ſ. den Lehrbegriff der geſ. Mathem. im III. Theil, im IV. Abſch. der Aeroſtat. 336 u. f. S. auch die Anfangsgründe der Mathem. Wiſſenſch. 2 Band, V. Abſch. der Aeroſt. 275 u. f. S.

Der 3. Lehrſatz.

129 Fig. 43. Je kleiner die Differenz *AD* der Halbmeſſer zwoer concentriſchen Kugelflächen *ABM*, *DEP*, in Vergleichung mit ihren Halbmeſſern iſt, deſto näher kommt der körperliche Inhalt des Raums zwiſchen dieſen Kugelflächen dem Inhalt eines graden Cylinders oder Priſmen über einer Grundfläche ſo groß, als die kleinere Kugelfläche *DEP* iſt, und in einer Höhe, die ſo groß iſt, als die Differenz *AD* der Halbmeſſer.

Beweis. Man ſetze CA $= r$, CD $= \varrho$, ſo iſt die gröſſere Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$, die kleinere $= \frac{4}{3}\pi\varrho^3$, (§. Geom.) alſo der Raum zwiſchen beyden Kugelflächen $= \frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3)$. Ferner findet man $r^3 - \varrho^2 = (r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r - \varrho)$, alſo iſt eben der Raum $= \frac{4}{3}\pi(r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r - \varrho)$. Man ſetze dieſen Raum $=$ V, und AD $= r - \varrho = \delta$, ſo iſt $r = \varrho + \delta$, und $r^2 = \varrho^2 + 2\varrho\delta + \delta^2$, $r\varrho = \varrho^2 + \delta\varrho$, alſo $r^2 + r\varrho + \varrho^2 = 3\varrho^2 + 3\delta\varrho + \delta^2$, und man findet V $= \frac{4}{3}\pi(3\varrho^2 + 3\delta\varrho + \delta^2)\delta = 4\pi(\varrho^2 + \delta\varrho + \frac{1}{3}\delta^2)\delta$. Aber $4\pi\varrho^2$ iſt der Quadratinhalt der

der Kugelfläche DEP, alſo iſt $V = DEP . \delta + \delta^2 \varrho + \frac{1}{3}\delta^3$, und dieſer Werth kommt der Gröſſe DEP . δ oder DEP . AD deſto näher, je kleiner δ oder AD in Vergleichung mit ϱ angenommen wird.

Die 1. Aufgabe.

44. Es ſtelle *KLS* die Erdkugel vor, und die Atmoſphäre umher ſey vermittelſt ſolcher Kugelflächen, die mit der Erde concentriſch ſind, in Schichten von ſo ſehr kleinen Höhen *HK*, *HO*, u. ſ. f. getheilt, daß die Dichtigkeit der Luft von der untern bis zur obern Gränze einer ſolchen Schichte noch nicht merklich verſchieden iſt. Die Dichtigkeit der in einer ſolchen Schichte befindlichen Luft, und die Höhe *HO* der Schichte ſind gegeben; auch iſt die Höhe desjenigen Drucks gegeben, dem die obere Gränze *OWX* dieſer Luftſchichte ausgeſetzt iſt: man ſoll die Höhe des Drucks gegen die untere Gränze *HIR* finden. 129 Fig.

Aufl. Es ſey α die Dichtigkeit der Luft, die ſich in der Schichte zwiſchen den Kugelflächen HIR und OWX befindet, und man verſtehe durch α die Zahl, welche die Dichtigkeit dieſer Luft in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Waſſers ausdrückt. Wenn alsdenn *g* das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer bezeichnet, ſo iſt $\alpha . g$ das Gewicht eines Cubicfuſſes von der in dieſer Schichte befindlichen Luft. Der körperliche Raum der Schichte im Cubicmaaß iſt wenigſtens ſehr nahe = HIR . HO, (43. §.) alſo das Gewicht der darin befindlichen Luft = $\alpha . g$. HIR . HO, (§. Stat.) und dem Druck dieſes Gewichts iſt die untere Gränze HIR unmittelbar aus-

ausgeſetzt. Der körperliche Inhalt einer Menge Waſſer, die eben das Gewicht hat, iſt = α. HIR. HO. (13. §. Statik.) Wenn alſo dieſe Menge Waſſer über HIR gleichförmig vertheilt würde, ſo würde α. HO die Höhe werden; mithin iſt α. HO die Höhe des unmittelbaren Drucks gegen HIR. Ferner ſey die obere Gränze OWX einem Druck ausgeſetzt, deſſen Höhe in eben dem Sinn = *p* iſt, ſo bleibt auch das die Höhe des gegen HIR fortgepflanzten Drucks, und die Höhe des geſammten Drucks, welchen HIR leidet, iſt = *p* + α. HO.

Zuſatz.

45. Waſſer iſt hier, wie in der Hydroſtatik, ein allgemeiner Nahme, der jede gleichförmig lichte unelaſtiſche Flüßigkeit bezeichnen kann. Wenn alſo hier von der Höhe des Drucks gegen eine oder die andre von den Gränzen dieſer kugelförmigen Schichten die Rede iſt; ſo kann auch die Höhe einer Maſſe Queckſilber verſtanden werden, die über der Kugelfläche gleichförmig vertheilt eben ſo ſtark dagegen drücken würde. Wenn alſo α die Zahl bezeichnet, welche die Dichtigkeit der in der Schichte zwiſchen HIR und OWX enthaltenen Luft in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Queckſilbers angiebt, und *g* das Gewicht eines Cubicfuſſes Queckſilber iſt; ſo iſt α. HO die Höhe einer Queckſilbermaſſe, die über HIR gleichförmig vertheilt dieſe Kugelfläche eben ſo ſtark drücken würde, als ſie von der zwiſchen HIR und OWX befindlichen Luft gedrückt wird. Bezeichnet alsdenn *p* die Höhe einer Queckſilberſäule, die mit dem Druck im Gleichgewicht iſt, welchem die OWX ausgeſetzt iſt; ſo ſind *p* und *p* + α. HO die Barometerhöhen in den Höhen KH und KO über der Erdfläche.

Der

Der 4. Lehrſatz.

46. Wenn *CD* ein Stück der Erdfläche, *CA* aber eine lothrechte Linie bis an die höchſte Gränze der Atmoſphäre vorſtellet, die Stellen *H* und *M* aber ungleich hoch über der Erdfläche erhaben ſind; ſo verhalten ſich die Höhen *CM*, *CH*, der Stationen über der Erdfläche, wie die Logarithmen der Verhältniſſe, in welchen die Barometerhöhen abnehmen. 142 Fig.

Beweis. Die lothrechte Höhe CA der Atmoſphäre ſey bey E, F, G, H, u. ſ. f. fort vermittelſt wagrechter Flächen in ſehr kleine gleiche Theile getheilt, welche nun die Höhen eben ſovieler Luftſchichten vorſtellen, die ſo niedrig ſind, daß ſich die Dichtigkeit der Luft von C bis E, von E bis F u. ſ. f. nicht merklich ändert. Man bezeichne die Dichtigkeiten dieſer Luftſchichten von unten hinauf nach der Ordnung mit den Buchſtaben Δ, α, β, γ, u. ſ. f. die Barometerhöhen in E, F, G, H, u. ſ. f. mit den Buchſtaben e, f, g, h, u. ſ. weiter, unten in C aber an der Erdfläche ſey die Barometerhöhe $= a$. Dies vorausgeſetzt hat man $e : f = \Delta : \alpha$, (19. §.) und $CE = EF$, alſo $e : f = \Delta . CE : \alpha . EF$. Weiter iſt $a = e + \Delta . CE$, und $e = f + \alpha . EF$, wenn Δ, α, und die übrigen griechiſchen Buchſtaben die Dichtigkeiten in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Queckſilbers ausdrücken: (45. §.) alſo $\Delta . CE = a - e$, und $\alpha . EF = e - f$, mithin $e : f = a - e : e - f$, oder $a - e : e - f = e : f$. Daraus folgt $a : e = e : f$, (§. Geom.) folglich ſind die Barometerhöhen in C, E, F, in geometriſcher Progreßion. Aber aus eben dem Grunde ſind die Barometerhöhen e, f, g, in den Stellen E, F, G, wie-

derum in geometriſcher Progreßion: mithin nehmen dieſe Barometerhöhen in einerley geometriſchen Progreßion ab, wenn die Höhen der Schichten gleich groß ſind.

Es ſey nun $CH = m . CE$, und $CM = n . CE$, in M ſey die Barometerhöhe $= p$, in H aber $= q$: ſo laufen dieſe Barometerhöhen in geometriſcher Progreßion fort, wovon

das 1ſte Glied $= a$
das 2te . . . $= e$
das 3te . . . $= f$
das $m$te . . . $= q$
das $n$te . . . $= p$

iſt. Dieſemnach iſt ferner

$$\log. \frac{a}{p} : \log. \frac{a}{q} = n : m, \quad (\quad §. \text{ Trigon.})$$

alſo $\log. \frac{a}{p} : \log. \frac{a}{q} = CM : CH.$

Der 1. Zuſatz.

47. Es ſey k die Höhe einer gleichförmig dichten Luftſäule, die, wenn ſie durchgängig die Dichtigkeit Δ hätte, mit dem Druck der ganzen Atmoſphäre zunächſt an der Erdfläche das Gleichgewicht hielte: ſo iſt die Höhe des Drucks gegen $CD = \Delta . k$, und die Höhe des Drucks gegen Ee iſt $= \Delta . k - \Delta . CE$: folglich $a : e = \Delta . k : \Delta . k - \Delta . CE = k : k - CE$, oder $a : e = \frac{k}{k - CE} : 1$. Ferner iſt $\frac{k}{k - CE} = 1 + \frac{CE}{k - CE}$ deſto näher $= 1 + \frac{CE}{k}$, je kleiner CE

genom-

genommen wird, alſo hier ohne merklichen Fehler $\frac{k}{k-CE} = 1 + \frac{CE}{k}$, und man erhält $a : e = 1 + \frac{CE}{k} : 1$. Vermöge des 46. §. aber iſt $l\frac{a}{p} : l\frac{a}{e} = CM : CE$, alſo auch $l\frac{a}{p} : l\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = CM : CE$.

Der 2. Zuſatz.

48. Wenn die Dichtigkeit der Luft unten an der Erdfläche 800 mahl kleiner als die Dichtigkeit des Waſſers, und zugleich ihre Federkraft ſo groß iſt, daß ſie mit einer 32 Pariſer Fuß hohen Waſſerſäule das Gleichgewicht hält; ſo würde eine 800 mahl 32 Fuß oder 25600 Fuß hohe Luftſäule, wenn ſie durchgängig einerley Dichtigkeit mit der untern Luft hätte, ebenfalls mit der Federkraft der untern Luft im Gleichgewicht ſeyn. Demnach wäre im 47. §. die Höhe $k = 25600$ Pariſer Fuß oder 4266 Toiſen. Man ſetze die Zahl $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$; ſo wird $CE = \frac{k}{10000000} = \frac{25600}{10000000} = 0{,}00256$ Fuß, und dieſe Höhe iſt ſo ſehr klein, daß die Aenderung in der Dichtigkeit der Luft von C bis E nicht merklich iſt, wie den Schlüſſen des 46. §. gemäß erfordert wird.

Der 3. Zuſatz.

49. Die Dichtigkeit und Federkraft der Luft iſt zwar nicht immer einerley, folglich auch die Höhe k nicht immer von einerley Gröſſe: indeſſen kann doch

der angenommene Werth der Zahl $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$ allemahl beybehalten werden. In den Fällen, wenn die Dichtigkeit der Luft nicht völlig 800 mahl kleiner als die Dichtigkeit des Waſſers wäre, würde *k* noch kleiner, alſo auch CE noch kleiner ausfallen, als die eben geführte Rechnung ergiebt. Wäre aber auch die Dichtigkeit der Luft mehr denn 800 mahl, vielleicht zuweilen 1000 mahl kleiner als die Dichtigkeit des Waſſers; ſo würde doch die Höhe *k* nicht über 32000 Fuß betragen, und das würde $CE = \frac{32}{10000} = 0{,}0032$ Fuß geben, immer noch ſo klein, als die im 46. §. angenommene Vorausſetzung es erfodert.

Der 4. Zuſatz.

50. Es ſey alſo $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$, alſo $1 + \frac{CE}{k} = 1{,}0000001$, und $CE = \frac{k}{10000000}$; ſo findet man aus vollſtändigen Logarithmen-Tafeln log. Brigg. $\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = 0{,}0000000434294$ beynahe $= 0{,}00000004343$; alſo $\frac{l.(1 + CE : k)}{CE} = 0{,}00000004343 : \frac{k}{10000000} = \frac{0{,}4343}{k}$.

Es war aber $l\frac{a}{p} : l\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = CM : CE$, (47 §.) alſo iſt auch $l\frac{a}{p} : \frac{l.(1 + CE : k)}{CE} = CM : 1$, (§. Geom.)

Geom.) und man erhält $\mathrm{l}\frac{a}{p} : \frac{0,4343}{k} = \mathrm{CM} : 1.$

Daraus folgt $\mathrm{l}\frac{a}{p} = \frac{0,4343 \,.\, \mathrm{CM}}{k}$, und umgekehrt $\mathrm{CM} = \frac{k \,.\, \mathrm{l}(a:p)}{0,4343}$.

Der 5. Zuſatz.

51. Es ſey nun in jeder andern Stelle H die 142 Fig.
Barometerhöhe $= q$; ſo iſt $\mathrm{l}\frac{a}{q} = \frac{0,4343 \,.\, \mathrm{CH}}{k}$, mithin $\mathrm{l}\frac{a}{p} - \mathrm{l}\frac{a}{q} = \frac{0,4343}{k} \,.\, (\mathrm{CM} - \mathrm{CH})$. Weil ferner $\mathrm{l}\frac{a}{p} - \mathrm{l}\frac{a}{q} = \mathrm{l}\frac{q}{p}$ (§. Trigon.) und $\mathrm{CM} - \mathrm{CH} = \mathrm{HM}$ iſt; ſo erhält man $\mathrm{l}.\frac{q}{p} = \frac{0,4343 \,.\, \mathrm{HM}}{k}$, und umgekehrt $\mathrm{HM} = \frac{k \,.\, \mathrm{l}(q:p)}{0,4343}$. Dieſe Gleichung iſt ſo allgemein, daß die im vor. §. gefundene als ein beſondrer Fall, nemlich der, wenn die unterſte Stelle an der Erdfläche angenommen wird, darunter enthalten iſt. Wird nemlich CM ſtatt HM geſetzt, ſo muß man a ſtatt q ſetzen; das giebt die Gleichung des vor. §.

Die 2. Aufgabe.

52. Man hat in zweyen ungleich hoch über 142
der Erdfläche erhabenen Stationen H und M Fig.

die Barometerhöhen q und p beobachtet, auch hat man die Höhe HM der einen Station über der andern gemeſſen: man ſoll die Höhe k einer gleichförmig dichten Luftſäule finden, welche mit der Federkraft der Luft unten an der Erdfläche im Gleichgewicht ſeyn würde.

Aufl. Die Gleichung des vor. §. giebt 0,4343 . HM $= k \,.\, \mathrm{l}(q:p)$, alſo $k = \frac{0{,}4343 \,.\, \mathrm{HM}}{\mathrm{l}(q:p)}$.

Hr. Bouguer (M. ſ. in dem Werk, das den Titel führt: Figure de la Terre, Paris 1749, die Introduction, mit der Aufſchrift: Relation abregée du voyage au Peru, pag. XXXIX.) fand die Barometerhöhe zu Carabourou 254,75 Linien $= q$, auf dem Pichincha 191 Linien $= p$. Alſo war

$$\mathrm{l}.q = 2{,}4061142$$
$$\mathrm{l}.p = 2{,}2810334$$
$$\text{mithin } \mathrm{l}.\frac{q}{p} = 0{,}1250808$$

oder $\mathrm{l}(q:p)$ beynahe $= 0{,}1251$. Die Station auf dem Pichincha war 1209 Toiſen höher, als die zu Carabourou, alſo HM = 1209. Daraus findet man 0,4343 . HM = 525,0687, und $k = \frac{525{,}0687}{0{,}1251} = 4197$ Toiſen, welches von der Beſtimmung im 48. §. nicht viel verſchieden iſt.

Wenn die Barometerhöhe in der untern Station 29 Zoll, alſo 348 Linien, in der obern eine Linie weniger, nemlich 28 Zoll 11 Linien beträgt, und zwiſchen beyden Stationen eine Wärme von $16\frac{3}{4}$ Graden des Queckſilberthermometers mit der

Reau-

Reaumürſchen Scale herrſcht; ſo iſt nach den Erfahrungen des Herrn de Luc (Unterſuchungen über die Atmoſphäre, 2ter Theil, 561 u. 588. §., 99 und 126 S. der Ueberſ.) die Höhe der einen Station über der andern 12,497 Toiſen. Man ſetze alſo $q = 348$ Linien, $p = 347$ Linien; ſo findet man

$$l.q = 2{,}5415792$$
$$l.p = 2{,}5403295$$

$$\text{alſo } l.\frac{q}{p} = 0{,}0012497$$

Ferner iſt HM = 12,497 Toiſen, und man erhält

$$k = \frac{0{,}4343 \cdot 12{,}497}{0{,}0012497} = 4343 \text{ Toiſen.}$$

Die 3. Aufgabe.

53. Man hat in zweyen ungleich hoch über der Erdfläche erhabenen Stationen H und M die Barometerhöhen q und p beobachtet, und es ſoll daraus die Höhe HM der obern Station über der untern gefunden werden: vorausgeſetzt, daß die Atmoſphäre zur Zeit der Beobachtung völlig im Gleichgewicht geweſen, auch wenigſtens zwiſchen beyden Stationen durchgängig gleich warm geweſen ſey. 142 Fig.

Aufl. Es iſt $HM = \frac{k \cdot l(q:p)}{0{,}4343}$. Weil nun bey dem Zuſtande der Atmoſphäre, den die Erfahrungen des Herrn de Luc vorausſetzen, $k = 4343$ Toiſen angenommen werden muß, ſo wird bey eben dieſen Vorausſetzungen $HM = 10000 \cdot l\frac{q}{p}$.

Bey dem Zuſtande der Atmoſphäre, den die Erfahrungen des Herrn Bouguer vorausſetzen, iſt $k = 4197 = 4343 - 146$ beynahe $= 4343 (1 - \frac{1}{30})$. Werden dieſe Werthe gebraucht, ſo erhält man $HM = (1 - \frac{1}{30}) \cdot 10000 \cdot l\frac{q}{p}$.

Herr Bouguer erinnert, daß die Rechnungen nach dieſer Gleichung in der unterſten Luftgegend der gemäßigten Zone bis auf eine Höhe von 700 oder 800 Toiſen nicht ſo richtige Reſultate als in gröſſern Höhen geben, und das aus dem Grunde, weil der Zuſtand der Luft in höhern Gegenden ſehr viel beſtändiger iſt, als in den untern Gegenden. In Höhen, die gröſſer als 700 bis 900 Toiſen ſind, ändert ſich die Barometerhöhe überhaupt nur um $1\frac{1}{2}$ Linien, wenn dagegen die Aenderung nahe an der Erdfläche auf 2 Zoll beträgt. Dieſerwegen findet man, wie hoch eine Station über der Meeresfläche liegt, am ſicherſten ſo, daß man ſucht, wie tief ſie unter dem ſteinigten Gipfel des Pichincha liegt, deſſen Höhe vermittelſt geometriſcher Meſſungen von 2434 Toiſen iſt befunden worden: auch ſtehet daſelbſt das Barometer faſt unveränderlich 15 Zoll 11 Linien, oder 191 Linien hoch.

Auf dem Gipfel des Pic von Teneriffa iſt die Höhe des Barometers von 209 Linien beobachtet worden, alſo ſetzt man $q = 209$, $p = 191$, und findet

$$l.q = 2{,}3201463$$
$$l.p = 2{,}2810334$$

$$\text{mithin } l.\frac{q}{p} = 0{,}0391129$$

und

$$\text{und } 10000 \, l \frac{q}{p} = 391{,}129 \text{ Toiſ.}$$

$$\text{Man ſubtr. } \tfrac{1}{3}\left(10000 \, l \frac{q}{p}\right) = 13 \text{ Toiſen,}$$

Ueberſchuß der Höhe des Pichincha über dem Pic	378 Toiſen.
Dieſe ſubtrahirt von der Höhe des Pichincha	2434 Toiſ. giebt
die Höhe des Pic auf Teneriffa	2056 Toiſen.

Die Regel des Herrn de Lüc iſt auch in niedrigen Gegenden brauchbar, wenn man bey Beobachtung der Barometerhöhen zugleich die Grade der Wärme in der untern und obern Station nach dem Queckſilber-Thermometer mit der Reaumürſchen Scale beobachtet. Findet man die Wärme in der untern und obern Station verſchieden, ſo nimmt man aus beyden ein Mittel. Bey geringerer Wärme, als der von $16\frac{3}{4}$ Graden des erwehnten Thermometers iſt jede von den Luftſchichten, mit deren auſſern Gränzen einerley Barometerhöhe zuſammen gehört, niedriger, als jene Rechnung vorausſetzt, bey gröſſerer Wärme aber höher, und H. de Lüc ſchließt aus ſeinen Erfahrungen:

> man müſſe für jeden Grad des Queckſilber-Thermometers mit der erwehnten Scale $\frac{1}{215}$ der Höhe, welche die Gleichung $HM = 10000 \, l. \frac{q}{p}$ giebt, bey geringerer Wärme, als der von $16\frac{3}{4}$ Gr. abziehen, bey gröſſerer Wärme aber zuſetzen.

M. ſ. a. a. O. den 607. §. 137. 138. S.

Der 1. Zuſatz.

54. Wenn man hiebey alles völlig genau nehmen will, ſo muß man noch erwägen, daß eine in der Barometerröhre auf gewöhnliche Art eingeſchloſſene Queckſilberſäule, die mit der Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält, bey gröſſerer Wärme länger ſey, als bey geringerer Wärme. Eine bey der Temperatur des thauenden Eiſes 27 Zoll lange Queckſilberſäule wird nach H. de Lüc (a. a. O. 364. 369. §.) um 6 Linien länger, wenn ſie bis zur Hitze des ſiedenden Waſſers erwärmt wird. Eine Säule, die bey der Temperatur des thauenden Eiſes nur halb ſolang wäre, würde um 3 Linien länger werden, wenn ſie bis zur Wärme des ſiedenden Waſſer erhitzt würde. Ueberhaupt kann man annehmen, daß bey gleicher Aenderung der Wärme das Verhältniß der Aenderungen in der Länge von zwo Queckſilberſäulen mit dem Verhältniß ihrer Längen einerley ſey.

Der 2. Zuſatz.

55. Wenn die Wärme 17 Grade beträgt, ſo iſt die Höhe des Queckſilbers über 0 im Thermometer $= \frac{17}{80}$ des Fundamentalabſtandes. Dieſen und jeden ähnlichen Bruch bey einem andern Grade der Wärme kann man die Thermometerhöhe nennen, den Fundamentalabſtand $= 1$ geſetzt. Iſt nun die Federkraft der Luft ſo groß, daß ſie bey 0 Grad Wärme 27 Zoll hoch Queckſilber trägt, ſo wird bey eben der Federkraft der Luft und 17 Grad Wärme die Barometer Höhe 27 Zoll $+ \frac{17}{80} . 6$ Lin. betragen: alſo 27 Zoll $+ \frac{m}{80} . 6$ Lin. bey m Graden Wärme.

Die

Die 4. Aufgabe.

56. Man hat die Barometerhöhe bey einem gewiſſen Grade der Wärme nach dem Queckſilberthermometer mit der Reaumürſchen Scale beobachtet; man ſoll finden: wie groß die Barometerhöhe bey eben der Federkraft der Luft ſeyn würde, wenn das Thermometer 0 Grad Wärme zeigte.

Aufl. Das Barometer ſtehe 28 Zoll hoch bey 17 Grad Wärme. Man ſuche zuerſt, wie hoch es bey 17 Grad Wärme ſtehen würde, wenn es bey 0 Grad Wärme 27 Zoll hoch wäre: (55. §.) dieſe Höhe würde 27 Zoll + $\frac{17}{80}$. 6 Lin. betragen. Ferner ſetze man an

27 Zoll + $\frac{17}{80}$. 6 Lin. : 28 Zoll = $\frac{17}{80}$. 6 Lin. : geſ. Gröſſe, um welche man die Barometerhöhe von 28 Zoll vermindern muß.

Dieſe Verminderung beträgt alſo

$$\frac{28 \text{ Zoll}}{(27 + \frac{17}{80} \cdot \frac{1}{2}) \text{ Zoll}} \cdot \frac{17}{80} \cdot 6 \text{ Lin.}$$

Allemahl alſo, wenn die beobachtete Barometerhöhe in Zollen ausgedrückt = a iſt, und die Zahl der Grade der Wärme = m, ſo hat man für die geſuchte Gröſſe den Ausdruck $\frac{a}{(27 + \frac{m}{80} \cdot \frac{1}{2}) \text{ Zoll}}$ $\cdot \frac{m}{80} \cdot 6$ Lin. Weil aber m nicht leicht mehr als 20 betragen wird; ſo iſt gewöhnlich dieſer Ausdruck beynahe = $\frac{a}{27 \text{ Zoll}} \cdot \frac{m}{80} \cdot 6$ Lin. Man zieht

dieſe

dieſe Verbeſſerung von der Barometerhöhe *a* ab, wenn das Thermometer in *m* Grade über o zeigt: widrigenfalls wird ſie addirt.

Der 1. Zuſatz.

57. Herr de Lüc, hat zu dieſem Gebrauch die Thermometerſcale ohne ſonderlichen Nutzen verändert, da ohnehin die ſo groſſe Verſchiedenheit der Thermometerſprache unangenehm iſt. Er theilt den Fundamentalabſtand in 96 Grade: daher muß man in dem Ausdruck für die Correction die Zahl 96 ſtatt 80 ſetzen, wenn man ſeine Scale brauchen will, und es iſt alsdenn die Correction $= \frac{a}{27 \text{ Zoll}} \cdot m \cdot \frac{1}{16}$ Lin. Ferner ſind 12 de Lücſche Grade mit 10 Reaumürſchen einerley. Noch weniger wäre es nöthig geweſen, die Stelle an der Scale zu verändern, wo o ſtehen ſoll. Dieſe ſetzt H. de Lüc 12 ſeiner Grade, alſo 10 Reaumürſche Grade über dem Froſtpunct: alſo behält er bis zum Siedepunct 84 ſeiner Grade, oder 70 Reaumüriſche.

Der 2. Zuſatz.

58. Das Barometer ſtehe 27 Zoll hoch bey o Grad Wärme nach de Lüc, oder 10 Grad Wärme nach Reaumür; ſo wäre bey eben der Federkraft der Luft, und o Graden Wärme nach Reaumür, die Barometerhöhe $= 27$ Zoll $- \frac{1}{8} \cdot 6$ Lin. $= 27$ Zoll $- \frac{3}{4}$ Lin. $= 26\frac{15}{16}$ Zoll. Eine ſo lange Queckſilberſäule dehnt ſich bis zur Hitze des Siedepuncts aus um $\frac{26\frac{15}{16}}{27} \cdot 6$ Linien, oder um 5,9962 Linien. Sollte das *m* im vor. §. de Lücſche Grade bedeu-

bedeuten, ſo wäre eigentlich die Correction $\frac{a}{27 \text{ Zoll}}$. $(m + 12)$. $\frac{1}{16}$ Linien: hiemit wäre die Barometerhöhe auf die Temperatur von 12 Grad unter o nach der neuen Scale reducirt, und die Correction würde = o, wenn $m = -12$ geſetzt wird. Statt deſſen reducirt H. de Lüc die Barometerhöhe auf o Grad Wärme nach ſeiner neuen Scale, und ſetzt die Correction = $\frac{a}{27 \text{ Zoll}} \cdot m \cdot \frac{1}{16}$ Linien, wenn das *m* die Grade ſeiner Scale bedeutet. Das heißt: annehmen, eine Queckſilberſäule, die bey der Temperatur von o Grad Wärme nach der neuen Scale 27 Zoll — $\frac{3}{4}$ Lin. lang iſt, ſey bey der Hitze des ſiedenden Waſſers 27 Zoll + $\frac{34}{16}$ Lin. oder 27 Zoll + $5\frac{1}{4}$ Linien lang. Die Differenz iſt alſo 6 Linien, die eigentlich nur 5,9962 Linien ſeyn ſollte, welches aber keinen merklichen Fehler giebt.

Die 6. Erklärung.

59. Wenn in der Kugel des Thermometers Luft eingeſchloſſen iſt, und dieſe, wenn ihre Federkraft durch die Wärme verſtärkt wird, eine andre Flüßigkeit in der mit der Kugel verbundenen Röhre hinauf treibt, aber wieder ſinken läßt, wenn ihre Federkraft bey der Abkühlung vermindert wird; ſo heißt es ein **Luft-Thermometer.**

Der 1. Zuſatz.

60. Die oben bey A offene Glasröhre AB ſey unten bey B umgebogen, und bey C wieder eine Kugel CDEF daran geſchmolzen, ſo kann man oben durch die Oefnung A Queckſilber hinein laufen laſſen, bis 144 Fig.

bis die Kugel etwa zur Hälfte damit angefüllet iſt. Um einen Theil Luft aus der Kugel heraus zu laſſen, kann anfangs bey E eine Oefnung ſeyn, die man nachher zuſchmelzt. Fährt man hiernächſt fort, in die Röhre Queckſilber zu füllen, ſo wird die Luft in der Kugel von der Queckſilberſäule GH, ſoweit als das Queckſilber über der Fläche DF hinauf tritt, zuſammen gedrückt. Bey mehrerer Erwärmung treibt hiernächſt die wärmere Luft das Queckſilber höher über H hinauf, und wenn ſie abkühlet, ſo ſinkt das Queckſilber wieder herab.

Der 2. Zuſatz.

61. Einerley Luftmaſſe in einerley Raum hat bey doppelter oder dreymahl gröſſerer Wärme auch zweymahl oder dreymahl mehr Federkraft: oder überhaupt, bey gleicher Dichtigkeit ändert ſich die Federkraft der Luft in einerley Verhältniß mit ihrer Wärme. Das Maaß der Federkraft der Luft im Raum DEF iſt die jedesmahlige Barometerhöhe um die Höhe der Säule DH vermehrt: alſo iſt die Summe dieſer Höhen zugleich das Maaß der Wärme dieſer Luft. Nur muß der innere Raum der Kugel in Vergleichung mit dem innern Raum der Röhre anſehnlich groß ſeyn, damit das Queckſilber in der Röhre um ein beträchtliches ſteigen und fallen kann, ohne daß die Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft dadurch beträchtlich geändert wird. Ein ſolches Luftthermometer hat H. Amontons zuerſt gebraucht, und in den Memoires de l' Acad. de Paris 1702 beſchrieben.

Der 3. Zuſatz.

62. Die Scale dieſes Luftthermometers kann man von G an aufwärts, wie es H. Amontons gemacht hatte, in Zolle und Linien eintheilen. Alsdenn muß zu der jedesmahligen Höhe der Queckſilberſäule an dieſer Scale die dermahlige Barometerhöhe addirt werden, um die Höhe der Queckſilberſäule zu haben, die mit der Federkraft der eingeſchloſſenen Luft das Gleichgewicht hält, alſo ihrer Wärme proportional iſt. Man kann aber auch noch vortheilhafter die Höhe einer Säule Queckſilber, die mit der Luft bey bekannter Temperatur, etwa der des thauendes Eiſes, das Gleichgewicht hält, für Eins annehmen, und die übrigen Höhen bey andern Temperaturen durch Zahlen ausdrücken, wovon jene erwehnte Säule die Einheit iſt. Nach H. Amontons Beobachtungen gehören zuſammen 144 Fig.

mit Zollen des Thermometers	die Temperatur des
51 Zoll 6 Linien	frierenden Waſſers
73 Zoll 0 Linien	ſiedenden Waſſers.

Die letzte Höhe durch die erſte dividirt giebt 1,417. Demnach wäre die Wärme des ſiedenden Waſſers 1,417mahl gröſſer, als die Wärme des frierenden Waſſers.

Der 4. Zuſatz.

63. Herr Lambert (Pyrometrie 113. 141. §.) nimmt als ein Mittel aus mehrern Beobachtungen dafür die Zahl 1,370 an. Wird alsdenn die Höhe der Queckſilberſäule, die bey der Temperatur des frierenden Waſſers mit der Luft das Gleichgewicht

hält,

hält, in 1000 gleiche Theile getheilt, ſo kommen zwiſchen dem Froſtpunct und Siedepunct 370 ſolcher Theile als Grade des Luftthermometers. Der Gang eines ſo eingetheilten Luftthermometers ſtimmt mit dem Gange des Fahrenheitiſchen Queckſilberthermometers ganz gut zuſammen, und 37 Grade des Luftthermometers geben 18 Grade des Fahrenheitiſchen.

Der 5. Zuſatz.

64. Wird die Oefnung G an der Kugel eines gewöhnlichen Barometers zugeſchmolzen, ſo wird daraus ein Bernoulliſches Luftthermometer. (M. ſ. Daniel Bernoulli Hydrodynam. Sect. X.
136 §. 9. p. 204) Die Höhe CH der Queckſilberſäule,
Fig. welche die eingeſchloſſene Luft trägt, wird ſich ſehr nahe mit der Wärme der eingeſchloſſenen Luft in einerley Verhältniß ändern, wenn der Raum der Kugel in Vergleichung mit dem Raum der Röhre anſehnlich groß iſt. Um es mit dem nach Lambertſcher Art eingetheilten Amontonſchen Luftthermometer übereinſtimmend zu machen, muß man die Höhe CK des Queckſilbers bey der Temperatur des frierenden Waſſers ſuchen, und dieſe Höhe in 1000 gleiche Theile eintheilen; Weil dieſe Höhe ohngefehr 28 Zoll betragen wird, ſo muß die ganze Höhe der Röhre wenigſtens 1,37 mahl 28, das ſind 38 bis 39 Zoll lang ſeyn, wenn das Werkzeug auch der Hitze des ſiedenden Waſſers ausgeſetzt werden ſoll.

Erſte Gründe
der
Hydraulik.

Die 1. Erklärung.

1. Wenn ein Punct ſich bewegt, ſo iſt der Weg, welchen er nimmt, eine Linie, die entweder grade oder krumme ſeyn kann. Im erſten Fall verſteht man durch die Richtung der Bewegung die Lage der graden Linie, worin ſich der Punct bewegt. Im letzten Fall ändert der Punct ſeine Richtung ununterbrochen, und ſie kommt in jedem Augenblick mit der graden Linie überein, die den krummen Weg des Puncts an der Stelle, wo er ſich jetzt befindet, berührt.

Zuſatz.

2. Wenn alle Puncte einer Maſſe ſich in graden Linien bewegen, die unter einander parallel ſind; ſo kennt man alle Umſtände, die bey der Bewegung der ganzen Maſſe merkwürdig ſind, ſobald nur die Bewegung eines von dieſen Puncten bekannt iſt.

Die 2. Erklärung.

3. Die Bewegung eines Puncts iſt gleichförmig, wenn er in gleichen Zeittheilen gleiche Theile ſeines Weges zurück leget: und die Geſchwindigkeit der gleichförmigen Bewegung beurtheilet man

aus der Gröſſe des Weges, der in einer Secunde, einer Minute, oder ſonſt einer bekannten Zeit zurück geleget wird.

Zuſatz.

4. Wenn alle Puncte einer feſten oder flüßigen Maſſe mit gleichen Geſchwindigkeiten in parallelen Linien fortgehen, ſo kann man die Geſchwindigkeit eines jeden dieſer Puncte als die Geſchwindigkeit der ganzen Maſſe betrachten.

Die 3. Erklärung.

5. Die Mechanik im beſondern Sinn, wenn ſie von der Statik unterſchieden wird, ſoll von den Geſetzen der Bewegung feſter Körper Unterricht, und die Hydraulik, von den Geſetzen nach welchen die Bewegungen des Waſſers und andrer unelaſtiſcher flüßiger Maſſen erfolgen.

Anmerkung.

Einige allgemeine Lehren von der Bewegung überhaupt, und von Bewegungen, welche die Schwere verurſacht, finden in beyden Wiſſenſchaften ihre Anwendung. Weil hier von dem, was die Mechanik feſter Körper eigenthümliches hat, gar nichts beygebracht werden konnte; ſo ſind die erſten Grundbegriffe von den Bewegungen überhaupt, und die allgemeinen Geſetze der Bewegung ſchwerer Maſſen, ſo weit ſie auch bey flüßigen Maſſen ihre Anwendung finden, hier unter dem Nahmen der Hydraulik mit vorgetragen worden.

Die 1. Aufgabe.

6. Die Gröſſe des Weges iſt gegeben, welchen ein Körper mit gleichförmiger Bewegung zurück geleget hat: man ſoll ſeine Geſchwindigkeit für jede Zeitſecunde finden.

Auflöſung. Man dividire den zurückgelegten Weg mit der Zahl der Zeitſecunden, die während der

der Bewegung verfloſſen ſind; ſo weiß man, wie groß der in jeder Zeitſecunde zurückgelegte Weg ſey, und das iſt die geſuchte Geſchwindigkeit.

Z. E. Ein Körper iſt 1000 Fuß weit in 3 Minuten fortgerückt: wie groß war ſeine Geſchwindigkeit? Antwort $\frac{1000 \text{ Fuß}}{180 \text{ Sec.}} = 5\frac{5}{9}$ Fuß in jeder Secunde.

Zuſatz.

7. Es ſey die Geſchwindigkeit der Bewegung $= c$, der Weg $= s$, welcher in der Zeit t zurück gelegt wird: ſo ſind das drey Gröſſen, wovon die dritte leicht gefunden wird, wenn zwey davon gegeben ſind. Es iſt nemlich $c = \frac{s}{t}$ (6. §.) alſo $s = c \cdot t$, und $t = \frac{s}{c}$.

Der 1. Grundſatz.

8. Jede körperliche Maſſe iſt gegen Ruhe und Bewegung gleichgültig. Ein ruhender Körper ſetzt ſich nicht ſelbſt in Bewegung. Auch ändert ein Körper, der einmahl in Bewegung iſt, nie ſelbſt weder die Richtung noch die Geſchwindigkeit ſeiner Bewegung, wofern dies nicht ſonſt von einer Urſache herrührt, die man ſich als eine bewegende Kraft vorſtellen kann.

Die 4. Erklärung.

9. Die Trägheit körperlicher Maſſen beſtehet in ihrer Gleichgültigkeit gegen Ruhe und Bewegung.

Zuſatz.

10. Wenn alſo ein Körper in Bewegung iſt, und dieſe in einerley Richtung mit einerley Geſchwindigkeit ununterbrochen fortſetzt, ſo erfolgt ſolches nach dem Geſetz der Trägheit, und es bedarf keiner bewegenden Kraft, um den Körper in einer ſolchen Bewegung zu erhalten.

Die 1. Erfahrung.

11. Ein ſchwerer Körper, der ſich völlig ſelbſt überlaſſen frey bewegt, fällt in 2 Secunden Zeit viermahl tiefer, in 3 Secunden 9 mahl tiefer, als in 1 Secunde; und überhaupt verhalten ſich, die Höhen des Falles, wie die Quadratzahlen der verfloſſenen Zeiten. Die Höhe aber, wovon ein ſchwerer Körper in der erſten Zeitſecunde frey herabfällt, beträgt $15\frac{5}{8}$ Rheinländiſche Fuß.

Die 2. Aufgabe.

12. Die Zeit iſt gegeben, worin ein ſchwerer Körper von einer gewiſſen Höhe herabgefallen iſt: man ſoll die Höhe des Falles finden.

Aufl. Weil der Körper in der erſten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß tief herab gefallen iſt, ſo multiplicire man dieſe Höhe mit der Quadratzahl der verfloſſenen Zeitſecunden. (11. §.) Sind während des Falles 5 Secunden verfloſſen, ſo ſetzt man an

Höhe des Falles in 1 Sec.	15,625	Rheinl. Fuß.
Quadratzahl der verfl. Zeit	25	
	78125	
	31250	
Höhe des Falles in 5 Sec.	390,625	Rheinl. F.

Die

Die 3. Aufgabe.

13. Aus der gegebenen Höhe des Falles zu finden, wieviele Zeit während der Bewegung verfloſſen iſt.

Aufl. Man dividire die gegebene Höhe des Falles mit 15,625 Rh. Fuß, welches die Höhe des Falles für die erſte Secunde iſt; ſo hat man die Quadratzahl der verfloſſenen Zeitſecunden. (12. §.) Wenn alſo daraus die Quadratwurzel gezogen wird, ſo weiß man die verfloſſene Zeit. Es ſey

die Höhe des Falles . . . . . 250 F.

ſo iſt die Höhe des Falles für die 1 Sec. = $15\frac{5}{8}$, und die Diviſion giebt 16 für die Quadratzahl der verfl. Zeitſecunden, welches alſo 4 Secunden ſind.

Die 5. Erklärung.

14. Die Wirkung einer Kraft, vermöge welcher ſie die Geſchwindigkeit der Bewegung eines Körpers ununterbrochen vermehrt, heißt ihre Beſchleunigung. Wenn die Kraft beſtändig mit gleicher Stärke wirkt, und dem Körper in gleichen Zeiten gleiche Grade der Geſchwindigkeit mittheilt, ſo iſt die Beſchleunigung der Bewegung gleichförmig. Die Geſchwindigkeit wächſt alsdenn in eben dem Verhältniß, wie die Zeit, welche während der Bewegung verfließt.

Der 1. Lehrſatz.

15. Die Bewegung der frey herabfallenden ſchweren Körper wird von der Schwere gleichförmig beſchleuniget, ſo daß die Geſchwindigkeit in eben dem Verhältniſſe zunimmt, wie die Zeit, welche während der Bewegung verfließt.

138 Fig. Beweis. In der Zeit T ſey der ſchwere Körper von A nach P gefallen, und es ſey die Höhe von $15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß $= g$, ſo iſt $AP = g \,.\, T^2$. (12. §.) Wenn ferner während des Falles von P nach Q die Zeit t verfließt, alſo während der ganzen Bewegung von A bis Q die Zeit $T + t$; ſo iſt $AQ = g \,.\, (T + t)^2$; (12. §.) alſo $AQ = g \,.\, T^2 + 2g \,.\, T \,.\, t + g \,.\, t^2$, und $PQ = AQ - AP = 2g \,.\, T \,.\, t + g \,.\, t^2$. Diejenige Geſchwindigkeit ſey $= c$, welche der Körper in dem Augenblik erlangt hat, da er in P ankommt, und c' ſey die Geſchwindigkeit, womit er in Q ankommt; ſo iſt $c' > c$. Ferner ſey Pp der Weg, welchen er in der Zeit t ſchon vermöge ſeiner Trägheit mit gleichförmiger Bewegung zurüklegen würde, wenn auch die Schwere die Bewegung nicht weiter beſchleunigte; ſo iſt $Pp < PQ$, und $c = \frac{Pp}{t}$. (7. §.) Wenn dagegen Pq den Weg vorſtellet, welchen der Körper in der Zeit t mit der Geſchwindigkeit c' zurücklegen würde, ſo iſt $Pq > PQ$, und $c' = \frac{Pq}{t}$. Demnach iſt $c < \frac{PQ}{t}$, und $c' > \frac{PQ}{t}$. Je kleiner die Zeit t angenommen wird, deſto weniger ſind die Geſchwindigkeiten c und c' verſchieden, und beyde Geſchwindigkeiten werden gleich, wenn man $t = 0$ annimmt: alſo muß alsdenn $c = c' = \frac{PQ}{t}$ werden. Ob nun gleich in demſelben Fall auch $PQ = 0$ wird, weil Q mit P alsdenn einerley iſt; ſo erhält man

doch

doch $\frac{PQ}{t} = 2g \cdot T + gt$, alſo $c = 2g \cdot T$, weil $t = 0$ iſt. Wenn demnach T zweymahl 3mahl gröſſer wird, u. ſ. f. ſo wird auch c 2mahl, 3mahl und überhaupt in eben demſelben Verhältniſſe gröſſer.

Der 1. Zuſatz.

16. Nach Verlauf der erſten Secunde hat die Schwere dem Körper eine Geſchwindigkeit von 31,25 Rheinl. Fuß mitgetheilt: denn es wird $c = 2g$, wenn $T = 1$ Sec. geſetzt wird.

Der 2. Zuſatz.

17. Wenn man weiß, wieviele Zeit während des Falles verfloſſen iſt; ſo wird die Geſchwindigkeit gefunden, welche die Schwere dem Körper während des Falles mitgetheilt hat, wenn man $31\frac{1}{4}$ Fuß mit der Zahl der verfloſſenen Zeitſecunden multiplicirt.

Der 3. Zuſatz.

18. Umgekehrt findet man, wieviele Zeit verflieſſen muß, wenn die Schwere dem fallenden Körper eine Geſchwindigkeit von gegebener Gröſſe mittheilen ſoll, dadurch, daß man die gegebene Geſchwindigkeit mit $31\frac{1}{4}$ Rheinl. Fuß dividirt.

Die 4. Aufgabe.

19. Aus der gegebenen Höhe des Falles die Geſchwindigkeit zu finden, die der Körper während des Falles erlangt hat.

Aufl. 1) Man ſuche die während des Falles verfloſſene Zeit, (13. §.) und daraus ferner die erlangte Geſchwindigkeit. (17. §.)

2) Wenn t die verfloſſene Zeit, s die Höhe des Falles, und c die erlangte Geſchwindigkeit bezeichnet; ſo iſt $t = \sqrt{\frac{s}{g}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$, (13. §.) alſo $c = 2gt$ (16. §.) $= \frac{2g\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$, oder $c = 2\sqrt{gs}$, weil $g = \sqrt{g} \cdot \sqrt{g}$ iſt.

Exempel. Ein Körper ſey 27 Fuß hoch herab gefallen, ſo iſt

$$\begin{array}{rr} g = & 15,625 \\ s = & 27 \\ \hline & 109375 \\ & 31250 \\ \hline & 421,875 \end{array}$$

Die Quadratwurzel iſt 20,5396, alſo die Geſchwindigkeit $c = 41,0792$ Rh. Fuß.

Die 5. Aufgabe.

20. Die Geſchwindigkeit iſt gegeben, welche die Schwere einem frey herab fallenden Körper mitgetheilt hat; man ſoll die Höhe des Falles finden.

Aufl. 1) Man ſuche die während des Falles verfloſſene Zeit, (17. §.) und daraus ferner die Höhe des Falles. (12. §.)

2) Wenn die Buchſtaben t, s, c, die kurz vorhin bemerkte Bedeutung behalten, ſo findet man $t = \frac{c}{2g}$ (17. §.) und $s = gtt$, (12. §.) alſo $s = g \cdot \frac{c^2}{4gg}$, oder $s = \frac{c^2}{4g}$.

Die

Die 6. Aufgabe.

21. Ein ſchwerer Körper wird in *B* nach 138 Fig.
verticaler Richtung durch einen Stoß oder auf andre Art in Bewegung geſetzt, und die Geſchwindigkeit iſt gegeben, womit er zu ſteigen anfängt: man ſoll finden, wie groß nach Verlauf einer gegebenen Zeit ſeine Geſchwindigkeit ſey, und der in eben dieſer Zeit zurückgelegte Weg.

Aufl. Es ſey die Geſchwindigkeit $= h$, womit er zu ſteigen anfängt, BP ſey der in der Zeit t zurückgelegte Weg, und c die Geſchwindigkeit der Bewegung nach Verlauf eben ſovieler Zeit t: ſo erhellet, daß die Schwere der ſteigenden Bewegung in jeder verfloſſenen Zeit ſoviele Geſchwindigkeit entziehe, als ſie der Bewegung, wenn der Körper fiele, in eben ſovieler Zeit zuſetzen würde. Demnach wird die Geſchwindigkeit h in der Zeit t um den Theil $2gt$ vermindert, (15. §.) und nach Verlauf der Zeit t, hat der Körper noch die Geſchwindigkeit $c = h - 2gt$.

Wenn die Schwere nicht entgegen wirkte, ſo würde der Körper in der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung einen Weg $= ht$ zurück legen. (7. §.) In eben ſovieler Zeit aber wird dieſer Weg um den Theil gtt vermindert, und es iſt eben ſoviel, als wenn der ſchwere Körper in der Zeit t beydes zugleich um die Höhe ht ſtiege, und von der Höhe gtt herab fiele: (12. §.) alſo findet man die in der Zeit t zurückgelegte Höhe BP $= ht - gtt$.

Zuſatz.

22. Wenn die Zeit $t = \frac{h}{2g}$ angenommen wird, ſo hat man $2gt = h$, und es wird $c = h - 2gt = 0$. Das will ſagen, nach ſovieler Zeit hört die ſteigende Bewegung auf.

Der 2. Lehrſatz.

23. Die Höhe, welche ein ſchwerer Körper erreicht, wenn er mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit h lothrecht zu ſteigen anfängt, iſt eben ſo groß, als die Höhe, wovon er herab fallen müſte, wenn ihm die Schwere eben die Geſchwindigkeit h mittheilen ſollte.

Beweis. Während der ſteigenden Bewegung verfließt die Zeit $t = \frac{h}{2g}$, (22. §.) und in der Zeit t erreicht der Körper die Höhe $BP = ht - gtt$. (21. §.) Man ſetze demnach $t = \frac{h}{2g}$, ſo wird $ht = \frac{hh}{2g}$, und $gtt = \frac{hh}{4g}$: alſo findet man

$$BA = \frac{hh}{2g} - \frac{hh}{4g}, \text{ d. i. } BA = \frac{hh}{4g}.$$

Eben ſo hoch aber müſte ein ſchwerer Körper herab fallen, wenn ihm die Schwere die Geſchwindigkeit h mittheilen ſollte. (20. §.)

Die 2. Erfahrung

139 Fig. 24. Wenn ein Gefäß ABCD mit Waſſer angefüllet, und unten mit einer kleinen Röhre DE verſehen, dieſe Röhre aber zugleich von E nach F aufwärts

wärts gebogen iſt, damit das ausſpritzende Waſſer grade in die Höhe ſteigen kann; ſo iſt die Höhe, welche der ſpringende Waſſerſtrahl FG erreicht, beynahe ſo groß, als die Höhe des Waſſers ſelbſt im Gefäß.

Der 1. Zuſatz.

25. Die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer durch die Oefnung F ſpritzt, iſt ſo groß, als die Geſchwindigkeit, welche ein ſchwerer Körper erlangen würde, wenn er ſo hoch herab fiele, als der Waſſerſtrahl ſteigt. Wenn der Widerſtand der Luft, und andre Hinderniſſe die Bewegung nicht verzögerten, ſo würde der Strahl die Höhe des Waſſers im Gefäß völlig erreichen: alſo dringt das Waſſer aus dergleichen kleinen Oefnungen der Gefäſſe und Röhren mit einer Geſchwindigkeit hervor, die ein ſchwerer Körper erlangen würde, wenn er ſo hoch herab fiele, als die höchſte Waſſerfläche im Gefäß über der Oefnung erhaben iſt. Man findet davon aus theoretiſchen Gründen die vollſtändigen Beweiſe im 2ten Bande der Anfangsgründe im I. Abſchnitt der Hydraulik, und im Vten Theil des Lehrbegriffes im I. bis IV, und XI. XII. Abſchnitt der Hydraulik.

Der 2. Zuſatz.

26. Wenn die Oefnung bey F kreisförmig iſt, oder doch eine ſolche Figur hat, daß man ihren Inhalt geometriſch ausrechnen kann; ſo läßt ſich finden, wieviel Waſſer in gegebener Zeit ausſpritzt: nur muß der Abgang des Waſſers im Gefäß beſtändig durch neuen Zufluß erſetzt, und das Waſſer in demſelben beſtändig auf einerley Höhe erhalten werden.

Es

Es ſpritzt nemlich in jeder Secunde eine Waſſerſäule aus, wovon die Grundfläche der Oefnung, und die Höhe der Geſchwindigkeit des ausſpritzenden Waſſers gleich iſt. Wird dieſe in jeder Secunde ausſtrömende Waſſermenge mit der Anzahl der verfloſſenen Zeitſecunden multiplicirt, ſo hat man die ganze in der gegebenen Zeit ausgefloſſene Waſſermenge.

Der 3. Zuſatz.

139 Fig. 27. Wenn das Gefäß ABCD cylindriſch oder priſmatiſch iſt; ſo verhält ſich die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer durch die Oefnung FK ſtrömt, zur Geſchwindigkeit, womit es im Gefäß ſinkt; umgekehrt, wie die Fläche vom Querſchnitt AB des Gefäſſes zur Fläche FK der Oefnung. Es ſtröme nemlich in einer Secunde ein Cylinder aus der Oefnung FK, deſſen Länge FH iſt, und in eben der Zeit ſinke das Waſſer im Gefäß von AB nach MN, ſo iſt FH die Geſchwindigkeit des durch die Oefnung ſtrömenden Waſſers, und AM die Geſchwindigkeit des Waſſers im Gefäß. Weil nun die ausgefloſſene Waſſermenge $= FK \,.\, FH$ iſt, (26. §.) und dieſe im Gefäß den Raum $AB \,.\, AM$ ausfüllte; ſo hat man $FK \,.\, FH = AB \,.\, AM$, mithin $FH : AM = AB : FK$.

Der 4. Zuſatz.

28. Es iſt einerley, ob die Röhre, durch welche das Waſſer ausläuft, wieder aufwärts gebogen iſt,
134 Fig. oder nicht. Wenn auch dieſe Röhre DE wagrecht liegt, oder gegen den Horizont geneigt iſt; ſo wird die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers doch allemahl nach der Regel des 25. §. gefunden. Auch wenn man vorausſetzt, daß das Gefäß beſtändig in gleicher Höhe voll erhalten werde; ſo findet man die

Waſſer-

Waſſermenge, welche in gegebener Zeit ausläuft, nach der Regel des 26. §.

Die 7. Aufgabe.

29. Ein Waſſerbehälter *ABCD* liegt auf einem erhabenen Orte, aus demſelben ſoll das Waſſer vermittelſt einer Fallröhre *EFGH* einem niedriger liegenden Springbrunnen zugeführet werden, und das Waſſer ſoll $\frac{3}{4}$ Zoll dick ſpringen. Die Frage iſt: wievielen Zufluß muß der Waſſerbehälter alle Stunden haben, wenn das Waſſer in demſelben 50 Rheinl. Fuß höher ſteht, als die Oefnung *H* der Springröhre. 140 Fig.

Aufl. Man ſuche

1) Die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer durch die Oefnung H ſpringt, aus der Höhe von 50 Rheil. Fuß dem 25. und 19. §. gemäß, und ſetze das dortige $s = 50$ Fuß; ſo findet man

$$g = 15{,}625$$
$$s = 50$$
$$gs = 781{,}25,$$

alſo $\sqrt{gs} = 27{,}95$ Fuß, und die geſuchte Geſchwindigkeit $2\sqrt{gs} = 55{,}90$ Fuß.

2) Die Fläche der kreisförmigen Oefnung, die im Durchmeſſer $\frac{3}{4}$ Zoll hält. In Decimaltheilen ſind das 0,75 Zoll, die Quadratzahl iſt 0,5625 Quadratz. und dieſe mit 0,785 multiplicirt (§. Geom.) giebt die Fläche der Oefnung = 0,441563 Qu. Zoll, oder 0,003066 Qu. Fuß.

3) Beydes in einander multiplicirt giebt die Waſſermenge in einer Secunde = 0,1713894 Cub. Fuß,

Fuß, und die mit 3600 Secunden multiplicirt giebt die nöthige Waſſermenge in einer Stunde = 617 Cub. Fuß.

Die 1. Anmerkung.

30. Es iſt nicht völlig einerley, ob die Springröhre eine coniſche oder cylindriſche Figur hat, und ob ſie im letzten Fall noch beſonders mit einer in der Mitte kreisförmig durchborten Platte geſchloſſen iſt. Die Waſſermenge, welche in gegebener Zeit durchfließt, hängt von der Beſchaffenheit dieſer Röhre mit ab. Die nöthigen Nachrichten davon findet man im 2 Bande der Anfangsgründe, im 18. §. der Hydraul. 431 u. f. S. und noch umſtändlicher im V. Theil des Lehrbegriffes, im II. Abſchnitt, 36 u. f. §. u. f. S.

Die 2. Anmerkung.

31. Die Brunnenmeiſter ſind gewohnt, den Abfluß und Zufluß des Waſſers nach ſo genannten Waſſerzollen zu berechnen, und nach des Herrn Mariotte Beſtimmung ſoll eigentlich ein Waſſerzoll ſoviel Waſſer ſeyn, als in 1 Minute Zeit durch eine kreisförmige Oefnung von 1 Zoll im Durchmeſſer läuft, wenn das Waſſer 1 Linie hoch über dem oberſten Rande ſteht. Die Erfahrung hat ihn belehrt, daß dieſe Waſſermenge 14 Pariſer Pinten betrage, jede zu 2 Pfund gerechnet.

Die 6. Erklärung.

32. Eine **Waſſerpumpe** überhaupt iſt eine hohle cylindriſche, auch wohl priſmatiſche Röhre, worin ein Stempel vermittelſt einer Stange beweglich iſt, der dazu dient, das Waſſer entweder in der Röhre ſelbſt, oder in einer andern damit verbundenen zum Steigen zu nöthigen. Ein **Druckwerk** hat die Einrichtung, daß der Stempel unmittelbar gegen das Waſſer preßt: im **Saugwerk** folgt das Waſſer dem Stempel, weil es vom Druck der Luft hinauf getrieben wird.

Der

Der 1. Zuſatz.

33. Die Pumpenröhre CDEF ſteht lothrecht im Waſſer, und iſt unten im Boden mit einem Ventil, oder einer Klappe verſehen. Durch dieſe dringt das Waſſer von ſelbſt, wenn der Stempel hinauf gezogen wird, nach den Geſetzen der Hydroſtatik eben ſo hoch in die Pumpenröhre hinein, als es auſſerhalb der Röhre ſteht. Wenn auch gleich der Stempel noch etwas höher über der Waſſerfläche AB hinauf gezogen wird; ſo verurſacht doch der Druck der Luft auf dieſe Waſſerfläche, daß das Waſſer dem Stempel noch weiter folgt. Wenn hiernächſt der Stempel wieder niedergedrückt wird, ſo fällt die Ventilklappe unten zu, und das Waſſer kann nicht anders als ſeitwärts durch die ſo genannte Knieröhre MNO ausweichen, da es denn bey der Einrichtung, welche die 141. Figur vorſtellt, bey O ausſpritzt. Die Knieröhre iſt bey M ebenfalls mit einer Ventilklappe verſehen, die ſo lange zufällt, als der Stempel in die Höhe gezogen wird. 141 Fig.

Der 2. Zuſatz.

34. Die 145. Figur ſtellt ein Säugwerk vor; dasſelbe iſt bey CD, gleich unter der Stelle, wo der Stempel ſeinen niedrigſten Stand hat, mit einem Ventil verſehen, welches das Waſſer offen ſtößt, wenn der Stempel ſteigt, da es denn demſelben folgt. Die Ventilklappe bey CD fällt aber zu, ſobald der Stempel wieder zu ſinken anfängt, und das unter demſelben befindliche Waſſer würde nirgends hin ausweichen können, wenn nicht der Stempel ſelbſt durchlöchert, und die Oefnung ebenfalls mit einer Ventilklappe verſehen wäre. Durch dieſe Klappe tritt das Waſſer über den Stempel 145 Fig.

hinauf,

hinauf, indem derſelbe herab ſinkt. Wenn er aber von neuen gehoben wird; ſo hebt er zugleich das Waſſer, welches nun die Ventiklappe im Stempel zugedrückt hält, mit in die Höhe. Oberhalb des Stempels irgendwo bey E iſt die Ausflusröhre, aus welcher, ſobald die Pumpenröhre allererſt ganz mit Waſſer angefüllet iſt, mit jedem Stempelzuge ſoviel Waſſer läuft, als der Stempel mit jedem Zuge hebt.

Der 3. Lehrſatz.

147 Fig. 35. Wenn eine Druckpumpe einen frey ſpringenden Waſſerſtrahl zuwege bringen ſoll, ſo iſt die Höhe *OP*, welche der ſpringende Waſſerſtrahl, wenn nichts auſſer der Schwere ſeine Bewegung verzögerte, erreichen würde, von der Grundfläche des Kolbens angerechnet, der Höhe einer Waſſerſäule über der Grundfläche des Stempels gleich, deren Gewicht ſo groß, als die Kraft iſt, welche den Stempel gegen die Waſſerfläche preßt.

Beweis. Wenn eine Kraft den Stempel gegen die Waſſerfläche GH drückt, ſo muß der Erfolg eben ſo ſeyn, als wenn die Pumpenröhre höher, und dieſe zugleich in gröſſerer Höhe mit Waſſer angefüllet wäre. Wäre die Pumpenröhre hoch genug, ſo daß das Waſſer bis an QR reichte; ſo würde die Fläche GH von der Waſſerſäule GHQR Druck leiden, und dieſer Druck würde den Erfolg haben, daß der Waſſerſtrahl die Höhe OP bis an die Fläche QR erreichte, wenn nichts ſeine Bewegung verzögerte: demnach muß der Druck des Stempels, wenn er eben ſo groß iſt, als der Druck jener Waſſerſäule, den Waſſerſtrahl eben ſo hoch treiben.

Der

Der 1. Zuſatz.

36. In freyer Luft ſteigt der Waſſerſtrahl nie völlig ſo hoch, als jene Regel angiebt, ob gleich das Waſſer wirklich mit einer Geſchwindigkeit aus der Oefnung O ausſtrömt, die mit der Höhe OP zuſammengehört. Der Unterſcheid fällt deſto beträchtlicher aus, je gröſſer die Geſchwindigkeit des ſteigenden Waſſers iſt: demnach muß dieſer Unterſcheid nothwendig mit in Rechnung gezogen werden.

Der 2. Zuſatz.

37. Oft iſt es nur darum zu thun, vermittelſt der Druckpumpe das Waſſer zu nöthigen, daß es in einer Röhre wie MNOP aufwärts ſteige, da es denn oben bey P aus der Röhre in einen Behälter fließt, aus welchem es zum anderweitigen Gebrauch weiter abgeleitet werden kann. Eine Kraft, ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule über der Grundfläche des Stempels, ſo hoch als die Oefnung P über dem Stempel erhaben iſt, würde mit der in der Steigröhre befindlichen Waſſerſäule im Gleichgewicht ſeyn. Damit das Waſſer wirklich ſteige, wird eine etwas gröſſere Kraft erfodert, die jedoch jene erwehnte nur wenig übertreffen darf, wenn die Steigröhre nicht zu eng, und die Bewegung des Stempels nicht zu ſchnell iſt. Dieſerwegen muß der Durchmeſſer von den Querſchnitten der Steigröhre $\frac{2}{3}$ oder auch $\frac{3}{4}$ vom Durchmeſſer der Pumpenröhre betragen. 143 Fig.

Die 8. Aufgabe.

38. Die Höhe iſt gegeben, welche der ſpringende Waſſerſtrahl, den eine Druckpumpe treibt, erreichen ſoll: man ſucht die

Kraft, welche den Stempel gegen die Waſſerfläche drücken muß.

Aufl. 1) Wenn b diejenige Höhe iſt, die der ſpringende Strahl in freyer Luft erreichen ſoll, und a die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des aus der Gußmündung ſtrömenden Waſſers zugehört; ſo wird nach einer vom Herrn Mariotte aus vielen Verſuchen geſchloſſenen Regel erfodert, daß $a = b + \frac{b^2}{300}$ ſey, wenn b, alſo auch a, in Fuſſen ausgedrückt wird.

2) Wenn die Höhe a gefunden iſt, ſo ſuche man das Gewicht einer Waſſerſäule, wovon die Grundfläche ſo groß als die Grundfläche des Stempels, und die Höhe $= a$ iſt: ſo groß iſt die geſuchte Kraft.

Exempel. Die Pumpenröhre iſt 6 Zoll im Durchmeſſer, und der Strahl ſoll 80 Fuß hoch ſteigen: ſo iſt $b = 80$ Fuß, alſo $a = 80 + \frac{6400}{300} = 101$ Fuß. Die Grundfläche des Stempels hat im Durchmeſſer $\frac{1}{2}$ Fuß, alſo iſt ihr Flächeninhalt $\frac{11}{14} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{56}$ Qu. Fuß. Dieſer mit $a = 101$ Fuß multiplicirt giebt 19,839 Cub. Fuß für den körperlichen Inhalt einer Waſſerſäule, deren Gewicht der geſuchten Kraft gleich iſt. Wird derſelbe mit 66 Pfund multiplicirt, ſo erhält man 1309$\frac{1}{3}$ Pfund, als die geſuchte Kraft.

Zuſatz.

143 Fig. 39. Soll das Waſſer in einer Steigröhre MNOP gehoben werden, ſo wird etwas mehr Kraft erfodert, als diejenige, welche das Waſſer in der Steigröhre

im

im Gleichgewicht erhalten könnte. Wenn alſo *b* die Höhe iſt, zu welcher das Waſſer gehoben werden ſoll, und wenn man alsdenn das Gewicht einer Waſſerſäule ſucht, die über der Grundfläche des Stempels eben dieſe Höhe *b* hätte; ſo hat man die Kraft, welche mit dem Waſſer in der Steigröhre das Gleichgewicht hält. Um wieviel nun die Kraft, welche den Stempel bewegen ſoll, jenes Gewicht übertreffen müſſe, das hängt von der Geſchwindigkeit der Bewegung des Stempels, der Länge der Steigröhre, und dem Verhältniß ihrer Querſchnitte zu den Querſchnitten der Pumpenröhre ab. Man vergleiche die Anfangsgründe 2 Band, 57. 58. §. Hydraul. 478. 479. S. Aus den Gründen der Theorie iſt alles vollſtändiger hergeleitet im V. Theil des Lehrbegriffes, im XXIII. Abſchnitt 541 u. f. S.

Die 9. Aufgabe.

40. **Die Gröſſe des Widerſtandes zu finden, den die Kraft am Stempel eines Saugwerks bey jedem Zuge überwinden muß.**

Aufl. Man ſuche das Gewicht einer Waſſerſäule, 145 Fig.
wovon die Grundfläche ſo groß, als die Grundfläche GH des Stempels iſt, und die Höhe ſo groß, als die Höhe GQ des Stempels über der Waſſerfläche AB, wovon das Waſſer herauf gezogen werden ſoll. So groß iſt der Widerſtand, welchen die Kraft überwinden muß, die den Stempel vermittelſt der Stange KL aufwärts ziehet.

Beweis. Die Luft drückt von oben herab auf den Stempel ſo ſtark, als wenn eine 32 Fuß hohe Waſſerſäule darauf ſtünde, deren Grundfläche mit der Grundfläche des Stempels einerley wäre. Eben

der Stempel aber leidet auch gegen ſeine untere Grundfläche GH einen aufwärts gerichteten Druck, der dem Gewicht einer Waſſerſäule über der Grundfläche des Stempels gleich iſt, deren Höhe aber übrig bleibt, wenn man die Höhe GQ von 32 Fuß abziehet. Man ſtelle ſich vor, die Höhe QP ſey 32 Fuß groß, und G ſey das eigenthümliche Gewicht des Waſſers; ſo iſt der Druck gegen MN = G . MN . QP. Weil aber MN = GH, ſo iſt eben der Druck = G . GH . QP. Ferner iſt der Druck gegen GH = G . GH . GP, und dieſer von dem vorigen abgezogen giebt einen Ueberſchuß = G . GH . (QP – GP) = G . GH . GQ. So ſtark wird alſo der Stempel unterwärts gepreßt, und ſo groß muß eine an der Stange KL aufwärts ziehende Kraft ſeyn, um mit jenem Druck das Gleichgewicht zu halten.

Der 1. Zuſatz.

41. Wenn bey E die Ausgußröhre befindlich iſt, in der Höhe GF über der Grundfläche des Kolbens; ſo drückt auſſer der Atmoſphäre auch noch die Waſſerſäule EFGH von oben her auf den Stempel: alſo iſt der geſammte Widerſtand, den die Kraft zu überwinden hat, dem Gewicht einer Waſſerſäule über der Grundfläche des Stempels gleich, wovon die Höhe FQ = GF + GQ ſo groß iſt, als die Höhe der Ausgußröhre E über der Waſſerfläche AB, wovon das Waſſer hinauf gezogen werden ſoll.

Der 2. Zuſatz.

42. Bey der wirklichen Bewegung muß die Kraft etwas gröſſer ſeyn, und die erforderliche Gröſſe hängt ab von der Geſchwindigkeit der Bewegung, von der Länge der Saugröhre, auch vom Verhältniſſe der Querſchnitte der Pumpenröhre zu den Querſchnitten

der

der Saugröhre. Der Ueberſchuß der nöthigen Kraft über jene, die ſchon zum Gleichgewicht erfodert wird, iſt deſto kleiner, je kürzer die Saugröhre ſeyn kann, je langſamer die Bewegung des Stempels iſt, und je weiter die Saugröhre in Vergleichung mit der Weite der Pumpenröhre iſt. Der Durchmeſſer der Querſchnitte der Saugröhre muß um deßwillen $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ vom Durchmeſſer der Querſchnitte der Pumpenröhre betragen. M. ſ. davon die Anfangsgründe 2 Band, 52. §. Hydraul. 471 S. und die vollſtändigere Ausführung davon im V. Bande des Lehrbegriffes im XVIII. und XIX. Abſchnitte 461 u. f. S.

Der 4. Lehrſatz.

43. Wenn das Gefäß *ABCD* ohngefehr bis auf die halbe Höhe, oder etwas drüber, bis an *GH* mit Waſſer angefüllet, in dem Raum oberhalb *GH* aber Luft enthalten iſt; wenn ferner eine Röhre *EF*, die ſich bey *F* in eine enge Oefnung endiget, mit dem Gefäſſe ſo verbunden iſt, daß das Waſſer aus dem untern Raum in die Röhre treten kann; ſo ſpringt das Waſſer in allen Fällen zur Oefnung *F* heraus, wenn die Dichtigkeit und Federkraft der eingeſchloſſenen Luft um etwas nicht ganz unbeträchtliches gröſſer iſt, als die Dichtigkeit der Luft im äuſſern Raum, womit die Oefnung *F* in Verbindung iſt. 146 Fig.

Beweis. Wenn die Federkraft der eingeſchloſſenen Luft ſo groß iſt, daß ſie einer Waſſerſäule in der Höhe *a* das Gleichgewicht halten kann; ſo hat der von dieſer Luft herrührende Druck gegen GH eben die Wirkung, als wenn noch über GH eine Waſſer-

ſäule in der Höhe a ſtünde. Wenn überdem die Luft in dem Raum, womit die Oefnung F in Verbindung iſt, einer Waſſerſäule in der Höhe b das Gleichgewicht halten kann, b aber kleiner als a iſt; ſo wird der innere Druck gegen GH, wenn man ſich vorſtellet, daß in der Röhre das Waſſer bis an L ſtehe, durch den äuſſern zum Theil aufgehoben, und GH leidet nur ſoviel Druck, als wenn eine Waſſerſäule in der Höhe $a - b$ darüber ſtünde. Man ſetze LF $= f$, ſo weiß man aus dem 25. §., daß nun das Waſſer aus der Oefnung F mit einer Geſchwindigkeit ſpringen müſſe, die der Höhe $a - b - f$ zugehört. Wenn alſo nur die Differenz der Höhen, die der Elaſticität der innern und äuſſern Luft zugehören, gröſſer als LF iſt, ſo giebt das ſo angeordnete Gefäß einen Springbrunnen ab.

Der 1. Zuſatz.

44. Man nennt dieſen Springbrunnen von dem Erfinder den Heronsball, und er wird am gewöhnlichſten ſo gebraucht, daß das Waſſer aus der Oefnun F in die freye Luft ſpringt: da dann die eingeſchloſſene Luft entweder vermittelſt der Luftpumpe oder auf andre Art mehr als die atmoſphäriſche verdichtet werden muß. Wenn das Gefäß klein iſt, ſo kann man den Effect ſchon dadurch zuwege bringen, daß man mit dem Munde ſo ſtark als man kann durch die Oefnung F hineinbläſet. Durch die Erhitzung kann die Federkraft der innern Luft ebenfalls verſtärkt werden.

Der 2. Zuſatz.

147 Fig. 45. Wenn der Heronsball, welchen in der 147 F. das Gefäß AB mit der Röhre EF vorſtellet, noch mit zweyen andern Gefäſſen ſo verbunden wird, wie es

aus eben der Figur zu erſehen iſt; ſo erhält man den Heronsbrunnen. Anfangs muß der Heronsball AB etwa bis an RS mit Waſſer gefüllet ſeyn, und dazu dient eine eigene im obern Deckel befindliche Oefnung, die hiernächſt mit einem Kork, oder noch beſſer mit einer Schraube luftdicht verſchloſſen werden muß. Hiernächſt gießt man Waſſer in die obere Schüſſel AVWO, daſſelbe fällt durch die Röhre GH ins untere von allen Seiten luftdicht verſchloſſene Gefäß CDQ hinab, und treibt, ſo wie es darin höher ſteigt, einen Theil der Luft aus demſelben durch die Röhre IK hinauf in den Heronsball. Dadurch wird die Luft in dem obern Raum ARSO des Heronsballes und zugleich in der Röhre IK und dem Raum oberhalb PQ im untern Gefäß verdichtet, ſo lange bis ſie mit der Waſſerſäule MN im Gleichgewicht iſt. Hält man bis dahin die Oefnung bey F verſchloſſen, ſo ſpringt hiernächſt das Waſſer mit einer Geſchwindigkeit heraus, die der Höhe MN zugehört.

Der 5. Lehrſatz.

46. **Wenn der eine Schenkel *CA* der unter** 148
dem Nahmen des Hebers bekannten geboge- Fig.
nen Röhre *ACB* im Gefäß hängt, das bis an *DF* voll Waſſer iſt; ſo tritt das Waſſer nicht allein in die Röhre, wenn in derſelben die Luft auf irgend eine Art hinlänglich verdünnt wird, ſondern es fährt hiernächſt auch fort, durch die Oefnung *B* unten im andern Schenkel mit einer Geſchwindigkeit auszuflieſſen, die mit der Höhe der Waſſerfläche *DF* über der Oefnung *B* zuſammen gehört.

Beweis. So lange nicht allein an der Waſſerfläche DF, ſondern auch im Heber die Luft ſich im natürlichen, oder überhaupt im gleichen elaſtiſchen Zuſtande befindet; ſo lange tritt das Waſſer in den Schenkel CA nur bis an GH hinein: (24. §. Hydroſt.) Wenn durchs Saugen mit dem Munde an B oder auf andre Art die Luft ſo weit im Heber verdünnt wird, daß die Höhe, welche als das Maaß ihrer Elaſticität dient, um die Differenz FC kleiner wird, als die Höhe, welche das Maaß von der Elaſticität der gegen DF drückenden Luft abgiebt; ſo muß der Erfolg eben ſo ſeyn, als wenn im Gefäß DEF die Waſſerhöhe um die Höhe FC oder noch drüber vermehrt wäre. Dieſerwegen wird alsdenn das Waſſer in den Schenkel AC hinauf treten, im Schenkel CB aber wieder abflieſſen. Während dieſer Bewegung iſt es nun eben ſoviel, als wenn Gefäß und Heber wie ſonſt ein Gefäß mit einer Röhre zuſammen hängen, und das Waſſer muß fortfahren, bey B mit einer Geſchwindigkeit auszuflieſſen, die mit der Höhe OB der Waſſerfläche DF im Gefäß über der Oefnung B zuſammen gehört, wenn anders, wie hier vorausgeſetzt wird, die Oefnung B in Vergleichung mit den Querſchnitten des Gefäſſes nur klein iſt.

Die erſten Gründe der Maſchinenlehre.

Die 1. Erklärung.

1. Wenn eine Maſchine eine zeitlang ununterbrochen in gleichförmiger Bewegung bleibt, ſo ſagt man, ſie ſey im Beharrungsſtande. Man beurtheilt alsdenn die Gröſſe ihres Effects aus der Gröſſe des Widerſtandes, den die Maſchine vermittelſt der angebrachten Kraft überwindet, und der Geſchwindigkeit der Stelle der Maſchine, die dem Widerſtande unmittelbar ausgeſetzt iſt. Den Widerſtand betrachtet man als die zu bewegende Laſt, und die Geſchwindigkeit der Bewegung der Stelle, welche dem Widerſtande unmittelbar ausgeſetzt iſt, betrachtet man als die Geſchwindigkeit der Laſt.

Zuſatz.

2. In ſolchen Fällen, wenn vermittelſt einer Winde ein Ballen Waare, oder ſonſt etwas ſchweres lothrecht in die Höhe gezogen wird, iſt eine wirkliche Laſt da, die in gewiſſer Zeit um eine gewiſſe Höhe ſteigt, die alſo auch ſelbſt mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit bewegt wird. Wenn aber die Maſchine auch ſonſt eine andre Art von Widerſtand, wie eine Kornmühle den Widerſtand des Getreides zwiſchen den Mühlſteinen zu überwinden

 hat;

hat; ſo iſt der Erfolg doch immer eben ſo, als wenn eine Laſt in gewiſſer Zeit auf eine gewiſſe Höhe gehoben werden ſollte. Dieſerwegen kann man ſich den Effect einer Maſchine allemahl ſo vorſtellen, als wenn ſie in gewiſſer Zeit eine gewiſſe Laſt auf eine gegebene Höhe herauf brächte.

Die 2. Erklärung.

3. Wenn die Maſchine in Bewegung iſt; ſo betrachtet man die Geſchwindigkeit der Stelle der Maſchine, welche die an der Maſchine angebrachte Kraft unmittelbar angreift, als die Geſchwindigkeit der Kraft. Wird die Kraft mit dieſer Geſchwindigkeit multiplicirt; ſo heißt das Product das **mechaniſche Moment der Kraft.** Im ähnlichen Sinn verſtehet man durch das **mechaniſche Moment der Laſt** das Product der Laſt, oder des Widerſtandes in die Geſchwindigkeit der Stelle, welche dem Widerſtande unmittelbar ausgeſetzt iſt.

Zuſatz.

4. Das mechaniſche Moment der Kraft iſt dem mechaniſchen Moment der Laſt gleich, wenn beyde mit einander im Gleichgewicht ſind. (100. §. Stat.) Demnach iſt auch das mechaniſche Moment der Kraft dem Effect der Maſchine gleich (1. §.)

Exempel. Von einer Welle, die $\frac{1}{4}$ Fuß im Halbmeſſer hat, hänge eine Laſt von 80 Pfunden am Seil herab. An der Welle befinde ſich eine Kurbel von 1 Fuß Länge, womit man die Welle drehen kann, und ein Arbeiter greife die Handhabe der Kurbel an, mit einem Beſtreben, ſie nach einer Richtung zu drehen, die mit ihrer Länge einen rechten Winkel macht, in einer Ebene, die auf der

Axe

Axe der Welle ſenkrecht iſt. Der Arbeiter drücke ſo ſtark gegen die Kurbel, als wenn er ein Gewicht von 20 Pfunden zu halten hätte, ſo wird dieſer Druck mit Laſt im Gleichgewicht ſeyn, (63. §. Stat.) und noch keine Bewegung erfolgen. Wenn dagegen der Arbeiter anfangs etwas ſtärker drückt, ſo wird die Kurbel und mit derſelben auch die Welle in Umlauf kommen, ſo daß die Laſt gehoben wird. Indem aber die Handhabe der Kurbel der dagegen drückenden Hand des Arbeiters ausweicht, wird der Druck der Hand gegen dieſe Handhabe kleiner, weil der Arbeiter nicht ſo ſtark gegen die ausweichende, als gegen die noch ruhende Kurbel drücken kann. Sobald alsdenn der Druck wieder bis auf 20 Pfund abgenommen hat, ſobald wird dieſer Druck mit der Laſt wieder im Gleichgewicht ſeyn, und die Kurbel mit der Welle wird im gleichförmigen Umlauf bleiben, ſo lange der Arbeiter mit gleicher Stärke gegen die Kurbel drückt.

Wenn nun die Handhabe mit einer Geſchwindigkeit von 3 Fuß in 1 Secunde ausweicht, ſo wird die Laſt mit einer Geſchwindigkeit von $\frac{3}{4}$ Fuß ſteigen. Das mechaniſche Moment der Kraft iſt 20 Pfund × 3 Fuß = 60, das mechaniſche Moment der Laſt iſt 80 Pfund × $\frac{3}{4}$ Fuß ebenfalls = 60. Der Effect dieſer Maſchine beſtehet alſo darin, daß eine Laſt von 80 Pfunden in jeder Secunde $\frac{3}{4}$ Fuß hoch gebracht wird. Eben die Maſchine könnte alſo 80 Pfund Lanſt in 1 Minute 45 Fuß hoch, und 1 Stunde 2700 Fuß hoch bringen.

Von der Welle könnten zwey verſchiedene Seile ſo herab hängen, daß eins davon ſich von der Welle abwickelte, wenn ſich das andre aufwickelt, und

umge-

umgekehrt. An jedem Seil könnte ein Korb oder ſonſt ein Behälter hängen, um ſchwere Sachen, als Baumaterialien, Waaren, oder ſonſt etwas dergleichen herein zu legen. Man ſetze der Arbeiter mit der Winde ſtehe 75 Fuß hoch über der Stelle woſelbſt unten ein ſolcher Korb wieder mit 80 Pfund in der Zeit beläſtiget wird, worin man den oben angekommenen Korb ausleert; ſo kann nun die Maſchine, wenn die von der eben erwehnten Urſache herrührende Zögerung beyſeit geſetzt wird, ununterbrochen wirken. Weil das Steigen der Laſt um $\frac{3}{4}$ Fuß 1 Sec. Zeit erfodert, ſo erfodern 75 Fuß Höhe 100 Secunden Zeit. Weil ferner in 100 Sec. Zeit 80 Pfund Laſt 75 Fuß hoch gebracht werden, ſo werden in 1 Stunde oder 3600 Secunden Zeit 2880 Pfund Laſt 75 Fuß hoch gebracht, und das iſt der Effect der Maſchine für 1 Stunde. Sie hebt auf die unveränderliche Höhe von 75 Fuß nach und nach immer mehr ſchwere Maſſe, und alle Stunden beträgt es 2880 Pfund, ſo lange die Wirkung der Maſchine ununterbrochen fortwährt.

Die 1 Aufgabe.

5. **Das mechaniſche Moment der Kraft für den Beharrungsſtand der Maſchine iſt gegeben: man ſoll die Laſt finden, welche vermittelſt der Maſchine in gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe gebracht werden kann.**

Aufl. Man multiplicire das mechaniſche Moment der Kraft mit der gegebenen Zeit, und dividire das Product mit der gegebenen Höhe, ſo findet man die geſuchte Laſt.

Beweis.

Beweis. Wenn P die Kraft bezeichnet, und α die Geſchwindigkeit der Stelle, welche die Kraft unmittelbar angreift; ſo iſt $P . \alpha$ das mechaniſche Moment der Kraft. Wenn ferner Q die Laſt bezeichnet, welche in der Zeit T auf die Höhe f ſteigt, oder wenn ſtatt deſſen die Stelle der Maſchine, welche dem Widerſtande unmittelbar ausgeſetzt iſt, in der Zeit T den Weg f zurück legt, ſo iſt $\frac{f}{T}$ die Geſchwindigkeit der Laſt, aber auch der Stelle, welche dem Widerſtande ausgeſetzt iſt, und man findet das mechaniſche Moment der Laſt $= Q . \frac{f}{T}$. Demnach iſt ferner $Q . \frac{f}{T} = P . \alpha$, (4. §.) und man findet $Q . f = P . \alpha . T$, mithin $Q = \frac{P . \alpha . T}{f}$.

Erfahrungsſätze.

6. Wenn ein Menſch eine Kurbel drehet, und 145 Fig.
die angegriffene Stelle der Kurbel mit einer Geſchwindigkeit von 3 Fuß in einer Secunde ausweicht, ſo kann der Arbeiter mit einer Kraft von 20 Pfund in die Kurbel wirken.

Ein Pferd, wenn es ziehend an einer Maſchine arbeiten ſoll, kann am füglichſten eine verticalſtehende Welle AB vermittelſt eines daran horizontal befeſtigten Zugbaums CD drehen, wenn es bey D angeſpannt iſt, und ſodann im Kreiſe herum läuft, wozu der Halbmeſſer CD gehört. Dieſer Zug- oder Schwangbaum muß wenigſtens 10 bis 12

Fuß lang ſeyn, damit der Umlaufskreis nicht zu klein ausfalle. Die Kraft eines Pferdes, wenn es mit doppelt ſoviel Geſchwindigkeit als ein Menſch arbeitet, ſchätzt man 7mahl gröſſer als die Kraft eines arbeitenden Mannes, alſo auf 140 bis 150 Pfund, wenn die angegriffene Stelle D der Maſchine mit einer Geſchwindigket von 6 Fuß in einer Secunde ausweicht.

Es iſt leicht zu erachten, daß dieſe Beſtimmungen nicht allgemein ſeyn können. Soll die Arbeit eine zeitlang anhaltend fortgeſetzt werden, ſo darf man nur auf 2 Fuß Geſchwindigkeit für den arbeitenden Menſchen rechnen, wogegen er alsdenn wohl eine Kraft von 25 Pfunden anwenden kann. Für das arbeitende Pferd würde man alſo 4 Fuß Geſchwindigkeit bey einer Kraft von 175 Pfund in Anſchlag zu bringen haben.

Die 3. Erklärung.

7. Ein Rad in verticaler Stellung, deſſen Welle horizontal liegt, kann vom flieſſenden Waſſer auf eine zweifache Art in Umlauf gebracht und erhalten werden, nachdem es entweder unter dem Rade wegfließt, oder ſo geleitet iſt, daß es von oben herab auf das Rad fällt. Im erſten Fall heißt es ein unterſchlächtiges **Waſſerrad**, und der Umlauf deſſelben iſt ein Effect des Waſſerſtoſſes gegen die
150 Fig. Schaufeln DE, OK, u. ſ. f. Am Umfange des oberſchlächtigen Rades wird der Kranz von der innern Seite geſchloſſen, und die Schaufeln werden zwiſchen zwoen Reifen ſo eingeſetzt, daß ſie ſoviele Waſſerbehälter abgeben, welche das aufgefangene Waſſer allererſt ausgieſſen, wenn ſie beym Umlauf des

des Rades faſt die unterſte Stelle erreicht haben. Man nennt dergleichen Räder auch Sackräder.

Zuſatz.

8. Damit das Waſſer an die Schaufeln des unterſchlächtigen Rades mit einer etwas beträchtlichen Geſchwindigkeit ſtoſſe, wird quer durch den Fluß oder Bach, der das Rad treiben ſoll, ein Damm angelegt, und auf dem Rücken des Dammes der ſo genannte **Fachbaum** L oder **Grundbaum** in horizontaler Lage befeſtiget. Ueber demſelben kommt eine Wand zu ſtehen, die mit Oefnungen verſehen iſt, welche durch vorgeſetzte in Falzen bewegliche Schutzbretter geöfnet und wieder geſchloſſen werden können. Gleich hinter dieſer mit Schutzbrettern verſehenen Wand hängt das Waſſerrad ſo, daß die Schaufeln, wenn ſie in der niedrigſten Stelle DE anlangen, das über den Fachbaum L herabſtürzende Waſſer auffangen können. Die vornehmſten Theile vom ganzen Bau, der bey ſolchen Maſchinen das **Grundwerk** heißt, ſo weit man ſie kennen muß, wenn man lernen will, wie der Effect des Rades berechnet wird, ſtellet die 151 Figur im Grundriß, und die 150 Figur im verticalen Durchſchnitt nach der Länge des Fluſſes vor: wie übrigens der ganze Bau aufgeführt werden müſſe, das läßt ſich hier nicht zeigen, und gehört auch eigentlich für die **Waſſerbaukunſt** oder **Hydrotechnick**. Man kann darüber Beyers Schauplatz der **Mühlenbaukunſt**, und den erſten Theil von Belidors **Waſſerbaukunſt** zu Rath ziehen. Von kleinern hieher gehörigen Werken iſt beſonders Herrn Silberſchlags **Hydrotechnik** zu empfehlen.

151 Fig.

Die 4. Erklärung.

150 Fig. 9. Die Höhe LN des Waſſers über dem Grundbalken heißt der **Waſſerſtand**. Gewöhnlich iſt das Fluthbette LE des Gerinnes, worin das Rad hängt, eine geneigte Fläche, ſo daß die Mitte A der Schaufel DE, wenn ſie beym Umlauf in der niedrigſten Stelle ankommt, noch niedriger liegt, als die obere Fläche des Grundbalkens. Wenn nun AF horizontal iſt, ſo heißt LF das Gefälle vom Grundbalken bis zur niedrigſten Schaufel, auch das **lebendige Gefälle**. Die ganze Höhe FN, die Summe des Waſſerſtandes und des lebendigen Gefälles, macht alsdenn das **ganze Gefälle** aus, vom obern Waſſerſpiegel MN bis zur Mitte der niedrigſten Schaufel.

Der 1. Zuſatz.

10. Obgleich nicht alle Elemente des Waſſers mit gleichen Geſchwindigkeiten durch die Oefnung LP flieſſen; ſo kann man doch dem 28. §. Hydraul. gemäß ohne ſehr zu fehlen annehmen, das Waſſer flieſſe durch die Mitte Z der Oefnung mit einer Geſchwindigkeit, die der Waſſerhöhe ZN zugehört. Was oberhalb Z durchfließt, wird etwas weniger Geſchwindigkeit haben, was durch niedrigere Stellen fließt, etwas mehr. Die Geſchwindigkeit alſo, der die Höhe ZN zugehört, kann man als die mittlere anſehen. Von Z bis A erlangt das Waſſer durch den Fall noch etwas mehr Geſchwindigkeit, und in dem Augenblick wenn es die niedrigſte Schaufel trift, iſt ſie ſo groß als diejenige, welche ein ſchwerer Körper erlangt, wenn er von einer Höhe fällt, die dem ganzen Gefälle FN gleich iſt.

Der 2. Zuſatz.

11. Wenn das Waſſer die noch ruhende Schaufel trift; ſo entſteht aus dem Anſtoß ein Druck gegen die Schaufel, der ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule, deren Grundfläche mit der Fläche der Schaufel, und deren Höhe mit derjenigen einerley iſt, wovon ein ſchwerer Körper fallen muß, um mit dem anſchlagenden Waſſer einerley Geſchwindigkeit zu erlangen. Eben dieſe Höhe iſt hier alſo das ganze Gefälle des Triebwaſſers.

Der 3. Zuſatz.

12. Wenn das Rad ſchon umläuft, alſo die Schaufel ausweicht, ſo kann der Waſſerſtoß nicht mehr ſo ſtark dagegen wirken. Man muß nun die Geſchwindigkeit der Schaufel von der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers abziehen. Was übrig bleibt iſt die relative Geſchwindigkeit des Triebwaſſers: mit dieſer wirkt es nur in die Schaufel, und man kann nach der Regel des vorigen §. die Stärke des relativen Waſſerſtoſſes finden, wenn man ſtatt der wirklichen Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers die relative Geſchwindigkeit deſſelben in Rechnung bringt. Dieſe Regel mit der im vor. §. enthaltenen läßt ſich nicht ſo kurz als hier nöthig wäre, aus theoretiſchen Gründen beweiſen. Wenn man indeſſen darnach rechnet, ſo ſtimmen die Reſultate ſehr wohl mit der Erfahrung überein, und in ſofern können dieſe Regeln auch als ſolche gelten, die durch die Erfahrung bewährt befunden werden.

Der 4. Zuſatz.

13. Das mechaniſche Moment des relativen Waſſerſtoſſes wird gefunden, wenn man die Stärke

des relativen Waſſerſtoſſes nach der Regel des vorigen §. durch Rechnung ſucht, und was gefunden wird, mit der Geſchwindigkeit der Schaufel multiplicirt. (3. §.) Die Geſchwindigkeit der mittelſten Stelle der Schaufel wird bey dieſer Rechnung gebraucht. Wenn dieſe Geſchwindigkeit der Schaufel ſo groß iſt, als der dritte Theil der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Tiebwaſſers, ſo findet man das erwehnte mechaniſche Moment gröſſer als in jedem andern Fall, wenn die Geſchwindigkeit der Schaufel gröſſer oder kleiner iſt.

Der 1. Lehrſatz.

14. **Eine Maſchine, welche von einem unterſchlächtigen Waſſerrade in Wirkſamkeit geſetzt werden ſoll, muß ſo angeordnet werden, daß die Geſchwindigkeit der umlaufenden Schaufeln dem dritten Theil der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Triebwaſſers gleich iſt.**

Beweis. Bey dieſer Anordnung wird das mechaniſche Moment der Kraft des Waſſerſtoſſes gröſſer, als bey jeder andern Geſchwindigkeit der umlaufenden Schaufeln: (13. §.) alſo muß in eben dem Fall der Effect der Maſchine der möglichſt gröſte ſeyn, weil er dem mechaniſchen Moment der Kraft gleich iſt. (4. §.)

Anmerkung.

H Parent hat dieſe Regel erfunden, und in den Schriften der Pariſer Academie im Jahr 1704 bekannt gemacht.

Die 2. Aufgabe.

15. **Die Kraft wirkt an der Peripherie eines Rades nach der Richtung der Tangente,**

und

und die Geſchwindigkeit der von der Kraft angegriffenen Stelle iſt gegeben: man ſoll die Umlaufszeit des Rades finden.

Aufl. Man dividire die Peripherie des Rades mit der Geſchwindigkeit der angegriffenen Stelle, ſo findet man die geſuchte Umlaufszeit.

Beweis Die Umlaufszeit, welche man ſucht, iſt diejenige, worin die angegriffene Stelle einen Weg zurück legt, welcher der ganzen Peripherie des Rades gleich iſt: alſo wird die Zeit gefunden, welche während dieſer Bewegung verfließt, wenn der Weg mit der Geſchwindigkeit dividirt wird. (6. 7. §.)

Der 1. Zuſatz.

16. Die Umlaufszeit der Kurbel, wenn ſie von einem Menſchen gedrehet, auch die Umlaufszeit des Schwengbaums, wenn derſelbe von Pferden umgetrieben wird, findet man eben ſo, wenn ſtatt der Peripherie des Rades die Peripherie des Cirkels in Rechnung gebracht wird, worin die Handhabe der Kurbel umläuft, oder die Stelle des Schwengbaums, woran die Pferde ziehen.

Der 2. Zuſatz.

17. Weil beym Umlauf eines Rades alle Puncte in der Peripherie mit gleicher Geſchwindigkeit in Bewegung ſind; ſo erhellet, daß in allen Fällen die Umlaufszeit des Rades gefunden werde, wenn die Peripherie des Rades mit der Geſchwindigkeit dividirt wird, womit jeder Punct in der Peripherie umläuft.

Exempel.

18. Man nehme nach dem 6. §. an, die Geſchwindigkeit der Handhabe der Kurbel ſoll 2 Fuß betragen, und der Halbmeſſer des Umlaufskreiſes ſey 1 Fuß, als die Länge der Kurbel: ſo findet man die Peripherie = 6,28 Fuß, alſo die Umlaufszeit

$$= \frac{6,28}{2} = 3,04 \text{ Secunden.}$$

Wenn die Länge des Schwengbaums, den ein Pferd mit einer Geſchwindigkeit von 4 Fuß ziehen kann, 12 Fuß beträgt; ſo iſt die Peripherie des Umlaufskreiſes = 75,36 Fuß, und die Umlaufszeit $= \frac{75,36}{4} = 18,84$ Secunden.

Das unterſchlächtige Waſſerrad ſey 16 Fuß hoch, alſo der Halbmeſſer 8 Fuß groß bis an die Mitte der Schaufeln genommen: ſo iſt die Peripherie 50,24 Fuß. Wenn ferner das Gefälle 4 Fuß beträgt, und zwar im Rheinl. Maaß, welches hier allemahl verſtanden wird, ſo findet man die Geſchwindigkeit des an die Schaufeln ſtoſſenden Triebwaſſers $= 2\sqrt{15,625 \times 4} = 15,8$ Fuß. Hievon nehme man den dritten Theil, ſo erhält man 5,26 Fuß für die Geſchwindigkeit der umlaufenden Schaufeln, damit die Maſchine den möglichſt größten Effect leiſtet, mithin beträgt die Umlaufszeit des Waſſerrades $= \frac{50,24}{5,26} = 9,5$ Secunden.

Die 3. Aufgabe.

19. Der Quadratinhalt von der Fläche der Schaufel des unterſchlächtigen Waſſerrades iſt gegeben: man ſoll finden, wieviel Waſſerzufluß in jeder gegebenen Zeit nöthig ſey, damit die ganze Schaufelfläche vom Waſſer getroffen werde.

Aufl. Unter dem Rade muß ununterbrochen in jeder Zeitſecunde ein priſmatiſcher Waſſerkörper wegflieſſen, deſſen Grundfläche ſo groß als die Schaufelfläche, und deſſen Länge ſo groß als die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers iſt. Man multiplicire alſo den Quadratinhalt der Schaufel mit der Geſchwindigkeit, welche durch den Fall von einer Höhe erlangt wird, die dem ganzen Gefälle gleich iſt; ſo hat man die nöthige Waſſermenge für jede Zeitſecunde im Cubicmaaß.

Exempel. Die Länge der Schaufel ſey 2 Fuß, die Höhe 1 Fuß, alſo der Quadratinhalt 2 Quadratfuß, das Gefälle 4 Fuß, alſo die Geſchwindigkeit des Triebwaſſers 15,8 Fuß: ſo iſt die in jeder Secunde nöthige Waſſermenge $= 2 \times 15{,}8 = 31{,}6$ Cub. Fuß, mithin für jede Stunde $= 31{,}6 \times 3600 = 113760$ Cub. Fuß.

Zuſatz.

20. Wenn umgekehrt nicht allein das Gefälle, ſondern auch die Waſſermenge bekannt iſt, die in jeder Stunde, Minute oder Secunde zuflieſſen kann; ſo findet man leicht, wie groß die Schaufelfläche ſeyn müſſe, damit ſie ununterbrochen ganz vom Waſſer getroffen werde. Die im Cubicmaaß ausgedrückte in jeder Secunde zuflieſſende Waſſermenge dividire

man mit der Geſchwindigkeit, welche mit dem Gefälle zuſammen gehört; ſo giebt der Quotient den Quadratinhalt der Schaufel.

Der 2. Lehrſatz.

21. **Wenn Rad und Getriebe in einander greifen, ſo iſt die Umlaufszeit des Getriebes in der Umlaufszeit des Rades ſovielmahl enthalten, als die Zahl der Triebſtecken in der Zahl der Zähne oder Kämme des Rades.**

Beweis. Weil jeder Zahn oder Kamm einen Triebſtock fortſchiebt, ſo iſt das Getriebe einmahl umgelaufen, wenn ſoviele Zähne vorbey gegangen ſind, als das Getriebe Stecken hat; das Getriebe iſt zweymahl umgelaufen, wenn zweymahl ſoviel Zähne vorbey gelaufen ſind, als es Stecken hat. Wenn alſo die Zahl aller Zähne oder Kämme mit der Zahl der Triebſtecken dividirt wird, ſo muß der Quotient anzeigen, wievielmahl das Getriebe binnen der Zeit umgelaufen iſt, da das Rad einen Umlauf gemacht hat.

Zuſatz.

22. Wenn an der Welle des Getriebes das zweyte Rad befindlich iſt, und daſſelbe in ein zweytes Getriebe eingreift; ſo läuft das erſte Getriebe mit dem zweyten Rade zugleich um. Wenn alsdenn die Zahl der Umläufe des zweyten Getriebes, die auf einen Umlauf des zweyten Rades kommen, mit der Zahl der Umläufe des erſten Getriebes multiplicirt wird, die auf einen Umlauf des erſten Rades kommen; ſo erhält man die Zahl der Umläufe des zweyten Getriebes gegen einen Umlauf des erſten Rades.

Der

Der 3. Lehrſatz.

23. Wenn eine Maſchine durch arbeitende Menſchen, durch Zugpferde, oder durch die Kraft des Waſſerſtoſſes gegen die Schaufeln eines unterſchlächtigen Rades ihre Bewegung erhalten ſoll; ſo kann man die Anordnung allemahl ſo machen, daß das mechaniſche Moment der Kraft den möglichſt gröſten Werth erhält, wenn die Maſchine in den Beharrungsſtand kommt.

Beweis. Bey Anordnung einer jeden Maſchine kommt es auf die vier Gröſſen an, die Kraft (P), die Laſt (Q), die Geſchwindigkeit (α) der von der Kraft unmittelbar angegriffenen Stelle der Maſchi- ne, und die Geſchwindigkeit (β) der Stelle, die dem Widerſtande unmittelbar ausgeſetzt iſt. Fer- ner kommt die Kraft P mit der Laſt Q ins Gleichge- wicht, wenn $P.\alpha = Q.\beta$ wird, und man kann allemahl zuwege bringen, daß dieſer Gleichgewichts- zuſtand erfolgen muß, wenn α die Gröſſe hat, wel- che erforderlich iſt, damit $P.\alpha$ am gröſten ausfalle.

Es iſt nemlich in der Gleichung $P.\alpha = Q.\beta$ die Geſchwindigkeit α allemahl eine gegebene Gröſſe: (6. 14. §.) übrigens aber muß man folgende Fälle unterſcheiden.

I. Es kann die Zahl der Perſonen, oder der Thiere, die an der Maſchine arbeiten ſollen, vorge- ſchrieben ſeyn; auch kann vielleicht an einem kleinen Fluß oder Bach, wenn daſelbſt eine Mühle oder an- dre Maſchine gebauet werden ſoll, nur ein mäßiger Waſſerzufluß ſeyn, weßwegen die Schaufeln eben- falls eine vorgeſchriebene Gröſſe erhalten müſſen,

(20. §.) die man nicht überſchreiten darf. In allen dieſen Fällen iſt auſſer der Geſchwindigkeit α auch die Kraft P gegeben. In manchen Fällen iſt es aus der Erfahrung, oder vielleicht auch aus andern Gründen bekannt, welche Geſchwindigkeit für die Laſt, oder das, was ihre Stelle ſonſt als Widerſtand vertritt, am vortheilhafteſten ſey: alsdenn iſt auch β beſtimmt. Demnach findet man

1) die Gröſſe der Laſt oder des Widerſtandes

$$Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta}.$$

2) Ferner findet man die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, wenn man die Geſchwindigkeit der Kraft mit der Geſchwindigkeit der Laſt dividirt. Eben dieſe Zahl iſt es, welche angiebt, wie die ganze Anordnung der Maſchine beſchaffen ſeyn müſſe. Iſt es ein Räderwerk, ſo findet man dem 15. §. gemäß die Umlaufszeit des Hauptrades, woran die Kraft wirkt, weil α bekannt iſt. Wenn vielleicht auch die Laſt am Umfange eines Rades angebracht iſt, ſo findet man eben ſo für dieſes Rad die Umlaufszeit, weil β bekannt iſt: (17. §.) alſo weiß man auch, wieviele Umlaufe des einen dieſer Räder gegen einen Umlauf des andern kommen müſſen, und kann die Anzahl der Zähne und Triebſtecken darnach gehörig anordnen. (21. §.)

II. Es kann die Gröſſe der Laſt oder des Widerſtandes vorgeſchrieben ſeyn, vielleicht auch die Geſchwindigkeit der Laſt, oder es iſt auch ſonſt bekannt, wie groß letztere ſeyn müſſe. Dieſemnach iſt in einem

ſolchen

ſolchen Fall nicht allein Q, ſondern auch β gegeben. Aber auch α iſt allemahl gegeben: mithin findet man

1) die Kraft $P = \frac{\beta \cdot Q}{\alpha}$. Weil man nun weiß, mit welcher Kraft Ein Menſch, oder Ein Pferd in die Maſchine wirken kann, ſo erſiehet man aus der gefundenen Gröſſe der nöthigen Kraft P, ob Ein Arbeiter, Ein Pferd, genüge, oder ob mehrere, und wieviele arbeitende Perſonen oder Pferde angeſtellet werden müſſen, wenn man Menſchen oder Thiere zur Arbeit brauchen will. Soll ein unterſchlächtiges Waſſerrad die Maſchine treiben; ſo findet man aus dem vorhandenen Gefälle die Geſchwindigkeit des unter dem Rade wegflieſſenden Waſſers. Der dritte Theil davon giebt α als die Geſchwindigkeit der Schaufeln: die übrigen zwey Drittheile geben die relative Geſchwindigkeit des Waſſers, und die dazu gehörige Höhe beträgt $\frac{4}{9}$ des Gefälles. Man ſuche alſo noch den cubiſchen Inhalt einer Menge Waſſer, deren Gewicht der gefundenen Kraft P gleich iſt, und dividire dieſen cubiſchen Inhalt mit $\frac{4}{9}$ des Gefälles, ſo findet man, wie groß die Schaufelfläche ſeyn muß im Quadratmaaß. (12. §.)

2) Ferner findet man eben ſo, wie in dem vorigen Fall, wie man die übrige Anordnung der Maſchine machen müſſe, weil α und β wie vorhin nun bekannt ſind.

Zuſatz.

24. Die Gröſſe der Räder und Getriebe mit ihren Zähnen und Stecken, wenn die Maſchine ein

Räderwerk iſt, richtet ſich nach der Stärke des Drucks, den ſie auszuſtehen haben, und nach der Feſtigkeit der Maſſe, woraus ſie verfertiget werden. Weil die Triebſtecken den Druck öfter, als die Zähne leiden, ſo müſſen ſie etwas ſtärker als die Zähne ſeyn. Bey groſſen Maſchinen, wie bey Mühlen, macht man die Räder und Getriebe aus gutem harten Holz; bey andern, wie bey den Uhren, aus Metall. Nach H. Belidor (Architectura Hydraul. I. Buch II. Cap. 318. §.) hat man folgende Regeln durch die Erfahrung gut befunden.

Die Dicke der Triebſtecken müſſe ſich zu ihrer Zwiſchenweite wie 8 : 7 verhalten. Alsdenn beträgt

der Bogen zwiſchen ihrer Mitte $\frac{15}{8}$ der Triebſteckendicke.

die Peripherie des Getriebes, durch die Mitte der Triebſtecken gezogen, wird $= \frac{15}{8}$ der Triebſteckendicke mit der Zahl der Triebſtecken multiplicirt.

die Peripherie des hineingreifenden Rades = der Peripherie des Getriebes multiplicirt mit der Zahl der Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades.

der Bogen zwiſchen der Mitte zweyer Zähne = dem Bogen zwiſchen der Mitte zweyer Triebſtecken $= \frac{15}{8}$ der Triebſteckendicke.

die Dicke eines Zahns $= \frac{6\frac{1}{2}}{8}$ der Triebſteckendicke,

ihre Zwiſchenweite $= \frac{8\frac{1}{2}}{8}$ der Triebſteckendicke.

Die

Die 4. Aufgabe.

25. Bey einem Gefälle von 2 Fuß eine unterſchlächtige Kornmühle zu bauen, wenn der umlaufende Mühlſtein, welcher den Nahmen des Läufers führt, 5 Fuß im Durchmeſſer halten, 18 Zoll hoch ſeyn, und 50 mahl in 1 Minute umlaufen ſoll.

Aufl. An der auf dem Radeſtuhl horizontal liegenden Welle DE des groſſen Waſſerrades AB befindet ſich gewöhnlich das Kammrad GH, und daſſelbe greift in den Trilling PQ, an der eiſernen vertical ſtehenden Welle OL, die hier das Mühleiſen heißt. Dieſe geht mitten durch den Bodenſtein IK, und oben bey L iſt der Läufer in ſeiner Mitte darauf befeſtiget. Beyde Steine müſſen in der Mitte durchbort ſeyn, der Bodenſtein, weil das Mühleiſen hindurchgehen, und umlaufen ſoll, ohne den Bodenſtein mit umzutreiben, der Läufer aber, um durch die Oefnung das Getreide zwiſchen beyde Steine zu ſchütten. Dieſe Oefnung heißt das Läuferauge. Die übrige Einrichtung kann man leicht in jeder Kornmühle in Augenſchein nehmen, auch die Beſchreibung bey den oben ſchon genannten practiſchen Schriftſtellern finden. Die eben beſchriebenen Theile machen die Hauptſache aus: demnach folgt nun die nöthige 155 Fig.

Berechnung.

I. Nach Hn. Belidors Erfahrungen iſt der Widerſtand, den das Getreide dem Umlauf des Läufers entgegen ſetzt, ſo groß, als wenn am Umfange des Läufers eine Kraft der Bewegung entgegen drückte, welche dem 54ſten Theil vom Gewicht

des Läufers gleich wäre, das Gewicht des Mühleiſens und Trillings mit dazu gerechnet. Einen Pariſer Cubicfuß von derjenigen Steinart, woraus in Frankreich die Mühlſteine verfertiget werden, hat H. Belidor 110 Pfund ſchwer befunden. Ich habe bey einigemahl wiederhohlten hydroſtatiſchen Verſuchen die Steinmaſſe, woraus die in hieſigen Gegenden gebräuchlichen Mühlſteine beſtehen, 2,491 mahl ſchwerer als Waſſer befunden. Weil nun 1 Rheinländiſcher Cubicfuß Waſſer 66 Pfund Cölniſch wiegt; ſo iſt das Gewicht eines Cubicfuſſes der Steinmaſſe 164 Pfund.

Der Mühlſtein ſoll 5 Fuß im Durchmeſſer haben, und 18 Zoll oder $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch ſeyn. Weil nun derſelbe die Figur eines graden Cylinders hat, ſo iſt ſein cubiſcher Inhalt $0,785 \cdot 25 \cdot 1,5 = 29,5$ Cub. Fuß, und ſein Gewicht = 4838 Pfund. Hiezu müſte noch das Gewicht des Mühleiſens und Trillings addirt werden: dagegen geht aber vom Gewicht des Läufers noch das Gewicht einer ſo groſſen Mühlſteinmaſſe ab, als das Läuferauge füllen würde. Weil beydes ſich ohngefehr gegen einander aufheben wird, auch überdem die gröſte Schärfe bey der Rechnung hier nicht erreicht werden kann; ſo genügt es, wenn der 54ſte Theil des gefundenen Gewichts für die zu bewegende Laſt angenommen wird, und dieſer beträgt 90 Pfund = Q. Man ſucht ferner

II. Die Geſchwingigkeit der Laſt, und das iſt hier die Geſchwindigkeit eines jeden Puncts in der Peripherie des Läufers. Weil vorgeſchrieben iſt, daß der Läufer 50mahl in 1 Minute oder 60 Secun-

Secunden umlaufen ſoll, ſo muß er 1 mahl in $\frac{5}{5}$ Secunden umlaufen. Die Umlanfszeit des Läufers iſt alſo gegeben, und das iſt zugleich die Umlaufszeit des Trillings am Mühleiſen. Die Peripherie des Läufers beträgt $3{,}14 \,.\, 5 = 15{,}7$ Fuß, alſo iſt die Geſchwindigkeit der Laſt $15{,}7 : \frac{5}{5} = 13{,}1$ Fuß $= \beta$.

III. Die Geſchwindigkeit der Kraft findet man aus dem Gefälle. Weil daſſelbe nur 2 Fuß beträgt, ſo erhält man die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Triebwaſſers $= 2\sqrt{15{,}625 \times 2} = 11{,}2$ Fuß. Hievon iſt der dritte Theil 3,7 Fuß $= \alpha$: Das iſt alſo die Geſchwindigkeit der Mitte der Schaufeln, und man findet ferner

IV. Die Umlaufszeit des Waſſerrades, wenn man die Höhe deſſelben willkührlich jedoch nur ſo groß annimmt, daß auch das Kammrad nicht zu groß ausfalle, weil ſich gleich bey der folgenden n. V. ergeben wird, daß die Gröſſe des Kammrades davon abhänge. Es ſey in allen 12 Fuß hoch, die Schaufelnhöhe 1 Fuß, ſo iſt der Durchmeſſer des Kreiſes durch die Mitte der Schaufeln 11 Fuß, die Peripherie $3{,}14 \,.\, 15 = 34{,}54$ Fuß, und die Umlaufszeit $\frac{47{,}1}{3{,}7} = 9{,}3$ Secunden.

V. Die Anzahl der Kämme und Triebſtecken. Man dividire die Umlaufszeit des Waſſerrades mit der Umlaufszeit des Läufers, ſo findet man $9{,}3 : \frac{6}{5} = 7{,}75$ für die Zahl der Umläufe des Trillings und Läufers gegen einen Umlauf des Waſſerrades mit dem Kammrade: alſo muß das Kamm-

rad

rad $7\frac{3}{4}$ mahl mehr Kämme erhalten, als der Trilling Stecken hat. Giebt man dieſem 8 Stecken, ſo erhält das Rad 62 Kämme.

VI. Die nöthige relative Kraft des Waſſerſtoſſes giebt der Ausdruck $P = \frac{\beta \cdot Q}{\alpha}$, und man hat ſchon $Q = 90$ Pfund $\beta = 13,1$ Fuß, $\alpha = 3,7$ Fuß, alſo wird $P = \frac{13,1 \times 90}{2,7} = 318$ Pfund.

VII. Den cubiſchen Inhalt der Waſſerſäule, deren Gewicht 445 Pfund beträgt, findet man $\frac{318}{66}$ $= 4,818$ Cubicfuß: das ferner mit $\frac{4}{5}$ des Gefälles, alſo mit $\frac{8}{5}$ Fuß, dividirt giebt 5,42 Qu. Fuß für die Schaufelfläche. Ihre Höhe kann man von 1 Fuß annehmen, alſo muß jede Schaufel 5,42 Fuß lang ſeyn.

VIII. Wird endlich der Quadratinhalt der Schaufel von 5,42 Qu. Fuß mit der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Triebwaſſers multiplicirt, ſo erhält man $5,42 \times 11,2 = 60,704$ Cub. Fuß, als den nöthigen Waſſeraufwand in jeder Secunde. Könnte man auf ſoviel Waſſerzufluß nicht ſicher rechnen; ſo würde die Mühle einen ſo groſſen und ſchweren Läufer, als vorgeſchrieben war, nicht führen können.

Zuſatz.

26. Der Effect der Mühle verhält ſich wie das Product $Q\beta$, und wenn die Peripherie des Läufers $= p$, die Umlaufszeit $= t$ geſetzt wird, ſo iſt $\beta = \frac{p}{t}$, alſo der Effect $= Q \cdot \frac{p}{t} = Q \cdot p \cdot \frac{1}{t}$.

Wird

Wird t in Secunden ausgedrückt, ſo iſt $\frac{1}{t}$ die Zahl der Umläufe, welche der Stein in 1 Secunde macht. Ueberdem verhält ſich hier Q wie das Gewicht des Läufers, p wie ſein Durchmeſſer, und weil der Läufer in 1 Minute 60 mahl mehr Umläufe als in 1 Secunde macht; ſo verhält ſich auch die Zahl $\frac{1}{t}$ wie die Zahl der Umläufe in 1 Minute. Um alſo die Effecte verſchiedener Mühlen zu vergleichen, multiplicire man das Gewicht des Läufers mit ſeinem Durchmeſſer und der Zahl der Umläufe, die er in einer Minute macht. Die Mengen des Mehls, welche Mühlen von verſchiedener Anordnung in gleichen Zeiten liefern, verhalten ſich nach Hn. Belidors Erfahrung ziemlich nahe, wie die ſo berechneten Effecte: alſo kann man den Effect einer jeden andern Mühle mit dem Effect einer Mühle zu la Fere vergleichen, die Hr. Belidor unterſucht hat. Dieſe führte einen 4348 Pfund ſchweren Läufer von 6 Fuß im Durchmeſſer, der in 1 Minute 53 mahl umlief, und lieferte in 24 Stunden 120 Septiers gemahlnes Getreyde den Septier zu 75 Pfund gerechnet. Man findet alſo, wieviel gemahlnes Getreyde die im vor. §. berechnete Mühle liefern würde nach der Proportion 4348 . 53 . 6 : 4838 . 50 . 5 = 120 Septiers : geſ. Zahl von 105 Septiers.

Die 5. Erklärung.

27. Handmühlen nennt man diejenigen, welche von Menſchen vermittelſt einer Kurbel getrieben

ben werden, und Roßmühlen ſolche, die von Zugpferden in Wirkſamkeit geſetzt werden.

Der 1. Zuſatz.

153 Fig. 28. An der Axe der Kurbel A befindet ſich das Kammrad B, welches den Trilling C und mit demſelben den Läufer D treibt. Um den Umlauf deſto gleichförmiger zu erhalten, ſind an der Axe der Kurbel die Schwungflügel K, L, und am Mühlſtein die Schwungflügel M, N, angebracht. Wenn nun vorgeſchrieben iſt, daß zwey Perſonen die Kurbel drehen ſollen; ſo iſt P nebſt α gegeben. Soll überdem der Läufer 50mahl in einer Minute umlaufen, ſo iſt auch β gegeben, wenn man den halben Durchmeſſer des Läufers willkührlich annimmt. Es ſey derſelbe $1\frac{1}{2}$ Fuß, alſo der ganze Durchmeſſer 3 Fuß, ſo iſt ſeine Peripherie $3 \times 3{,}14 = 9{,}42$ Fuß, die Umlaufszeit $\frac{6}{5}$ Secunden, alſo die Geſchwindigkeit der Peripherie $\beta = 9{,}42 : \frac{6}{5} = 7{,}85$ Fuß. Der Halbmeſſer des Umlaufskreiſes der angegriffenen Stelle A der Kurbel ſey 1 Fuß; ſo iſt die Peripherie 6,28 Fuß, und die Umlaufszeit $\frac{6{,}28}{2} = 3{,}14$ Secunden. Dieſe mit $\frac{6}{5}$ Secunden dividirt giebt die Zahl der Umläufe des Läufers gegen einen Umlauf der Kurbel $= 2{,}62$. Wenn alſo das Getriebe 6 Stecken hat, ſo erhält das Kammrad 16 Kämme. Weiter findet man $Q = \frac{\alpha . P}{\beta}$, und es iſt $P = 50$ Pfund, alſo $Q = \frac{2 . 50}{7{,}85} =$ 12,738 Pfund, und das mit 54 multiplicirt giebt

688 Pfund für das Gewicht des Läufers. Seine Gröſſe beträgt alſo 4,2 Cub. Fuß, weil 1 Cubicfuß ſeiner Maſſe 164 Pfund wiegt, ſeine Grundfläche 0,785 . 9 = 7,065 Qu. Fuß, mithin ſeine Höhe 0,594 Fuß, oder ſehr nahe 7 Zoll. Die Menge Mehl, welche die Mühle in 24 Stunden liefern kann, giebt die Proportion 4838 . 5 : 688 . 3 = 105 Septiers : geſ. Zahl 9 Septiers.

Der 2. Zuſatz.

29. An der lothrecht ſtehenden Welle AB, die 154 Fig.
von einem Pferde bey D am Zugbaum CD gedrehet wird, befinde ſich das Sternrad EF, das in den Trilling G greift, und vermittelſt deſſelben den Läufer H herum treibt. Für dieſe Roßmühle iſt P = 175 Pfund, α = 4 Fuß. (6. §.) Wenn nun der Läufer 5 Fuß im Durchmeſſer, alſo $2\frac{1}{2}$ Fuß im Halbmeſſer haben, und 50 mahl in einer Minute umlaufen ſoll; ſo iſt die Peripherie 15,7 Fuß, die Umlaufszeit $\frac{6}{5}$ Secunden, die Geſchwindigkeit $\beta = 13,1$ Fuß. Ferner ſey die Länge des Schwengbaums CD = 12 Fuß, ſo iſt die Peripherie, worin das Pferd umläuft, 3,14 . 24 = 75,36 Fuß, alſo die Umlaufszeit $\frac{75,36}{5} = 18,84$ Secunden. Dieſe mit $\frac{6}{5}$ Sec. Dividirt giebt die Zahl 16, daß alſo das Sternrad EF 16 mahl mehr Zähne haben muß, als das Getriebe G Stecken hat. Weiter findet man $Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta} = \frac{175 \cdot 4}{13,1} = 53,4$ Pf., welches 54 multiplicirt das Gewicht des Läufers giebt von 2884 Pfund. Das ferner mit 164

Pfund dividirt giebt 17,585 Cub. Fuß für ſeinen cubiſchen Inhalt, und dieſer mit der Grundfläche von 0,785 . 25 = 19,625 Qu. Fuß dividirt giebt die Höhe von 0,896 Fuß, oder $10\frac{3}{4}$ Zoll. Der Effect iſt 7mahl gröſſer, als bey der im vor. §. berechneten Handmühle: alſo können 63 Septiers in 24 Stunden abgemahlen werden.

Die 6. Erklärung.

30. Stampfmühlen ſollen dazu dienen mancherley Materialien durch ſtarkes Stoſſen oder Schlagen zum anderweitigen eigenen Gebrauch zuzubereiten: einige führen Stämpfer, andre Hammer. Unter denſelben liegen die Materialien in dienlichen Behältniſſen, welche von den Stämpfern oder Hammern zerſtoſſen oder geſchlagen werden, indem die Maſchine ſie wechſelsweiſe aufhebt, und wieder fallen läßt. Hieher gehören die Oehlmühlen, Lohmühlen, Pulvermühlen, Walkmühlen, Papiermühlen, und unter den Bergwerksmaſchinen die Pochwerke.

Der 1. Zuſatz.

156 Fig. 31. Wenn eine Welle, wovon die Figur einen Querſchnitt vorſtellt, unter dem Nahmen der Daumen mit Zapfen wie A, B, E, F verſehen iſt, ſo können dieſe beym Umlauf der Welle den hervorragenden Zapfen GD des Stämpfers HI von unten ergreifen, ihn auf eine gewiſſe Höhe heben, und hiernächſt wieder fallen laſſen. Nach der Länge der Welle wird eine Reihe mehrerer Stämpfer geſtellt, und die Daumen werden an der Welle ſo vertheilt, daß in dem Augenblick, wenn ein Stämpfer niederfällt, ein andrer wieder ergriffen werde, damit im-

mer

mer einerley Anzahl Stämpfer an der Welle hänge, und ihren Umlauf zu hemmen ſtrebe.

Der 2. Zuſatz.

32. Wenn jeder Stämpfer für ſich bey jedem Umlauf der Welle einigemahl gehoben werden ſoll, ſo müſſen eben ſo viele Daumen auf der Peripherie desjenigen Querſchnitts der Welle eingeſetzt ſeyn, welcher mit dem nemlichen Stämpfer zuſammen gehört. Eben dieſer Kreis iſt der gemeinſchaftliche Umlaufskreis der dazu gehörigen Daumen. Mit jedem einzelnen von den zu einerley Umlaufskreiſe gehörigen Daumen gehört ferner eine Reihe von ſovielen Daumen zuſammen, als Stämpfer vorhanden ſind, welche nach der Länge der Welle gehörig vertheilt ſeyn müſſen.

Der 3. Zuſatz.

33. Wenn 8 Stämpfer vorhanden ſind, und während eines Umlaufs der Welle ein jeder dreymahl gehoben werden ſoll, ſo muß die Welle 24 Daumen haben. Wenn ferner die Umlaufszeit der Welle $= t$ geſetzt wird, und im jetzigen Augenblick der erſte Stämpfer ergriffen wird; ſo muß die Zeit $\frac{1}{24}t$ bis zu dem Augenblick verflieſſen, da der zweyte Stämpfer ergriffen wird. Sollen alsdenn immer 5 Stämpfer an der Welle hängen, ſo muß die Zeit $\frac{5}{24}t$ verfloſſen ſeyn, wenn der erſte niederfällt. Demnach findet man die Erhebungszeit für jeden Stämpfer, wenn die Umlaufszeit der Welle mit einem Bruch multiplicirt wird, deſſen Nenner die Zahl aller Daumen iſt, der Zähler aber die Zahl aller Stämpfer, die zugleich an der Welle hängen ſollen.

Der 4. Zuſatz.

34. Die Höhe, um welche jeder Stämpfer gehoben wird, kann kurz die Erhebungshöhe heiſſen. Wird dieſe mit der Erhebungszeit dividirt, ſo hat man die Geſchwindigkeit der Laſt = β, die Laſt Q ſelbſt iſt das Gewicht eines Stämpfers mit der Anzahl derer multiplicirt, die an der Welle zugleich hängen.

Der 5. Zuſatz.

35 Aus der Erfahrung muß übrigens als bekannt angenommen werden, wievielmahl die Daumenwelle am vortheilhafteſten in einer Minute umlaufen müſſe, damit die Bewegung der Stämpfer weder zu ſchnell, noch zu langſam ſey: alſo iſt die Umlaufszeit t gegeben. Wenn demnach überdem auch das Gewicht eines Stämpfers bekannt iſt, ſo hat es weiter keine Schwierigkeit, die ganze Anordnung der Stampfmühle zu berechnen.

Die 7. Erklärung.

36. Eine Holzſägemühle ſoll eine Säge in die nöthige Bewegung ſetzen, um Stämme von Bäumen nach ihrer Länge in Bretter oder ſchwächere Stücken Bauholz zu zerſchneiden. In ſolcher Abſicht macht man die Einrichtung ſo, daß der Säge in lothrechter Stellung eine auf und nieder ſpielende Bewegung mitgetheilet wird, indem aber dieſe Säge tiefer einſchneidet, auch zugleich der horizontalliegende Block ihr nach und nach entgegen rückt.

Zuſatz.

157 Fig. 37. An der Welle AB des Waſſerrades befinde ſich das Sternrad C, das in den Trilling D greift, und an der Welle dieſes Trillings befinde ſich die

Kurbel

Kurbel E, welche beym Umlauf vermittelſt des Lenkers MN die Säge OP auf und nieder ſchiebt. Dieſe iſt in dem ſo genannten Sägegatter FG befeſtiget, welches in den Falzen der lothrecht ſtehenden Gatterſäulen HI, KL, beweglich iſt. Bey jedem Umlauf der Kurbel wird alſo das ganze Gatter mit der lothrecht darin befeſtigten Säge einmahl auf und nieder geſchoben. Oben bey O wird mit der Säge der eine Arm eines Winkelhebels verbunden, wovon der andre Arm wiederum mit einer dazu ſchicklichen Stoßſtange verbunden iſt, welche bey jedem Umlauf der Kurbel einige Zähne eines Rades fortſchiebt, das einem Gerüſte nach Art eines Wagens, worauf der Block lieget, die nöthige Bewegung mittheilet.

Der 4. Lehrſatz.

38. Damit der Widerſtand, welchen die Sägemühle zu überwinden hat, ſoviel möglich immer gleich groß bleibe, muß das Gewicht des Sägegatters mit der Säge halb ſo groß ſeyn, als der Widerſtand, welchen die Feſtigkeit des Holzes der Bewegung der Säge entgegen ſetzet.

Beweis. Wenn die Säge ſteigt, ſo ſchneidet ſie nicht ein: alſo hat die Maſchine bey der ſteigenden Bewegung nur das Gewicht des Gatters mit der Säge zu überwinden. Wenn dagegen die Säge mit dem Gatter ſinkt, und ins Holz einſchneidet; ſo iſt der Widerſtand des Holzes zu überwinden, wozu ſchon das Gewicht des Sägegatters als Kraft betrachtet das ſeinige beyträgt. Setzt man alſo das Gewicht des Gatters = Q, den Widerſtand des Holzes = R, ſo hat die Maſchine, wenn die Säge

ſinkt, eine Laſt = R − Q, wenn ſie aber ſteigt, eine Laſt = Q zu überwinden. Damit alſo dieſer Widerſtand immer gleich bleibe, wird erfodert, daß Q = R − Q ſey, alſo 2Q = R, und Q = $\frac{1}{2}$R.

Erfahrungsſätze.

39. Drey an einer Säge arbeitende Perſonen können in einer Stunde einen annoch grünen 12 Zoll ins Gevierte ſtarken eichenen Stamm bis auf eine Länge von 10 Fuß von einander ſägen, wenn zwey davon unten ſtehen, und die Säge niederziehen, der dritte aber oben ſtehet, und die Säge wieder hinauf ziehet, auch jedesmahl von oben herab die Säge mit niederdrückt. Jeder Arbeiter wendet alsdenn etwa 30 Pfund Kraft an, alſo beträgt der Widerſtand 90 Pfund. (M. ſ. Belidors Waſſerbaukunſt I. Th. 710. §.) Das völlig trockene Holz widerſtehet weit ſtärker, als wenn es noch grün iſt. Nach Belidors Erfahrung a. a. O. können 3 Arbeiter einen 12 Zoll dicken völlig trockenen eichenen Stamm in einer Stunde nur auf eine Länge von 5 Fuß von einander ſägen. Wenn das eichene Holz 7 bis 8 Zoll dick und noch grün iſt, ſo durchſchneiden ſie ſtündlich eine Länge von 25 bis 26 Fuß; wenn es aber völlig trocken iſt, nur 17 bis 18 Fuß. Von weichem 12 Zoll ſtarken Holze, wenn es grün iſt, zerſchneiden 3 Arbeiter ſtündlich eine Länge von 14 Fuß, wenn es aber trocken iſt, nur 6$\frac{1}{2}$ bis 7 Fuß. Von weichem alten Holz 7 bis 8 Zoll ſtark können 3 Arbeiter ſtündlich eine Länge von 31 bis 32 Fuß zerſchneiden.

Zuſatz.

40. Dieſe Erfahrungen dienen, die Anordnung einer Sägemühle zu berechnen. Hat man die Einrichtung ſo gemacht, daß das Gewicht Q des Sägegatters dem halben Widerſtande des Holzes gleich iſt; ſo hat die Maſchine beſtändig eine Laſt = Q zu überwinden, und der Weg dieſer Laſt iſt während der Umlaufszeit der Kurbel E dem doppelten Durchmeſſer ihres Umlaufskreiſes gleich. Aus der Erfahrung muß bekannt ſeyn, welches die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit für die Säge ſey: alſo iſt auch β bekannt, und aus Q, β, und α, kann man P finden, ſo wie aus den Geſchwindigkeiten α und β auch die Umlaufszeiten des Sternrades C, und Trillings D gefunden werden. Eine Geſchwindigkeit der Säge von 5 bis 6 Fuß in einer Secunde genüget völlig, weil bey zu ſchneller Bewegung des Gatters das heftige Reiben in den Falzen eine zu ſtarke Erhitzung zuwege bringen könnte.

Die 8. Erklärung.

41. Man nennt überhaupt jede Maſchine eine **Waſſerkunſt**, wenn ſie dazu dient, Waſſer aus der Tiefe in die Höhe zu treiben, es mag in einem erhaben liegenden Behälter zum anderweitigen Gebrauch geſammlet werden, oder von dort wieder andern niedriger liegenden Gegenden frey zufließen ſollen. Unter mancherley dazu dienlichen mechaniſchen Anordnungen verdienen die **Pumpenkünſte** vornemlich Aufmerkſamkeit. Ein Paar, oder auch mehrere Paare Pumpen, es mögen Saugwerke, oder Druckwerke ſeyn, können ſo mit einander verbunden werden, daß die halbe Anzahl der Stempel

das Waſſer zum Steigen bringt, wenn die andre Hälfte den Rückzug macht. Bey einer ſo zuſammengeſetzten Pumpenkunſt kann übrigens die Zeit, worin die zuſammen gehörigen Stempel einmahl auf und niedergehen, die Zeit eines Kolbenſpiels heiſſen: ſie iſt doppelt ſo groß, als die Zeit eines Kolbenzuges oder Kolbendrucks.

Der 1. Zuſatz.

150 Fig. 42. Mit der Welle eines Rades, es ſey ein Waſſerrad, oder jedes andre, kann eine hinlänglich ſtarke Kurbel CB, und mit dieſer wieder eine Stange BF verbunden ſeyn, welche von der Kurbel bey jedem Umlauf einmahl hin und wieder geſchoben wird. Dieſe Stange kann einer Welle G mit gleichlangen Armen GH, GI, woran die Pumpenſtangen hängen, oder ſtatt deſſen einem, oder mehrern gleicharmigen Hebeln, mit deren Armen die Pumpenſtangen verbunden ſind, die nöthige hin und wieder ſpielende Bewegung geben. Alsdenn iſt der Durchmeſſer des Kreiſes, worin die Stelle B der Kurbel umläuft, die ſo genannte Warze, woran die Stange hängt, mit der Höhe des Kolbenzuges, und die Umlaufszeit der Kurbel mit der Zeit eines Kolbenſpiels einerley.

Der 2. Zuſatz.

43. Weil die allgemeine Gleichung $Q . f = P . \alpha . T$ (5. §.) der Grund iſt, worauf die ganze Maſchinenlehre beruhet; ſo muß ſie auch bey Waſſerkünſten ihre Anwendung finden, und keine Kunſt kann mehr leiſten, als dieſer Gleichung gemäß iſt. Die Kunſt mag durch Menſchen oder Thiere, durch den Waſſerſtoß, oder andre dieſen ähnliche Kräfte

ihre

ihre Bewegung erhalten; man findet allemahl das Gewicht Q der Menge Waſſer, welche vermittelſt der Kunſt in gegebener Zeit T, wenn alles aufs vortheilhafteſte eingerichtet iſt, auf die Höhe f gebracht werden kann, wenn man der Gleichung $Q = \frac{P \cdot \alpha \cdot T}{f}$ gemäß rechnet. Es bezeichnet nemlich P die Stärke des Drucks der angebrachten Kraft gegen die angegriffene Stelle der Maſchine, wenn eben dieſe Stelle mit der Geſchwindigkeit α ausweicht. Ja es läßt ſich aus theoretiſchen Gründen zeigen, daß wenn Pumpenkünſte gebraucht werden, nie völlig diejenige Waſſermenge gehoben werden könne, welche jener Gleichung gemäß gefunden wird. Indeſſen iſt die Pumpenkunſt, oder jede andre Waſſerkunſt, deſto vollkommener, je weniger die Waſſermenge, welche ſie wirklich hebt, von derjenigen verſchieden iſt, welche jenem Ausdruck gemäß gefunden wird.

Berechnung einer Pumpenkunſt.

44. I. Wenn ein unterſchlächtiges Waſſerrad die Kunſt treiben ſoll; ſo iſt bey einem Gefälle von 2 Fuß die Geſchwindigkeit des Triebwaſſers 11,2 Fuß, und die Geſchwindigkeit der Schaufeln bey der vortheilhafteſten Anordnung 3,7 Fuß $= \alpha$. Wenn nun ſoviel Waſſerzufluß vorhanden iſt, daß die Schaufeln bey 1 Fuß Höhe 6 Fuß lang ſeyn können; ſo beträgt ihre Fläche 6 Quadratfuß, und dieſe mit $\frac{4}{9}$ des Gefälles, alſo hier mit $\frac{8}{9}$ Fuß multiplicirt giebt die Waſſermenge, deren Gewicht der relativen Kraft des Waſſerſtoſſes gleich iſt, $= 5\frac{1}{3}$

Cub. Fuß: alſo wird P = 352 Pfund. Man nehme an, das Waſſer ſoll 80 Fuß hoch gebracht werden, ſo findet man das Gewicht der Waſſermenge, die alle Stunden 80 Fuß hoch gebracht werden kann,

$$= \frac{352 \cdot 3{,}7 \cdot 3600}{80} = 44 \cdot 37 \cdot 36 = 58608$$

Pfund, mithin 888 Cubicfuß.

II. Wie nun die Pumpen paarweiſe zu vertheilen ſind, und wie alles übrige angeordnet werden müſſe, das hängt von vielen beſondern Umſtänden ab. In Saugröhren kann das Waſſer nur etliche 20 Fuß hoch gehoben werden. In der Pumpenröhre ſelbſt könnte die Ausgußröhre zwar in anſehnlicher Höhe über dem Stempel angebracht ſeyn, wenn man nicht ſonſt Urſache hätte, auch hier nicht leicht über eine gewiſſe Gränze hinaus zu gehen. In Bergwerken ſtellt man daher lieber mehrere dergleichen Pumpen von mäßigen Höhen übereinander, wovon die untern das Waſſer in Behälter heben, aus welchen die obern es weiter hinauf treiben. Druckwerke können indeſſen mit anſehnlich hohen Steigröhren verbunden ſeyn. Zwey Druckpumpen, auch wohl mehrere Paare können vermittelſt ihrer Seitenröhren, wovon jede für ſich mit einem eigenen Ventil verſehen ſeyn muß, mit einer gemeinſchaftlichen Steigröhre in Verbindung gebracht werden: und weil die Sache am leichteſten zu überſehen iſt, ſo wird es genügen, wenn zur Probe hier vorausgeſetzt wird, daß eine ſo zuſammengeſetzte Druckpumpenkunſt erwählt werden ſolle.

III. Weil die eine halbe Anzahl Pumpen mit der andern abwechſelnd arbeiten ſoll; ſo kann man anfangs in allen Fällen die Rechnung ſo führen, als wenn es nur ein Paar Pumpen wäre, und beſtändig nur eine davon heben ſollte. Findet ſich am Ende der Rechnung, daß die Pumpen im Durchmeſſer zu groß ausfallen würden; ſo macht man alsdenn die Vertheilung auf mehrere. Arbeitete wirklich ununtbrochen nur ein Stempel, ſo wäre der Widerſtand ſo groß, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche des Stempels in derjenigen Höhe, worauf das Waſſer gehoben werden ſoll. (38. §. Hydraul.) Wenn mehr Stempel zugleich arbeiten; ſo iſt der Widerſtand ſo groß, als das Gewicht einer eben ſo hohen Waſſerſäule auf einer Grundfläche ſo groß, als die Summe der Grundflächen der zugleich arbeitenden Stempel. Man ſuche alſo vermittelſt der Gleichung $P . \alpha = Q . \beta$ die Laſt Q, welche mit P das Gleichgewicht hält. Dieſe kann man finden, ſobald β bekannt iſt, weil P und α ſchon gefunden ſind. (n. 1.)

IV. Hier iſt β die Geſchwindigkeit der Stempel, und dieſe hat man, wenn die Höhe des Hubs mit der Zeit eines Zuges, oder die doppelte Höhe des Hubs mit der Zeit eines Kolbenſpiels, d. i. der doppelte Durchmeſſer der Kurbel mit ihrer Umlaufszeit dividirt wird. Die Kurbel ſey 18 Zoll lang, ſo beträgt der doppelte Durchmeſſer ihres Umlaufskreiſes 6 Fuß. Bey allen Pumpenkünſten wird eine langſame Bewegung der Stempel erfodert: alſo nehme man die Umlaufszeit der Kurbel ſo groß an, daß die Geſchwindigkeit des Stempels etwa nur $\frac{1}{2}$ oder

oder $\frac{1}{3}$ Fuß in 1 Secunde betrage. Weil bey der hier zum Grunde gelegten Anordnung die Umlaufszeit der Kurbel mit der Umlaufszeit des Waſſerrades einerley iſt; ſo muß man nur mit darauf Rückſicht nehmen, daß die Höhe des Waſſerrades nicht zu groß ausfalle. Man verſuche alſo die Vorausſetzung, daß die Umlaufszeit 18 Secunden betragen ſolle, ſo wird $\beta = \frac{1}{3}$ Fuß. Weil $\alpha = 3,7$ Fuß betragen muß, ſo ſoll die Mitte jeder Schaufel einen ſo groſſen Weg in einer Secunde zurück legen, mithin in 18 Secunden 18 mahl 3,7 das ſind 66,6 Fuß. So groß muß die Peripherie durch die Mitte der Schaufeln ſeyn, mithin der Durchmeſſer 21 Fuß, und die ganze Höhe des Rades 22 Fuß. Dieſe Höhe des Rades kann beybehalten werden, mithin bleibt $\beta = \frac{1}{3}$ Fuß, und man findet $Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta}$ $= 352 \cdot 3,7 \cdot 3 = 3907,2$ Pfund.

V. Eine Menge Maſſer, die das gefundene Gewicht hat, iſt $\frac{3907,2}{66} = 59,2$ Cub. Fuß groß, und eine 80 Fuß hohe Säule von dieſer Gröſſe hat eine Grundfläche von $\frac{59,2}{80} = 0,74$ Quadr. Fuß. So groß müſte die kreisförmige Grundfläche des Stempels ſeyn, wenn nur ein Paar Pumpen gebraucht werden ſollte. Die Quadratzahl vom Durchmeſſer dieſes Kreiſes findet man nach der Proportion $785 : 1000 = 0,74 :$ geſ. Qu. Zahl $= 0,942675$ Qu. Fuß (§. Geom.) und die Quadratwurzel daraus $= 0,971$ Fuß giebt die Länge des Durchmeſſers.

meſſers. Weil man wegen andrer Gründe nicht gern ſo weite Pumpenröhren braucht; ſo kann man 2 Paar Pumpen wählen, damit die Grundfläche der Stempel nur halb ſo groß ausfalle. Alsdenn wird die Quadratzahl des Durchmeſſers dieſer Fläche = 0,4713375 und der Durchmeſſer = 06865 Fuß, oder 8¼ Zoll.

VI. Wenn die Kunſt dieſe berechnete Anordnung hat: ſo wird während jeder Umlaufszeit, mithin in 18 Secunden, ein cylindriſcher Raum voll Waſſer gehoben, deſſen Grundfläche = 0,74 Qu. Fuß, und deſſen Höhe 6 Fuß iſt, alſo 4,44 Cub. Fuß. Setzt man ferner 18 Sec. — 4,44 Cub. Fuß — 3600 Sec.? ſo findet man die in einer Secunde gehobene Waſſermenge = 888 Cub. Fuß, welches mit der Rechnung n. 1. überein kommt.

Die 9. Erklärung.

45. Jede Schaufel des oberſchlächtigen Rades, 149
wie RPS wird aus zweyen ungleich breiten Stücken Fig.
PR, PS, unter einem ſchicklichen Winkel zuſammengeſetzt. Der ſchmalere Theil PS heißt die Riegelſchaufel oder Kropfſchaufel, und die Ebene derſelben geht durch die Axe des Rades. Der breitere Theil PR heißt die Stoßſchaufel, und dieſe ſteht ſchräge aufwärts, wenn die Kropfſchaufel die horizontale Lage hat: beyder Durchſchnittslinie iſt mit der Axe des Rades parallel. Wenn CB der Halbmeſſer der äuſſern, CE der Halbmeſſer der innern Peripherie des Kranzes, alſo EB des Kranzes, oder der Felgen Breite iſt; ſo nehme man EA = ⅓ EB, und beſchreibe mit dem Halbmeſſer CA einen

nen neuen Kreis, ſo iſt das der Theilriß, EA ſtellt die Lage der Kropfſchaufel vor, und die Lage AI der Stoßſchaufel iſt ſo, daß ſie verlängert durch T gehet, wenn der Theilriß bey Q, T, u. ſ. f. in ſoviele gleiche Theile getheilt iſt, als das Rad Schaufeln haben ſoll. Wenn DXY die Zelle iſt, welche oben das Waſſer auffängt, und FMN unten diejenige, welche es ausgießt; ſo iſt DEF der waſſerhaltende Bogen.

Der 1. Zuſatz.

46. Man ziehe FH, DK horizontal, ſo iſt HK die lothrechte Höhe des waſſerhaltenden Bogens. Wenn alsdenn das Waſſer in den Zellen dieſes Bogens gleichförmig vertheilt iſt; ſo ſtrebt es das Rad mit einer eben ſo groſſen Gewalt zu drehen, als wenn an der Peripherie des Theilriſſes nach der Richtung der Tangente eine Kraft angebracht wäre ſo groß, als das Gewicht einer Waſſerſäule in der Höhe des waſſerhaltenden Bogens, über einer Grundfläche, die dem mittlern Querſchnitt *AO* der Zellen gleich iſt. Die Regel, wenn ſie gleich hier der nothwendigen Kürze halber nicht wohl aus Gründen der Theorie hergeleitet werden kann, wird man ohne Bedenken als eine ſolche gelten laſſen, die ſich durch die Erfahrung beſtättiget, wenn man darnach rechnet, und der Erfolg mit dem Reſultat der Rechnung übereinſtimmig iſt. Iſt das Rad regelmäßig gebauet; ſo muß die lothrechte Höhe des waſſerhaltenden Bogens wenigſtens $\frac{3}{4}$ von der Höhe des ganzen Rades betragen.

Exempel. Es ſey das Rad 20 Fuß hoch, der waſſerhaltende Bogen 15 Fuß, der mittlere Querſchnitt jeder Zelle ein Rechteck, wovon die Länge 4 Fuß, die Breite 8 Zoll iſt; ſo iſt ſeine Fläche $\frac{8}{3}$ Qu. Fuß. Dieſe mit 15 Fuß multiplicirt giebt 40 Cub. Fuß, und das Gewicht einer ſolchen Menge beträgt 2640 Pfund.

Der 2. Zuſatz.

47. Die vortheilhafteſte Einrichtung einer Maſchine, die von einem oberſchlächtigen Rade getrieben werden ſoll, erfodert, daß die Geſchwindigkeit, womit die Zellen umlaufen, grade ſo groß ſey, als die Geſchwindigkeit des hineinfallenden Waſſers. Wenn alſo bekannt iſt, wie hoch die Rinne G, aus welcher das Waſſer herabfällt, über der oberſten Zelle erhaben ſey, die das Waſſer auffängt; ſo kann man daraus die Geſchwindigkeit der umlaufenden Zellen finden, welches hier die Geſchwindigkeit der Peripherie des Theilriſſes wird. Die Gröſſe der nach der Regel des vor. §. gefundenen Kraft mit dieſer Geſchwindigkeit multiplicirt giebt das mechaniſche Moment der Kraft, mithin auch den Effect der Maſchine.

Exempel. Wenn die Höhe der Rinne über der Zelle, die das Waſſer auffängt, 2 Fuß beträgt, ſo iſt die damit zuſammen gehörige Geſchwindigkeit 11,2 Fuß. Hat nun das Rad die im vor. §. angenommenen Abmeſſungen, ſo wird das mechaniſche Moment der Kraft = 2640 × 11,2 = 29568. Sollte das Rad eine Kunſt treiben, und dieſe das Waſſer 80 Fuß hoch bringen, ſo würden in jeder Secunde 369,6 Pfund oder 5,6 Cub. F. mithin in jeder

jeder Stunde 20160 Cub. F. Waſſer auf dieſe Höhe gebracht werden können.

Der 3 Zuſatz.

48. Am Umfange des umlaufenden oberſchlächtigen Rades muß ſich in jeder Secunde ein priſmatiſcher Waſſerkörper anlegen, deſſen Grundfläche ſo groß iſt, als der mittlere Querſchnitt der Zellen im Quadratmaaß, und deſſen Länge ſo groß iſt, als die Geſchwindigkeit der umlaufenden Zellen, die hier der Geſchwindigkeit des hineinfallenden Waſſers gleich ſeyn muß. Oben im 46. §. war der mittlere Querſchnitt der Zellen $\frac{8}{3}$ Qu. F. und im 47 §. ihre Geſchwindigkeit 11,2 alſo iſt der nöthige Waſſeraufwand 29,86 Cub. F. in jeder Secunde.

Die 10. Erklärung.

49. Wenn ein groſſes verticales Rad mit einer horizontalliegenden Welle, das übrigens, die Schaufeln ausgenommen, mit einem Waſſerrade alle Aehnlichkeit hat, ſo eingerichtet wird, daß Menſchen oder Thiere auf den äuſſern oder innern Umfang treten, und auf ſolche Art das Rad in Umlauf bringen können, ſo heißt es ein verticales Trett- oder **Laufrad**, oder hier ſchlechthin ein **Laufrad**.

Der 1. Zuſatz.

158 Fig. 50. Es ſey C der Mittelpunct, CL = CA der Halbmeſſer des Laufrades; ſo lehrt die Erfahrung, daß die Stelle A, wo die arbeitenden Perſonen neben einander auf dem innern Umfange des Kranzes ſtehen, am füglichſten um 30° von der niedrigſten Stelle L entfernt ſeyn könne. Wenn nun AB vertical iſt, ſo iſt CB die Entfernung der Kraft vom Mittelpunct, und dieſe iſt der Hälfte des Halbmeſſers

meſſers vom Rade gleich. Das ſtatiſche Moment des Gewichts der in A befindlichen Arbeiter wird alſo gefunden, wenn dies Gewicht mit der Hälfte des erwehnten Halbmeſſers multiplicirt wird: alſo iſt die Wirkung eben ſo, als wenn das halbe Gewicht der arbeitenden Menſchen am Umfange des Rades nach der Richtung des Halbmeſſers wirkte. Die Geſchwindigkeit, womit alsdenn die getretene Stelle bey A nach der Richtung der Tangente ausweicht, beträgt ohngefehr 2 Fuß, auch wohl nur $1\frac{1}{2}$ Fuß. Dieſe alſo mit dem halben Gewicht der arbeitenden Perſonen multiplicirt giebt das mechaniſche Moment der Kraft.

Der 2. Zuſatz.

51. Pferde können ſich nicht wohl ebenſoweit, als arbeitende Menſchen, ſondern in grader Linie höchſtens nur um den dritten, vielleicht nur um den vierten Theil des Halbmeſſers von dem verticalen Durchmeſſer OL entfernen: demnach wirkt nach der Richtung der Tangente nur der dritte, oder im letzten Fall nur der vierte Theil ihres Gewichts.

Der 3. Zuſatz.

52. Wenn auſſerhalb des Rades ein Gerüſte angebracht wird, damit die arbeitenden Menſchen auf den äuſſern Umfang des Rades etwa in der Gegend H treten, und ſo das Rad drehen können; ſo wirken ſie zwar beynahe mit ihrem ganzen Gewicht nach der Tangente des Rades, aber die Geſchwindigkeit der Bewegung kann dagegen nicht völlig ſo groß ſeyn. Bey Thieren, weil ſie entweder nur mit den Vorderfüſſen allein, oder mit den Hinterfüſſen allein auf den äuſſern Umfang des Rades treten können, ge-

winnet man dadurch noch weniger Vortheil, weil nur ihr halbes Gewicht in das Rad wirken kann.

Der 4. Zuſatz.

159 Fig. 53. Ein ſchiefliegendes Tretrad, wie es die 159ſte Figur vorſtellet, braucht man alsdenn nur, wenn ein Thier, das zwar von Körper anſehnlich ſchwer iſt, aber nur langſam arbeiten kann, das Rad drehen ſoll. Wenn PQ die geometriſche Axe der Umlaufswelle vorſtellet, die gegen den Horizont unter dem Winkel RPC geneigt iſt; ſo neigt ſich die Fläche des Rades gegen den Horizont unter einem Winkel, der = RCP iſt, und den vorigen zu 90° ergänzt. Dieſer Neigungswinkel der Ebene des Rades kann nicht wohl über 15° betragen. Wenn alsdenn das Thier in A ſeine Stelle hat, ſo wirkt wenig mehr, als der vierte Theil ſeines Gewichts in das Rad nach der Richtung AB, und nach der auf dem Halbmeſſer CA ſenkrechten Richtung AD noch weniger. Die Geſchwindigkeit der Bewegung dieſer Stelle kann auch nicht leicht über 2 Fuß in 1 Secunde betragen.

Die 5. Aufgabe.

54. Eine Maſchine ſo anzuordnen, daß ſie durch den Stoß des Windes ihre Bewegung erhalte.

160 Fig. Aufl. Durch den Kopf A der Hauptwelle AW werden ein Paar lange hölzerne Bäume DE, FG, welche die Windruthen heiſſen, ſo hindurch geſteckt, daß beyde ſowohl gegen einander, als auch gegen die Welle AW eine ſenkrechte Lage bekommen. Dieſe Ruthen werden in Entfernungen von 1 bis 2 Ellen mit Löchern durchbort, und hölzerne Sproſſen

MO,

MO, HI, KL, hindurch geſteckt, ſo lang als der Flügel, um den Wind aufzufangen, breit ſeyn ſoll. Die Sproſſen werden zu beyden Seiten durch die Leiſten oder Rahmen MN, OP, wegen mehrerer Feſtigkeit verbunden, und hiernächſt entweder mit Schilf ausgeflochten, oder mit dünnen Brettern, den ſo genannten Thüren zugedeckt, die man bey Stürmen wegnehmen kann. Auch wird wohl zu dieſer Bedeckung Seegeltuch gebraucht. Wenn alle zu einerley Flügel gehörige Sproſſen in einer Ebene liegen; ſo bekommt der Flügel die Natur einer feſten Ebene, welche gegen die Umlaufsaxe unter einem ſchiefen Winkel geneigt ſeyn muß; damit der Wind, wenn er in paralleler Richtung mit der Axe gegen den Flügel ſtößt, ihn ſeitwärts drücke, und ſolchergeſtalt den Flügel mit der Welle in Umlauf bringe. Uebrigens muß man noch die Einrichtung ſo machen, daß entweder das ganze Gebäude mit der Maſchine, oder nur das Dach mit der Hauptwelle, wenn ſich der Wind ändert, allemahl nach demſelben gedrehet, und der Kopf der Hauptwelle ihm entgegen geſtellet werden könne.

Berechnung des Effects der Windflügel.

55. Weil jeder Windflügel eine anſehnliche Länge hat, ſo laufen die von der Welle mehr entfernten Stellen ſchneller, die der Welle nähern Stellen langſamer um: alſo hat der Windſtoß auf den ausweichenden Flügel nicht in allen Stellen einerley Wirkung. Unter andern kommt die gute Wirkung der Flügel vornemlich auf den Winkel an, unter welchem die Fläche eines jeden Flügels gegen die Umlaufsaxe geneigt iſt. Unter eben dieſem Winkel

kel ſind ſie beym Umlauf auch gegen die Richtung des Windes geneigt. Im erſten Anfang der Bewegung, wenn der Wind gegen den noch ruhenden Flügel ſtößt, würde der Windſtoß die gröſte Wirkung haben, wenn der Neigungswinkel der Flügel $54^\circ\ 44'$ betrüge: allein auf den umlaufenden Flügel wirkt der Wind anders, und der geſammte mechaniſche Effect des Windſtoſſes fällt deſto gröſſer aus, je näher der Neigungswinkel der Flügel dem rechten Winkel kommt: es muß aber auch alles übrige recht angeordnet ſeyn.

Es ſey die ganze Länge des Flügels $AE = a$,
der Neigungswinkel deſſelben gegen die Umlaufsaxe $= \vartheta$,
die Geſchwindigkeit des Windes $= C$.

Ferner ſetze man Kürze halber die Zahl $\frac{8-\sqrt{10}}{9}$ oder $0{,}537525 = \zeta$, die Zahl $1 + \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{4}{3}\zeta = \frac{22+4\sqrt{10}}{81} = 0{,}427767 = \eta$. Die Geſchwindigkeit, womit der äuſſerſte Punct E des Flügels umläuft, ſey $= \alpha$. In G ſey des Flügels Schwerpunct, und $AG = f$, $AB = b$, ſo iſt $f = \frac{1}{2}(a+b)$: übrigens bleibe wie bisher allemahl $g = 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß.

Vermöge der Theorie und Erfahrung leiſten die Windflügel den beſten Effect, wenn alles ſo angeordnet iſt, daß die Geſchwindigkeit $\alpha = \zeta\,.\,C\,.\,\mathrm{tg}.\,\vartheta$ werde. Alsdenn wirkt der Wind gegen jeden Flügel ſo ſtark, als wenn am äuſſerſten Ende deſſelben bey E eine ſo groſſe Kraft ihn in der Richtung ſeiner

Um-

Umlaufsbewegung zu drehen ſtrebte, als das Gewicht einer Luftſäule über der Fläche des Flügels, als ihrer Grundfläche, in einer Höhe, die $= \frac{\eta \cdot f \cdot C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4ga}$ gefunden wird. Gegen alle vier Flügel zuſammen wirkt alſo eine Kraft, die viermahl ſo groß iſt.

Man ſetze noch die Fläche des Flügels $= A$, das Gewicht eines Cubicfuſſes Luft $= G$, ſo wendet man die allgemeine Gleichung für die ganze Maſchinenlehre $P \cdot \alpha = Q \cdot \beta$ auf Windflügel an, wenn die Kraft $P = \frac{\eta \cdot G \cdot A \cdot f \cdot C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{ga}$, und $\alpha = \zeta \cdot C \cdot \tan\vartheta$ geſetzt wird. Die Ausdrücke, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\tan\vartheta$, bezeichnen hier die trigonometriſchen Linien, welche mit dem Winkel ϑ zuſammen gehören, in der Vorausſetzung, daß der Halbmeſſer $= 1$ ſey. (25. §. Trig.) Man muß alſo die Zahlen, welche in den Tabellen gefunden werden, mit 10000000 dividiren, wenn ſie hier gebraucht werden ſollen.

Wenn bey der Anwendung der Rechnung auf beſondre Fälle eben nicht die gröſte Schärfe nöthig iſt; ſo ſetzt man $\zeta = 0{,}54$, und $\eta = 0{,}43$. Die Zahl $\zeta = \frac{\alpha}{C \cdot \tan\vartheta}$ hängt von der Geſchwindigkeit α ſo ab, daß im erſten Anfang der Bewegung, wenn $\alpha = 0$ iſt, auch $\zeta = 0$, mithin alsdenn $\eta = 1$ iſt. Daher iſt die Kraft des Windſtoſſes gegen alle vier Flügel im erſten Anfang der Be-

wegung $= \frac{G . A . f . C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{ga}$. Bey Berechnung der ganzen Anordnung, damit der gröſte Effect erhalten werde, wenn die Maſchine in den Beharrungsſtand kommt, finden übrigens die im 23. §. vorgetragenen Lehren ihre Anwendung.

Die 6. Aufgabe.

56. Eine Kornmühle mit Windflügeln ſo anzuordnen, daß ſie bey einer Geſchwindigkeit des Windes von 20 Fuß in einer Secunde einen eben ſo groſſen und ſo ſchweren Läufer eben ſo ſchnell im Umlauf erhalte, als die im 25. §. berechnete Waſſermühle.

Aufl. Man kann die im 25. §. num. I. und II. berechneten Zahlen hier unverändert beybehalten. Dagegen findet man hier, wenn der Winkel $\vartheta = 70°$ angenommen wird, folgende Reſultate.

III. Die Geſchwindigkeit der Kraft $\alpha = \zeta C \tan\vartheta = 0{,}54 . 20 . 2{,}75 = 29{,}7$ Fuß, und das iſt die Geſchwindigkeit der äuſſerſten Sproſſe eines jeden Flügels.

IV. Die ganze Länge des Flügels ſey 36 Fuß, ſo findet man die Peripherie des Kreiſes, worin die äuſſerſte Sproſſe umläuft, $= 3{,}1416 . 72 = 226{,}2$ Fuß, alſo die Umlaufszeit der Flügel $= \frac{226{,}2}{29{,}7} = 7{,}75$ Secunden.

V. Die Umlaufszeit des Läufers von $\frac{6}{5}$ Secunden (25. §. n. II.) iſt in 7,75 Secunden 6,46mahl ent-

enthalten: alſo muß die Zahl der Triebſtecken in der Zahl der Kämme eben ſo vielmahl enthalten ſeyn.

VI. Die nöthige relative Kraft des Windſtoſſes $P = \frac{Q \cdot \beta}{\alpha}$ wird gefunden, wenn hier $\alpha = 29{,}7$ Fuß geſetzt wird, (n. III.) da dann für Q und β die Zahlen aus dem 25. §. num. I. II. genommen werden. Alſo iſt $P = \frac{90 \cdot 13{,}1}{29{,}7} = 39{,}7$ Pfund. Weil dieſe Kraft auf alle vier Flügel gleich vertheilt ſeyn muß; ſo kommt auf jeden Flügel 9,92 Pfund.

VII. Das ſpecifiſche Gewicht der Luft iſt ſehr veränderlich, ſie iſt zuweilen 800mahl, zuweilen nur 700mahl, auch wohl nur 600 bis 650mahl leichter als Waſſer: um deßwillen kann man hier als eine Mittelzahl annehmen, die Luft ſey 726mahl leichter als Waſſer, alſo das Gewicht eines Cubicfuſſes Luft $\frac{66}{726} = \frac{1}{11}$ Pfund. Demnach wird der cubiſche Inhalt einer Luftſäule, die 9,92 Pfund wiegt, $= 9{,}92 : \frac{1}{11} = 109{,}12$ Cub. Fuß gefunden. Die Höhe dieſer Luftſäule iſt $= \frac{\eta f C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4ga}$, (55. §.) und oben num. IV. iſt $a = 36$ Fuß angenommen. Wird nun ferner $b = 4$ Fuß geſetzt, ſo erhält man $f = \frac{1}{2}(a + b) = 20$ Fuß: alſo $\frac{f}{a} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. Weiter iſt $C^2 = 400$, und $4g = 62{,}5$: alſo findet man $\frac{fC^2}{4ga} = \frac{5 \cdot 400}{9 \cdot 62{,}5} = 3{,}555$ Fuß. Aus den trigonometriſchen Tafeln erhält man

ferner $\sin\vartheta = \sin 70^\circ = 0{,}9397$, $\cos\vartheta = 0{,}3420$, alſo $\sin\vartheta^2 = 0{,}8829$, $\sin\vartheta^2 \cos\vartheta = 0{,}3019$, und $\eta \sin\vartheta^2 \cos\vartheta = 0{,}43 \cdot 0{,}3019 = 0{,}1298$: mithin $\frac{fC^2}{4ga} \cdot \eta \sin\vartheta^2 \cos\vartheta = 3{,}555 \cdot 0{,}1298 =$ 0,46144 Fuß, welches die Höhe derjenigen Luftſäule iſt, deren Gewicht ſo groß iſt, als die an jedem Flügel nöthige Kraft. Ihr cubiſcher Inhalt war 109,12 Cubicfuß: alſo findet man ihre Grundfläche $= \frac{109{,}12}{0{,}46144} = 236{,}5$ Quadratfuß. Die Länge dieſer Fläche von der niedrigſten Sproſſe bis zur höchſten beträgt 32 Fuß: wenn alſo jener Quadratinhalt von 236,5 Qu. F. mit der Länge von 32 Fuß dividirt wird; ſo findet man 7,4 Fuß für die nöthige Breite der Flügel.

Allgemeine Anmerkungen.

57. Die Friction macht bey allen Maſchinen, die im groſſen gebauet werden, einen beträchtlichen Theil des Widerſtandes aus: wie groß aber derſelbe in jedem Fall ſey, kann alsdenn allererſt gefunden werden, wenn die Anordnung der Maſchine ſchon feſtgeſetzt iſt. Dieſe muß alſo in allen Fällen den bisherigen Lehren gemäß berechnet werden. Hiernächſt ſucht man, wie groß eine Kraft F ſeyn müſte, wenn ſie mit der ſchon vorhin in Rechnung gebrachten Kraft P zugleich an einerley Stelle angebracht werden, und mit der Friction aller Theile der Maſchine im Gleichgewicht ſeyn ſollte. Hat man nun ſeine Freyheit, die ſchon in Rechnung gebrachte Kraft P um die gefundene F noch zu vermehren,

ren, etwa beym Waſſerrade durch Vergröſſerung der Schaufelfläche, wenn man Waſſerzufluß genug hätte; ſo kann die Maſchine wirklich einen ſolchen Widerſtand überwinden, als für Q gefunden, oder vielleicht als gegeben in Rechnung gebracht iſt. Denn $P = \frac{Q \cdot \beta}{\alpha}$ iſt mit Q, und F mit der Friction im Gleichgewicht.

Hat man aber nicht Waſſerzufluß genug, oder kann man ſonſt P nicht vermehren; ſo nehme man an, es ſey $Q = R + S$, und S ſey ein Widerſtand, der an eben der Stelle angebracht, welche die wirkliche Laſt angreift, eben ſo ſtark der Bewegung widerſtehen würde, als die Friction aller Theile zuſammen genommen der Bewegung der Stelle widerſtehet, wo die Kraft angebracht iſt: ſo wird erfodert, daß $P = \frac{(R + S)\beta}{\alpha}$ ſey. Ein Theil von P wird nun mit R, der übrige mit S im Gleichgewicht ſeyn. Man ſetze jenen Theil $= V$, wenn dieſer $= F$ iſt, alſo $P = V + F$; ſo erhält man $(V + F)\alpha = (R + S)\beta$. Weil nun $F\alpha = S \cdot \beta$ ſeyn ſoll, ſo iſt auch $V\alpha = R\beta$, oder $(P - F)\alpha = R \cdot \beta$, woraus $R = \frac{(P - F)\alpha}{\beta}$ gefunden wird, welches denn die eigentliche Laſt iſt, ſo die Maſchine im Beharrungsſtande bewegen kann.

58. Im dritten und vierten Bande von den Abhandlungen der Königl. Schwediſchen Akademie der Wiſſenſchaften auf die Jahre 1741 und 1742 ſind ein paar Abhandlungen des damaligen Kön. Schwe-

diſchen Commerzienraths, Herrn Polhem, abgedruckt, unter der Aufſchrift: Verbindung der Theorie und Practik in der Mechanik. Nach des Verfaſſers Urtheil, der zu ſeiner Zeit als ein ſehr geübter Kenner des Maſchinenweſens bekannt war, beſtehet der Unterſcheid der Theorie und Practik in der Mechanik darin, daß die erſte alle Verhältniſſe, Regeln und dazu gehörige Ausrechnungen lehrt, die andre aber auf eine gute Geſchicklichkeit und fertige Uebung ankommt, ſolche Zuſammenſetzungen zu machen, die einen guten und beſtändigen Nutzen nebſt der gehörigen Richtigkeit in der Gröſſe geben. Beyde, ſagt Herr Polhem, ſind ſo weit von einander unterſchieden, daß ſich noch niemand unterſtanden hat, ein nützliches Buch zu ſchreiben, welches beyde Theile gehörig enthielte: doch ſey die Theorie von gelehrten Profeſſoren noch vollkommen genug abgehandelt worden.

Zu der Zeit hatte aber Deutſchland ſchon die Leupoldſchen Werke, und bald nachher ward auch Belidors Waſſerbaukunſt durch die deutſche Ueberſetzung unter uns bekannter. Andere noch neuere Bemühungen um die Mechanik haben gewieſen, daß Theorie und Practik nicht ſo weit von einander unterſchieden ſind, als Herr Polhem noch zu glauben ſcheint. Je vollſtändiger und richtiger man die Theorie bearbeitet hat, deſto vollkommenere Maſchinen hat man auch in der Ausübung zu Stande gebracht, und die Meynung, daß vieles in der Theorie richtig ſey, was ſich in der Ausübung nicht thun laſſe, iſt zu den Zeiten entſtanden, als die Theorie diejenige Vollkommenheit noch lange nicht erreicht

erreicht hatte, wozu ſie nunmehr iſt gebracht worden. Vormahls ward manches für theoretiſch richtig gehalten, wovon man doch nachher eingeſehen hat, daß es nichts weniger als theoretiſch richtig ſey. Wer practiſche Vorſchriften auf Theorien gründen will, der muß wohl verſichert ſeyn, daß er die Theorie richtig verſtanden habe, weil ſonſt fehlſame Anwendungen auf die Ausübung eine nothwendige Folge davon ſind. Herr Polhem war in der Theorie nicht ungeübt, ſeine vielen practiſchen Beſchäftigungen hinderten ihn aber, in der Theorie, ſoweit er ſie in den jüngern Jahren erlernet hatte, nach und nach weiter zu kommen, und er geſtehet ſelbſt, daß ſein Gedächtniß vieles aus der Acht gelaſſen habe, was nicht eben beſtändig im Gebrauch vorkomme. Man ſehe die Schwediſchen Abhandlungen vom Jahr 1741 S. 195. Dies iſt ihm ohne Zweifel auch begegnet, als er den Aufſatz **vom Schwungrade** ſchrieb, in den Schwed. Abhandl. vom J. 1742 S. 148, woſelbſt er einige von der richtigen Theorie ganz abſtimmige Regeln für die Anordnung der Schwungräder bey Maſchinen gegeben hat. Herr Büſch in ſeiner **Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens** folgt dem Herrn Polhem in der Lehre vom Schwungrade, und Herr N. Schmid hat im 70ſten, 71ſten und 72ſten Stück des Hannöveriſchen Magazins vom Jahr 1776 einen Aufſatz unter dem Titel: **das Weſentliche der Mechanik**, drucken laſſen, worin derſelbe von den Gründen, worauf die Wirkung des Schwungrades beruhen ſoll, eben das lehrt, was die Herren Polhem und Büſch davon lehren. Vermuthlich hat

Herr

Herr Schmid alles aus Büſchens Mathematik ge-
nommen. Am allermeiſten befremdet es mich, daß
Herr Profeſſor Mönnich in der Anleitung zur
Anordnung und Berechnung der gebräuch-
lichſten Maſchinen, Erſte Abth. Augsb. 1779
§. 35. u. f. alle dieſe Unrichtigkeiten ebenfalls vor-
getragen hat: indeſſen ſehe ich aus der Vorrede, daß
der Herr Verfaſſer dieſe Unrichtigkeiten zum Theil
ſchon ſelbſt wahrgenommen hat.

59. Das Fehlſame in Polhems Lehre vom Schwungrade beſteht darin, daß er die Geſetze, nach welchen ſich ein Pendel bewegt, indem es ſich hin und wieder ſchwingt, mit den Geſetzen vermengt, nach welchen ein Schwungrad, oder überhaupt jede Scheibe um eine Axe läuft, die durch ihren Schwerpunct gehet, und auf der Fläche der Scheibe ſenkrecht iſt. Man ſtelle ſich eine kleine Bleykugel vor, die an einem zarten jedoch ſo ſtarken Faden herab hängt, daß er das Gewicht der Kugel tragen kann. So lange dieſe Kugel lothrecht herab hängt, ſo lange wird alles ruhig bleiben, und keine Bewegung erfolgen: bringt man aber den Faden mit der Kugel aus der lothrechten Lage, und überläßt darauf die Kugel ſich ſelbſt, ohne ihr im geringſten einen Stoß zu geben; ſo fängt ſie von ſelbſt an, ſich mehrmahl nach einander hin und her zu ſchwingen, und kommt nur nach und nach wieder in Ruhe. Das iſt eine Wirkung des Gewichts der Kugel, und man muß das Gewicht einer körperlichen Maſſe ſorgfältig von demjenigen unterſcheiden, was in der Mechanik Trägheit der Maſſe heißt. (9. §. Hydraul.) Beydes wird freylich noch nicht von allen Schrift-

ſtellern

tellern genau genug unterſchieden, und daher haben manche fehlſame Anwendungen ſonſt richtiger mechaniſcher Sätze ihren Urſprung. Trägheit einer Maſſe, iſt nichts anders als ihre Gleichgültigkeit gegen Ruhe und Bewegung. Ruhet eine Maſſe, ſo bleibt ſie für ſich in Ruhe, wofern nicht eine Urſache vorhanden iſt, die ſie in Bewegung ſetzt: dies Naturgeſetz wird jedem einleuchtend vorkommen, weil es den bekannteſten Erſcheinungen in der Natur gemäß iſt. Aber eben ſo gewiß als jenes Naturgeſetz wahr iſt, ſo gewiß iſt auch das unmittelbar damit zuſammenhängende richtig: wenn eine Maſſe einmal in Bewegung iſt, ſo bleibt ſie für ſich in derſelben Bewegung mit einerley Geſchwindigkeit und in einerley Richtung, wofern keine Urſache vorhanden iſt, welche Richtung und Geſchwindigkeit ändert, oder auch wol die Maſſe gänzlich zur Ruhe bringt. (10 §. Hydraul.) Weil alle Bewegungen in der Natur, die wir zuwege bringen können, wenigſtens nach und nach aufhören, wofern nicht Kräfte vorhanden ſind, die ſie unterhalten: ſo ſcheint dies zweyte Naturgeſetz nicht ſo einleuchtend, als jenes erſtere zu ſeyn; es ſcheint, daß alle Körper in der Natur ein Beſtreben äuſſern, wieder in Ruhe zu kommen. Allein es läßt ſich zeigen, daß in jedem Fall beſondre Urſachen vorhanden ſind, welche die Bewegung nach und nach verzögern.

60. Wäre die am Faden herab hangende Kugel eine bloß träge nicht ſchwere Maſſe, ſo würde ſie in Ruhe bleiben, wenn man ſie mit dem Faden aus der lothrechten Lage brächte. Gäbe man ihr einen

auch

auch nur leichten Stoß nach einer wagrechten Richtung, wenn ſie mit dem Faden lothrecht herab hängt; ſo würde ſie nicht wie eine ſchwere Kugel in eine hin und her ſchwankende Bewegung kommen: vielmehr würde ſie anfangen im Kreiſe herum zu laufen, und wenn ſonſt keine Hinderniſſe ihre Bewegung verzögerten, ſo würde ſie wegen ihrer Trägheit dieſe Umlaufsbewegung ohne Aufhören fortſetzen, und von ſelbſt nie wieder in Ruhe kommen. Bey dem allen würde der Faden doch verurſachen, daß das nicht völlig erfolgen könnte, was vermöge der Trägheit der Kugel erfolgen müſte: denn vermöge der Trägheit würde die Kugel der Richtung des erſten Stoſſes folgen, und in gerader Linie fortgehen. Das aber hindert der Faden, er verurſachet, daß die Kugel während der Bewegung von der Stelle, wo der Faden beveſtiget iſt, beſtändig gleich weit entfernt bleiben muß, dadurch nöthiget er die Kugel, im Kreiſe umzulaufen, die für ſich in gerader Linie fortlaufen würde. (M. ſ. die Anfangsgründe 2. Band 12 bis 14. §. der Mechanik.) Daraus entſteht nun die Wirkung, daß der Faden gedehnt wird, und es iſt eben ſo viel, als wenn die Kugel ſelbſt den Faden dehnte, oder ſo zöge, als wenn ſie ein beſtändiges Beſtreben hätte, ſich vom Mittelpunct nach der Richtung des Fadens zu entfernen. Man nennt dieſe Gewalt, womit ſolchergeſtalt der Faden gedehnt wird, am richtigſten die Fliehkraft der Kugel, wiewol ſie auch Schwungkraft, Centralkraft, von den Schriftſtellern der Mechanik genannt wird, und dieſer Ausdruck verleitet zuweilen zu fehlſamen Anwendungen ſonſt richtiger mechaniſcher Lehren.

61. Huygen, den auch Herr Polhem anführt, hat zuerſt über dieſe Fliehkraft Unterſuchungen angeſtellt, er hat gewieſen, wie die Stärke dieſer Dehn- oder Fliehkraft aus der Geſchwindigkeit gefunden werden könne, womit die Kugel ſolchergeſtalt umlaufen würde, wenn ſie bloß träge wäre. Soviel erhellet leicht, daß dieſe Fliehkraft deſto ſtärker ſeyn müſſe, je gröſſer die Umlaufsgeſchwindigkeit iſt, wenn man einerley Länge des Fadens beybehält. Ich habe beym Vortrage der mechaniſchen Wiſſenſchaften in meinen Anfangsgründen ſowohl, als auch im Lehrbegriffe der Mathematik an mehrern Stellen, wie ich meyne, deutlich gewieſen, daß jede mechaniſche Kraft, es ſey Druck oder Zug, ſich mit einem Gewicht vergleichen laſſe, das ſich ſelbſt überlaſſen, eben ſo ſtark unterwärts drücken oder ziehen würde. Dieſen Gründen gemäß lehrt Huygen, wie man, wenn die Geſchwindigkeit der umlaufenden Kugel und die Länge des Fadens bekannt iſt, durch Rechnung die Gröſſe eines Gewichts finden könne, das, wenn es am Faden lothrecht und ruhig herab hinge, den Faden eben ſo ſtark dehnen würde, als ihn die umlaufende nicht ſchwere Kugel wegen ihrer Trägheit dehnen müſte. Unter andern hieher gehörigen Lehrſätzen iſt es vornehmlich der folgende, wovon Polhem, und alle die ihm darin folgen, eine ganz fehlſame Anwendung macht.

Wenn die Zeit, worin die träge nicht ſchwere Kugel einmal im Kreiſe umläuft, doppelt ſo groß iſt, als die Zeit, worin ein ſchweres Pendel, das eben ſo lang als der Faden iſt, ſich wegen ſeines Gewichts einmal

mal hin und her ſchwingt; ſo iſt die Flieh- oder Dehnkraft der umlaufenden Kugel gerade ſo groß, als wenn eine ſchwere Maſſe, die mit der umlaufenden Kugel aus gleichvielen körperlichen Theilchen beſtünde, am Faden lothrecht und ruhig herab hinge. (Anfangsgr. 2. B. 91. §. Mech.)

62. Die Erfahrung hat gelehret, daß ein Pendel zu jeder Schwingung eine Secunde Zeit braucht, wenn es 3 Fuß und zwey Drittel Zoll Pariſer Maaß lang iſt, oder 440 Linien, 12 Linien auf einen Zoll gerechnet: überdem lehrt die Theorie, daß ein 4mal längeres oder kürzeres Pendel 2mal längere oder kürzere Zeit zu einer Schwingung nöthig hat, und daß überhaupt die Schwingungszeiten ſich wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel verhalten. Dies mit Huygens Satz verglichen giebt die Folge: wenn eine bloß träge nicht ſchwere kleine Kugel an einem 3 Fuß 2 Drittel Zoll langen Faden ſo ſchnell im Kreiſe umläuft, daß die ganze Umlaufszeit zwey Secunden beträgt; ſo wird der Faden eben ſo ſtark gedehnt, als wenn an demſelben ein ſchwerer Körper herab hinge, der eben ſo viel Maſſe hätte, als jene bloß träge im Kreiſe umlaufende Kugel. (M. ſ. die Anfangsgründe, 2. Band, 93. §. Mechanik.)

63. Huygens Lehrſatz wird von Herrn Polhem in folgenden Ausdrücken angeführt: „Nach Huygens Erweiſe geht ein Perpendikel, das ſich in die Runde ſchwingt, ſo ſchnell, als ſich ein Perpendikel von gleichem Diameter hin und her ſchwingt.„ Ferner wird daraus weiter ſo geſchloſſen: „woraus

folget,

folget, daß ein Perpendikel, deſſen Länge ein Schwungrad haben ſoll, vier Schläge vorwärts und zurücke thut, wenn das Schwungrad in einer Secunde umlaufen ſoll. Die Eigenſchaften des Perpendikels und Schwungrades werden hier äuſſerſt flüchtig und fehlſam durch einander geworfen, und ein Perpendikel, das ſich wie ein Schwungrad gleichförmig in die Runde ſchwingt, iſt ein mechaniſches Unding. Herr Büſch hat ohne Zweifel ſelbſt gemerkt, daß Polhems Vortrag zu unvollkommen ſey, er ſagt es im 54 § der Mechanik auf der 147 S. der zweyten Abtheilung der erſten Ausgabe, und auf der 359. S. der zweyten Ausgabe ſeiner Mathematik: bey dem allen aber ſind ſeine Vorſchriften für die Anordnung der Schwungräder mit Polhems Vorſchriften einerley. Auf der 253. Seite der zweyten Abtheilung der erſten Ausgabe im 88 § der Mechanik ſteht der aus dem Polhem angeführte Satz ſo ausgedrückt:

„Wenn ein Körper in die Runde mit einer Kraft geſchwungen wird, die ſeiner Schwerkraft gleich iſt, ſo komme derſelbe in eben der Zeit herum, in welcher ein Pendel von eben der Länge zween Schläge mache.„

Man ſieht wohl, daß dies der oben aus dem Huygen von mir angeführte Lehrſatz ſeyn ſoll: allein man ſieht eben ſo leicht, daß Herr Büſch, durch Polhem verleitet, ihn übel verſtanden habe. Auf Erinnern eines Freundes hat Herr Büſch in der zweyten Ausgabe ſeiner Mathematik dieſen Satz

aus dem 88. §. der Mechanik zwar weggelaſſen, allein alle Folgen beybehalten, die er in der erſten Ausgabe darauf gebauet hatte. Herr Büſch iſt noch immer der Meynung, daß unter allen Schwungbewegungen, die man einem Körper mittheilen kann, eine diejenige ſey, welche der Körper am willigſten, und mit dem geringſten Aufwand der Kräfte annehme. Die von Polhem vorausgeſetzte übereinſtimmige Natur umlaufender Räder und ſchwerer Pendel verleitet ihn zu ſchlieſſen: weil jedes Pendel, das man aus der lothrechten Lage gebracht hat, von ſelbſt eine gewiſſe beſtimmte Geſchwindigkeit erlangt, indem es die unterſte Stelle des durchlaufenen Bogens erreicht; und weil man ihm entweder mehr nachhelfen, oder es gefliſſentlich verzögern muß, wenn es mehr oder weniger Geſchwindigkeit erlangen ſoll; ſo ſey es mit einem umlaufenden Rade eben ſo bewandt. Eine gewiſſe dieſem Rade bey dem Halbmeſſer von dieſer beſtimmten Länge angemeſſene Geſchwindigkeit ſey dem Rade gleichſam natürlich, es nehme dieſe Geſchwindigkeit am willigſten an, und beharre darin ohne beträchtlichen Zuſatz neuer Kräfte.

64. Herr N. Schmidt a. a. O. des Hannöveriſchen Magazins folgt dem Herrn Büſch in allen Stücken; auf der 1135. Seite im 71ſten Stück des Magazins vom Jahr 1776 ſteht der vorhin aus der erſten Ausgabe von Herrn Büſchens Mathematik angeführte ganz fehlſame und übel verſtandene Satz mit eben den Worten, wie ihn Herr Büſch damals ausgedrückt hatte. Ein geſchwungener

Körper

Körper iſt nach Herr Schmid ein Pendel, das durchgehends ſchwer iſt, u. ſ. w. oder nach einer andern Stelle (1133. S.) die Anwendung des Penduls iſt das Schwungrad, in welcher Form es auch erſcheint. Herr Büſch hat ſeine Mechanik vornehmlich zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens geſchrieben, und er verſpricht viel im 69. §, wenn er ſagt, er wolle keine ihm entſtehende practiſche Anmerkung aus der Acht laſſen, welche Perſonen, die auf ihre Gefahr und Koſten Maſchinen anlegen, vortheilhaft ſeyn, und ſie für ſchädliche Irthümer, für welche ſonſt kein Handbuch der Mechanik warnt, ſicher ſtellen könne. Ich meyne doch Handbücher zu kennen, welche für alle die ſchädlichen Irrthümer auch warnen, für die Herr Büſch mit Grunde warnet: ich meyne aber auch in eben dieſen Handbüchern weit richtigere und durch die Erfahrung weit mehr bewährte Regeln gefunden zu haben, nach welchen Maſchinen angeordnet werden müſſen, bey welchen die Hauptſache auf Umlaufsbewegungen ankommt. Das oben ſchon angeführte vom Herrn Profeſſor Mönnich vor kurzen herausgegebene ſehr ſchöne Handbuch rechne ich vorzüglich hieher, und ich zweifle nicht, daß der in der höhern Mathematik ſonſt ſehr geübte Herr Verfaſſer in der zweyten Abtheilung die Unrichtigkeit der Polhemſchen Angaben völlig anerkennen werde. Ich würde den Maſchinen-Bauverſtändigen bedauren, der nach Polhems Grundſätzen nur eine gemeine Kornmühle bauen, und alles dahin anordnen wollte, daß alle Räder, und beſonders der umlaufende Mühlſtein, ſo wie

zugleich auch das groſſe Waſſerrad ſchlechterdings mit ihrer vermeinten natürlichen Geſchwindigkeit umlaufen ſollten; er wäre gewiß in Gefahr, die ſchlechteſte Mühle von der Welt zu Wege zu bringen. Alle Verwirrung der Begriffe, die Polhem unter einander wirft, zu heben, erlaubt meine Abſicht jetzt nicht: ich werde indeſſen das nothwendigſte und gemeinfaßlichſte noch anführen, und das um deßwillen, weil das, was in einem ſo beliebt gewordenen Buch ſteht, wie Herrn Büſchens Mathematik iſt, was in dem allgemein beliebten Hanöverſchen Magazin ſteht, und was ein Mann von ſo bekannten Einſichten, wie Herr Mönnich, ebenfalls zur Regel macht, leicht unvorſichtige Nachahmer finden könnte.

65. Das Schwungrad und deſſen Umlaufsbewegung hat mit dem Pendel und deſſen Schwingungsbewegung nichts gemein. Das Schwungrad iſt in ſeinem Schwerpunct unterſtützt, dieſer liegt allemal in der Umlaufsaxe, und deswegen iſt es eben ſo viel, als wenn die Maſſe des Schwungrades bloß träge, nicht ſchwer wäre. Das Gewicht des Schwungrades kommt nur in ſo fern in Betrachtung, in wie weit davon das Hinderniß der Bewegung abhängt, welches das Reiben zwiſchen den Zapfen an der Axe und den Zapfenlagern verurſacht. Dem Schwungrade ſelbſt iſt jede Umlaufsbewegung gleichgültig, und wenn es diejenige Geſchwindigkeit erlangt hat, worin es vermöge der Structur der damit verbundenen Maſchine durch die angebrachte Kraft verſetzt werden kann, ſo be-

harret

harret es vermöge der Trägheit ſeiner Maſſe darin, ohne daß weiter ein Zuſatz mechaniſcher Kräfte nöthig iſt. Freylich nimmt die Umlaufsgeſchwindigkeit bald ſchneller bald langſamer ab, nachdem es mit der übrigen Maſchine bald ſo, bald anders verbunden iſt, auch trägt die ſchon erwehnte Friction nebſt dem Widerſtande der Luft das ihrige dazu bey. Dieſe Hinderniſſe aber beyſeit geſetzt, würde das Schwungrad ohne Aufhören mit der einmal erlangten Geſchwindigkeit unverändert ſeinen Umlauf fortſetzen. Gerade dieſe Eigenſchaft, keine andere, iſt der Grund ſeines vortheilhaften Gebrauchs bey Maſchinen, die ohne Schwungrad ruckweiſe bald ſchneller, bald langſamer laufen würden. Der Maſchinen-bauverſtändige Leſer erinnere ſich an Pumpenkünſte, die vermittelſt der Krumzapfen ihre Wirkung thun, an Säge- Lohe- und Stampfmühlen. Es giebt beym jedesmaligen Umlauf der Krumzapfen eine gewiſſe Lage derſelben, wobey der Widerſtand, womit ſich die Maſchine der würkenden Kraft entgegen ſetzt, am gröſten iſt, und eine andre Lage derſelben, wobey dieſer Widerſtand am kleinſten iſt. Bey jener Lage der Krumzapfen nimmt die Schnelligkeit der Maſchine ab, bey dieſer wieder zu. Wenn ein Daumen an der Welle einer Stampfmühle den drauf liegenden Zapfen eines Stämpfers fallen läßt, ſo fällt ein Theil des bisherigen Widerſtandes der Umlaufsbewegung weg: und wenn nicht in eben dem Augenblick dagegen ein andrer Daumen einen andern Stämpfer angreift, ſo wird der Umlauf der Welle ſchneller als zuvor. Iſt mit der Maſchine ein Schwungrad verbunden;

ſo kann die Kraft, welche die Maſchine treibt, bey mindern Widerſtande, die Maſchine nicht beſchleunigen, ohne zugleich das Schwungrad in ſchnellern Umlauf zu bringen. Hiezu aber gehört etwas Zeit, und ehe noch ſoviel Zeit verfloſſen iſt, als zur beträchtlichen Beſchleunigung des Schwungrades nöthig wäre, nimmt der Widerſtand der Maſchine wieder zu: mithin bleibt der Umlauf des Schwungrades, und mit demſelben der Umlauf aller übrigen Theile der Maſchine beynahe eben ſo ſchnell, als in dem Fall, da der Widerſtand, welchen die Maſchine der angebrachten Kraft entgegen ſetzte, am größten war. Darin beſteht der wahre Nutzen der Schwungräder. In andern Fällen will man haben, daß die Geſchwindigkeit, womit die Theile einer Maſchine umlaufen, nicht über eine gewiſſe Gränze wachſen ſoll, wenn ſonſt vermöge der Natur der angebrachten Kraft die Beſchleunigung beſtändig zunehmen würde. Das iſt der Fall, wenn die Maſchine durch Gewichte bewegt wird, wie die Schlagwerke an groſſen Thurm-Uhren, auch die Bratenwender in der Küche. Statt des Schwungrades oder der Schwungſcheibe, worauf der Widerſtand der Luft keine ſehr beträchtliche Wirkung hat, nimmt man nun breite Schwungflügel, welchen die Luft deſto mehr widerſtehet, je gröſſer ihre Fläche, und je ſchneller ihr Umlauf iſt. Mit der wachſenden Schnelligkeit nimmt der Widerſtand der Luft immer mehr zu, und es kommt bald dahin, daß dieſer Widerſtand der Luft ſich mit dem Zuge des an der Hauptwelle hangenden Gewichts ins Gleichgewicht ſetzt. Eben darum muß nun alle Beſchleunigung

der

der Maſchine aufhören, ſie muß vielmehr von nun an, mit unveränderter Geſchwindigkeit ihren Umlauf fortſetzen, und das iſt es, was man haben wollte.

66. Ein Schwungrad, deſſen Schwerpunct in der Umlaufsaxe liegt, hat keinen Schwingungspunct (centrum oſcillationis) in dem Verſtande, wie man in der Mechanik für das zuſammengeſetzte Pendel einen Schwingungspunct annimmt: auch gehört das gar nicht hieher, was ſonſt wol die höhere Mechanik vom Mittelpunct der Umlaufsbewegung (centro gyrationis) lehrt, wenn mechaniſche Kräfte den Umlauf eines feſten Körpers um eine gewiſſe Axe beſchleunigen. Alſo kann die vortheilhafteſte Umlaufsgeſchwindigkeit des Rades nicht von der Entfernung dieſes vermeinten Schwingungspunctes von der Axe des Rades abhängen, wie Polhem, und nach ihm die Herren Büſch, Schmid, und wie es ſcheint, auch Hr. Mönnich dafür halten. Zugegeben, daß man den umlaufenden Mühlſtein bey einer gemeinen Kornmühle als ein Schwungrad betrachten könne; ſo hat doch das Pendel und ſein Schwingungspunct mit dem Mühlſtein nichts gemein. Selbſt das groſſe Waſſerrad ſey als ein Schwungrad zu betrachten, und die Flügel einer Windmühle als Schwungflügel; ſo gehört doch nichts von allem dem hieher, was die Mechanik von der Länge eines Pendels lehrt, die es haben muß, wenn es ſeine Schwingungen in gegebener Zeit endigen ſoll. Man darf es alſo nicht mit Herrn Büſch für einen Fehler der gemeinen Kornmühlen halten, wenn ihre 16 bis 18 Fuß hohe Waſſerräder nur

neun bis zehnmal in einer Minute umlaufen, und nicht zwanzigmal, wie Herr Büſch meynt, daß ſie umlaufen müſten, um als ein Schwungrad am vortheilhafteſten zu wirken. Man wird nicht allein aus meinen Anfangsgründen, und Lehrbegriffe, ſondern auch ſchon aus dieſem kurzen Auszuge lernen können, daß die Mechanik ganz andre Gründe hat, woraus man ſchlieſſen muß, wenn man finden will, wie ſchnell ein Waſſerrad umlaufen müſſe, wenn es die möglichſt gröſte Wirkung leiſten ſoll: man muß es von Herrn **Parent**, nicht von Herrn **Polhem** lernen.

Anfangsgründe der Artillerie-Wiſſenſchaft.

Die 1. Erklärung.

1. Die Artillerie-Wiſſenſchaft, ſoweit ſie mathematiſch iſt, lehrt, wie nicht allein die Wirkung des entzündeten Schießpulvers auf die Geſchützkugeln berechnet, ſondern auch die Bahn der letztern nach ihrer Geſtalt und Gröſſe verzeichnet und ausgemeſſen werden könne. Vom Schießpulver weiß man, daß es aus einer Vermiſchung von Salpeter, Schwefel und Kohlen zuwege gebracht werde.

Zuſatz.

2. Salpeter, Schwefel und Kohlen müſſen gehörig gereiniget, pulveriſiret, und geſiebet werden: hiernächſt nimmt man 1 Theil Schwefel, und 1 Theil Kohlen, gegen 6 Theile Salpeter. Dieſe Maſſe muß 24 bis 30 Stunden wohl unter einander geſtampft, auch etwa alle vier Stunden etwas Waſſer darunter gegoſſen und auf die Art zum Körnen zubereitet werden. Im groſſen geſchicht das in den Pulvermühlen.

Die 2. Erklärung.

3. Man unterſcheidet das grobe oder ſchwere Geſchütz von dem kleinen Gewehr, und es iſt bekannt, daß das ſchwere Geſchütz deßwegen ſo heiſſe, weil es wegen ſeiner Gröſſe und Schwere eigene Unterſtützungen nöthig hat, darauf es nicht allein beym Gebrauch feſte liegen, ſondern auch bequem fortgebracht werden kann. Kanonen oder Stücke ſollen dazu dienen, metallene oder ſteinerne Kugeln auf eine anſehnliche Strecke durch die Gewalt des entzündeten Pulvers vornehmlich in horizontaler Richtung fortzutreiben, ohne daß ihre Bahn beträchtlich von der graden Linie abweicht. Aus Mörſern, die auch Böller heiſſen, wirft man die ſo genannten Bomben, auch wohl ſteinerne Kugeln, nach einer gegen den Horizont geneigten Richtung. Dieſe Bomben ſind hohle mit Pulver gefüllte gewöhnlich eiſerne Kugeln, mit der Einrichtung, daß eine ſo genannte Brandröhre damit verbunden, und mit einer Maſſe gefüllt wird, die ſo lange fortbrennt, ohne das trockene Pulver zu entzünden, als die Bombe das Ziel, wo ſie niederfallen ſoll, noch nicht erreicht hat.

Die 3. Erklärung.

4. Die innere Höhlung des Geſchützes, welche wegen der Figur der Kugeln cylindriſch ſeyn muß, heißt der Lauf, beym groben Geſchütz die Seele, der Raum, welcher mit Pulver gefüllt wird, die Kammer. Die Mündung iſt die vordere kreisförmige Oefnung des Laufs, ihr Durchmeſſer heißt

der

der Kaliber des Stücks, der Durchmeſſer der Kugel heißt ebenfalls ihr Kaliber, und durch den Spielraum verſteht man den Ueberſchuß vom Kaliber des Stückes über den Kaliber der Kugel.

Die 4. Erklärung.

5. Der Kaliberſtab iſt ein Maaßſtab, worauf die Gröſſe der Durchmeſſer der ſteinernen, eiſernen und bleyernen Kugeln nach ihrem Gewichte verzeichnet iſt.

Die 1 Aufgabe.

6. **Aus dem Gewicht einer Kugel und dem eigenthümlichen Gewicht der Maſſe, woraus ſie verfertiget iſt, ihren Kaliber zu finden.**

Aufl. Aus dem Gewicht der Kugel, und dem eigenthümlichen Gewicht ihrer Maſſe findet man ihre Gröſſe im Cubicmaaß, (13. §. Stat.) und daraus ferner ihren Kaliber dem 336. §. Geomet. gemäß. Wenn nemlich der körperliche Inhalt der Kugel im Cubicmaaß $= S$, ihr Durchmeſſer $= d$ geſetzt wird; ſo iſt $S = \frac{1}{6}\pi d^3$, mithin $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} . 6S}$.

Die 2. Aufgabe.

7. **Einen Kaliberſtab zu verfertigen.**

Aufl. Wenn d den Kaliber der Kugel bezeichnet, ſo iſt ihr Inhalt $= \frac{1}{6}\pi d^3$. (336. §. Geom.)

Wenn

Wenn ferner G das Gewicht eines Cubiczolles ihrer Maſſe bezeichnet, ſo iſt ihr Gewicht $= \frac{1}{6} G . \pi d^3$, da dann d in Zollen ausgedrückt wird. Dies Gewicht ſey $= P$, ſo iſt $P = \frac{1}{6} G . \pi d^3$, alſo $d^3 = \frac{6}{\pi} . \frac{P}{G}$, und $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} . \frac{P}{G}}$, oder $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} . \frac{6P}{G}}$, und man hat $\frac{1}{\pi} = 0,31831$. (234. §. Geom.)

Nachdem nun das Gewicht P der Kugel in Pfunden oder Lothen ausgedrückt iſt, ſo muß man auch G in Pfunden oder Lothen ausdrücken: alsdenn iſt der Kaliber der 1 pfündigen oder 1 löthigen Kugel $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} . \frac{6}{G}}$. Wenn dieſer gefunden iſt, ſo multiplicirt man ihn nur mit den Cubiczahlen aus 2, 3, 4, 5, u. ſ. w. nach der Ordnung, um den Kaliber der Kugel zu finden, die 2, 3, 4, 5 Pfunde, oder auch ſoviele Loth wiegt: denn es iſt auch $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} . \frac{6}{G}} . \sqrt[3]{P}$.

Der 1. Zuſatz.

7. Wird der Kaliber der 1 pfündigen, oder 1 löthigen Kugel für Eins angenommen; ſo geben die Cubicwurzeln aus den Zahlen 2, 3, 4, 5, wie ſie in der Ordnung folgen, wenn man ſie ein für allemahl in Decimaltheilen berechnet, die Kaliber

der der Kugeln von ſovielen Pfunden oder Lothen, als die Cubiczahl anzeigt. Daraus erſiehet man den Nutzen der nachſtehenden Tafel, welche die practiſchen Schriftſteller gewöhnlich mittheilen.

Gewicht der Kugel	Kaliber	Gewicht der Kugel	Kaliber	Gewicht der Kugel	Kaliber
1	1,000	21	2,759	41	3,448
2	1,259	22	2,802	42	3,476
3	1,442	23	2,844	43	3,503
4	1,587	24	2,884	44	3,530
5	1,707	25	2,924	45	3,557
6	1,817	26	2,962	46	3,583
7	1,913	27	3,000	47	3,609
8	2,000	28	3,036	48	3,634
9	2,080	29	3,072	49	3,659
10	2,154	30	3,107	50	3,684
11	2,224	31	3,141	51	3,708
12	2,289	32	3,175	52	3,732
13	2,351	33	3,207	53	3,756
14	2,410	34	3,240	54	3,780
15	2,466	35	3,271	55	3,803
16	2,519	36	3,302	56	3,826
17	2,571	37	3,332	57	3,848
18	2,620	38	3,362	58	3,871
19	2,668	39	3,391	59	3,893
20	2,714	40	3,420	60	3,915

Die Zahlen in der zweyten Columne, unter der Aufſchrift: Kaliber, ſind nichts anders, als die Cubicwurzeln aus den in der erſten Columne voran ſtehenden Zahlen, welche das Gewicht der Kugel in

in Pfunden oder Lothen angeben. Dieſemnach kommt bey der Verfertigung des Kaliberſtabes alles darauf an, daß man wiſſe, wie groß der Durchmeſſer einer eiſernen, bleyernen, oder ſteinernen Kugel ſey, wenn ſie 1 Pfund, oder 1 Loth wiegt: die Länge von den übrigen giebt die voranſtehende Tabelle in Tauſendtheilen jenes Durchmeſſers oder Kalibers unmittelbar an.

Der 2. Zuſatz.

8. Nach Herrn von Wolffens Verſuchen, (Nützl. Verſuche I. Theil. 7. §.) wiegt 1 Rheinl. Decimal-Cubiczoll Waſſer 495 Gran im deutſchen Apotheker-Gewicht, alſo der Rheinl. Duod. Cub. Zoll Waſſer 286½ Gran, oder genauer 286,46 Gr. Verſuche, die ich ſelbſt mehrmahls angeſtellet habe, kommen hiemit beſſer, als mit andern Beſtimmungen überein. Das deutſche Apotheker-Pfund von 12 Unzen wiegt 7452 Troyſche Aß, und das franzöſiſche, ebenfalls von 12 Unzen, wiegt 7641 Aß: (M. ſ. die Anfangsgründe, 1 Band, 258. §. Rech. 330 S.) alſo die deutſche Unze zur Pariſer = 7452 : 7641 = 276 : 283, und 16 ſolcher Pariſer Unzen ſind einerley mit einem Pfunde Pariſer Markgewicht. Man findet alſo den Rheinl. Duod. Cub. Zoll Waſſer 279,37 Pariſer Gran ſchwer. Das Pariſer Längenmaaß beträgt 1,035003 des Rheinländiſchen, (Anfangsgründe, 1. Band, 252. §. Rechenk. 322 S.) alſo das Pariſer Cubicmaaß 1,108727 des Rheinländiſchen Cubicmaaſſes: demnach wiegt 1 Duodec. Cubiczoll Waſſer 315¾ Gran im Pariſer Maaß und Gewicht,

wicht, 480 Gran auf die Unze gerechnet, wie es bey mediciniſchen Gewicht üblich iſt. Wenn nun Eiſen 7,645 mahl, und Bley 11,31 mahl ſchwerer als Waſſer iſt, (15. §. Stat.) ſo wiegt 1 Cubiczoll Eiſen 2214 Gran, oder 5 Unzen 14 Gran, und 1 Cubiczoll Bley 3571 Gran, oder 7 Unzen 211 Gran im Pariſer Maaß und Gewicht.

Der 3. Zuſatz.

9. Weil man G in Pfunden oder Theilen eines Pfundes ausdrücken muß, wenn man den Kaliber der 1pfündigen Kugel ſucht, und weil 7680 Gran ein Pfund von 16 Unzen ausmachen; ſo hat man $G = \frac{2214}{7680} = \frac{369}{1280}$ Pfund für die eiſerne Kugel, und man findet $\frac{6}{G} = \frac{7680}{369} =$ 20,813008: alſo $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G} = 6,624988$, und man erhält $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G}} = 1,896$ Pariſer Zoll, oder 1 Zoll $10\frac{3}{4}$ Linien für den Kaliber der einpfündigen eiſernen Kugel. Bey Anwendung eben dieſer Rechnung auf die bleyerne Kugel erhält man $G = \frac{3571}{7680}$, alſo $\frac{6}{G} = 12,905628$, $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G} = 4,107990$, und $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G}}$ $= 1,6$ Zoll, oder 1 Zoll 7,2 Linien.

Der

Der 4. Zuſatz.

10. Man multiplicire die Zahl 1,896 Pariſer Zoll mit $\sqrt[3]{4} = 1,587$, ſo findet man 3,008 Zoll, oder faſt grade 3 Zoll für den Kaliber der 1 pfündigen eiſernen Kugel, ſo wie es gewöhnlich angenommen wird. Man könnte dieſe oder eine andre ähnliche Beſtimmung, wenn man Kaliber und Gewicht einer Kugel aus der Erfahrung zu beſtimmen ſuchte, bey der ganzen Rechnung zum Grunde ſetzen, und mit Hülfe der im 7 §. mitgetheilten Tafel auch den Kaliber der 1 pfündigen Kugel ſuchen. Die Kaliber ſolcher Kugeln, die aus einerley Maſſe beſtehen, verhalten ſich wie die Cubicwurzeln aus den Zahlen, die ihre Gewichte angeben, mithin verhält ſich der Kaliber der 4 pfündigen Kugel : Kaliber der 1 pfündigen Kugel $= \sqrt[3]{4} : 1 = 1,587 : 1$. Hätte man alſo den Kaliber der eiſernen 4 pfündigen Kugel 3 Zoll groß gefunden; ſo würde man anſetzen

1,587 : 1 = 3 Zoll : Kalib. d. 1 pf. Kugel,

und man fände 1,89 Zoll, oder 1 Zoll 10,68 Lin. So kann man dergleichen Tafeln ſelbſt prüfen, wie ſie die practiſchen Schriftſteller mittheilen. M. ſehe Bions Mathem. Werkſchule V. Buch IV. Cap. 201 S. Anfangsgründe der Artillerie von Struenſee, II. Theil. I. Hauptſt. 66 §. 73 S.

Der 5. Zuſatz.

11. Die deutſchen Feuerwerker brauchen gewöhnlich Nürnberger Maaß und Gewicht, und nach

nach H. Struenſee (Anfangsgründe der Artillerie II. Theil. I. Hauptſt. 66. §.) ſollen 95 franzöſiſche Pfunde 100 Pfund in Nürnberg ausmachen: das kommt aber mit andern ſonſt bekannten Vergleichungen nicht überein. Eiſenſchmidt (de Porderibus et menſuris Argentor. 1737.) hat ſelbſt die Unze des Nürnberger Gewichts, wovon er a. a. O. pag. 3. ſagt, daß es von den deutſchen Artilleriſten gebraucht werde, $599\frac{5}{8}$ ſolcher Gran ſchwer befunden, wovon 576 eine Pariſer Unze ausmachen: alſo verhält ſich das Nürnb. Gew. : Pariſ. Gew. $= 4797 : 4608 = 533 : 512$. Das Nürnberger Fußmaaß hält 134,7 Pariſer Linien, wovon 144 einen Pariſer Fuß ausmachen. Wenn alſo der Kaliberſtab auf Nürnberger Maaß und Gewicht eingerichtet werden ſoll, ſo kommt es nur darauf an, daß man das Gewicht eines Cubicfuſſes des Eiſens, des Bleyes, oder der Steinmaſſe, welches im 7 §. $= G$ geſetzt war, in dem Nürnberger Maaß und Gewicht ausdrücke.

Der 6. Zuſatz.

12. Man kann aber auch die nach dem Pariſer Maaß und Gewicht ſchon berechneten Zahlen auf das Nürnberger ſo reduciren:

4 Pf. Par. thun $\frac{512}{533} \cdot 4 = 3{,}842$ Pf. Nürnb.

3 Zoll Par. thun $\frac{1440}{1347} \cdot 3 = 3{,}207$ Zoll Nürnb.

Eine Kugel 4 Par. Pfund ſchwer hat 3 Par. Zoll

Kaliber; alſo eine Kugel 3,842 Nürnb. Pfund ſchwer hat 3,207 Nürnb. Zoll Kaliber: mithin ferner

$\sqrt[3]{3,842}$ Pf. : 1 = 3,207 Zoll : Kalib. d. Kugel von 1 Nürnb. Pf.

Man findet aber $\sqrt[3]{3,842} = 1,566$, alſo der Kalib. der Kugel von 1 Nürnb. Pfund $= \frac{3,207}{1,566}$ = 2,047 Zoll, oder 2 Zoll 0,56 Lin.

Der 7. Zuſatz.

13. Der Spielraum iſt nöthig, damit die Kugel, ohne ſich am innern Umfange der Kanone zu reiben, durch die Gewalt des entzündeten Pulvers frey zur Mündung heraus getrieben werden könne: er muß aber auch nicht zu groß ſeyn, weil ſonſt ein Theil von der Gewalt des Pulvers nicht auf die Kugel wirken kann. Gewöhnlich wird der Kaliber des Stücks auf folgende Art beſtimmt. Man ſuche die Sehne des Bogens von 150 Graden in einem Cirkel, deſſen Durchmeſſer ſo groß iſt, als der Kaliber der Kugel. Die Länge dieſer Sehne ziehe man vom Durchmeſſer ab, und addire den Ueberſchuß zum Kaliber der Kugel, ſo hat man den Kaliber des Stückes. Die Sehne von 150° iſt der doppelte Sinus von 75°, und dieſer Sinus iſt 0,9659258 beynahe = 0,966 für den Halbmeſſer = 1; alſo die Sehne des Bogens von 150° = 1,932. Wird dagegen der Durchmeſſer = 1 geſetzt, ſo iſt die erwehnte Sehne = 0,966, und der Ueber-

Ueberſchuß des Durchmeſſers = 0,034: mithin würde ſich verhalten müſſen der Kaliber der Kugel zum Kaliber des Stücks, wie 1000 : 1034.

Erfahrungsſätze.

14. Wenn von einer gewiſſen Menge Schießpulver auch nur ein Körnchen angezündet wird; ſo verbreitet ſich die Flamme mit einer ungemeinen Schnelligkeit durch alle über und neben einander liegende Körner: durch die Verbrennung aber wird eine elaſtiſche flüßige Maſſe hervorgebracht, welche die gröſte Aehnlichkeit mit der Luft hat, und ſich auch alsdenn, wenn die Entzündung in freyer Luft geſchicht, mit der gröſten Gewalt nach allen Seiten ausbreitet. Alles erfolgt eben ſo, als wenn das Pulver in ſeinen Beſtandtheilen eine ungemein ſtark zuſammen gepreßte Luft enthielte, die beym Verbrennen des Pulvers hervorbricht, und deren Ausdehnungskraft durch die Hitze noch vergröſſert wird.

Zuſatz.

15. Indem die Luft, welche bey der Entzündung des Pulvers erzeugt wird, die Kugel im Lauf oder der Seele des Geſchützes vor ſich her treibt, drückt ſie ſo lange von der hintern Seite gegen die Kugel, als dieſe noch nicht die Mündung des Stücks erreicht hat. Dieſer Druck wird zwar zum Theil durch den Gegendruck der Atmoſphäre von auſſen gehoben, dem die vordere Seite der Kugel ausgeſetzt iſt: allein jener Druck übertrift dieſen gar ſehr, und die Kugel wird ſo lange in ihrer Bewegung un-

unterbrochen, obgleich nach und nach, ſo wie ſich hinter ihr die Luft in einen gröſſern Raum ausbreitet, immer etwas ſchwächer beſchleuniget, bis ſie die Mündung des Geſchützes erreicht hat. In dem Augenblick, da ſie zur Mündung heraus fährt, hört die fernere Beſchleunigung auf, weil die aus dem Pulver erzeugte Luft ſich nun nach allen Seiten ausbreiten kann. Es iſt möglich, aus Gründen der Theorie mit Erfahrungen verbunden, dieſe der Kugel mitgetheilte Geſchwindigkeit durch Rechnung zu finden, wenn die Gröſſe der Pulverladung, das Gewicht der Kugel, und die Abmeſſungen des Geſchützes gegeben ſind: allein die Unterſuchung darüber läßt ſich hier nicht anſtellen. Man findet die allgemeinen Gründe dieſer Theorie im VIſten Theil des Lehrbegriffes, im VIII. Abſchn. der Pneumatik, 564 u. f. S.

Die 2. Aufgabe.

161 Fig. 16. Es ſey in *A* die Stelle, woſelbſt ein Geſchütz abgefeuert wird, deſſen Axe gegen den Horizont unter dem Winkel *CAB* geneigt iſt; die Geſchwindigkeit, womit die Kugel zur Mündung heraus fährt, ſey gegeben: man ſoll die Stelle *M* finden, woſelbſt ſich die Kugel nach Verlauf einer gegebenen Zeit in ihrer Bahn befinden würde, wenn ſie ihre Bewegung völlig frey fortſetzen könnte, ohne daß der Widerſtand der Luft ſie verzögerte.

Aufl. Wenn AB die Richtung der Axe des Geſchützes vorſtellet, und CAB ihr Neigungswinkel gegen

gegen den Horizont iſt; ſo iſt AC horizontal, und die Ebene CAB vertical. (266. §. Geom.) In eben dieſer Ebene liegt auch die lothrechte grade Linie AD. Man ſetze die Geſchwindigkeit $= h$, womit die Kugel zur Mündung des Geſchützes in der Richtung AB heraus fährt, und den Winkel CAB $= \alpha$. Ferner nehme man AB $= h$, und ziehe BD horizontal, BC lothrecht; ſo iſt AC $= h \cos\alpha$, AD $= h \sin\alpha$, wenn der Halbmeſſer $= 1$ geſetzt wird. (28. §. Trig.) Wenn nun die Bewegung der Kugel auch nicht von der Schwere Veränderungen litte, ſo würde ſie in der erſten Secunde den Weg AB mit gleichförmiger Bewegung durchlaufen; ſie würde ſich alſo in eben dieſer Zeit von der Stelle A in horizontaler Richtung um den Weg AC entfernen, und zugleich um die lothrechte Höhe CB $=$ AD ſteigen. Demnach iſt AC $= h \cos\alpha$ ihre horizontale, und AD $= h \sin\alpha$ ihre verticale Geſchwindigkeit. Nur dieſe letztere wird von der Schwere verzögert, jene aber, die horizontale Geſchwindigkeit, bleibt nach dem Geſetze der Trägheit unverändert. Demnach hat die Kugel nach Verlauf der Zeit t in horizontaler Richtung den Weg $ht \cos\alpha$ zurück gelegt, (7. §. Hydraul.) in verticaler Richtung aber, vermöge ihrer ſteigenden Bewegung, den Weg $ht \sin\alpha - gtt$. Man nehme alſo auf der Horizontallinie die Entfernung AP $= ht \cos\alpha$; man richte ferner aus P die lothrechte Linie PM auf, und nehme auf dieſer die Höhe PM $= ht \sin\alpha - gtt$: ſo iſt M die Stelle, wo ſich die Geſchützkugel am Ende der Zeit t befindet.

Der 1. Zuſatz.

17. Mit der lothrechten Geſchwindigkeit AD $= h \sin\alpha$ kann die Kugel bis zur Höhe $\frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$ ſteigen, (23. §. Hydraulik) und während dieſer ſteigenden Bewegung verfließt die Zeit $t = \surd\left(\frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g} : g\right) = \frac{h \sin\alpha}{2g}$. Eben ſo viele Zeit verfließt während des Falles von derſelben Höhe. Wenn demnach doppelt ſoviele Zeit, oder die Zeit $\frac{h \sin\alpha}{g}$ verfloſſen iſt; ſo muß die Kugel bis zur Horizontallinie AH wieder herabgefallen ſeyn.

Der 2. Zuſatz.

18. Man nehme nun AE $= ht \cos\alpha$, und zugleich $t = \frac{h \sin\alpha}{2g}$, ſo wird AE $= \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$. Aus E richte man die lothrechte Linie EG $= \frac{h^2 \sin\alpha^4}{4g}$ auf, ſo iſt G der höchſte Punct in der Bahn der Kugel. Man nehme ferner EH $=$ AE, ſo iſt H die Stelle, woſelbſt die Kugel in der Horizontallinie AE wieder niederfällt.

Die 5. Erklärung.

19. Man unterſcheidet den Bogenſchuß vom Kernſchuß: die erſte Richtung des Bogenſchuſſes macht

macht oberhalb der Horizontallinie mit dieſer einen ſchiefen Winkel, welcher der Elevationswinkel heißt; die Richtung des Kernſchuſſes aber iſt horizontal.

Der 1. Zuſatz.

20. Beym Kernſchuß kann die Kugel ſich nicht über der Horizontallinie AH erheben, ſie wird vielmehr unter dieſe Horizontallinie herab ſinken. In dem allgemeinen Ausdruck $PM = ht \sin\alpha - gtt$ iſt nun α und $\sin\alpha = 0$; alſo $PM = -gtt$, und das Zeichen (−) zeigt an, daß PM allemahl unter der Horizontallinie liege. Uebrigens bleibt $AP = ht \cos\alpha$, und $\cos\alpha = 1$; das giebt $t = \frac{AP}{h}$. Wird dieſer Werth ſtatt t gebraucht, ſo iſt $PM = \frac{g \cdot AP^2}{h^2}$, und man kann das Zeichen (−) nun auch weglaſſen, weil es ein für allemahl bekannt iſt, daß PM unter der Horizontallinie liegt. 163 Fig.

Der 2. Zuſatz.

21. Je gröſſer die erſte Geſchwindigkeit der Kugel iſt, deſto gröſſer iſt h, und PM deſto kleiner. Wenn alſo gleich beym Kernſchuß die Bahn der Kugel eigentlich ein Bogen iſt; ſo weicht ſie doch auf eine deſto gröſſere Weite ſehr wenig von der graden Linie ab, je gröſſer die erſte Geſchwindigkeit der Kugel iſt.

Die 3. Aufgabe.

22. **Die erſte Geſchwindigkeit der Kugel, und der Elevationswinkel des Geſchützes ſind gegeben: man ſoll die horizontale Schußweite finden.**

Aufl. Man multiplicire die Höhe, welche mit der erſten Geſchwindigkeit der Kugel zuſammen gehört, doppelt genommen mit dem Sinus des doppelten Elevationswinkels, der mit dem Halbmeſſer Eins zuſammen gehört Wenn nemlich die erſte Geſchwindigkeit der Kugel $= h$ geſetzt wird, ſo iſt die ihr zugehörige Höhe $= \frac{h^2}{4g}$. (20. §. Hydraul.) Wird ferner der Elevationswinkel $= \alpha$

161 Fig. geſetzt, ſo erhält man $AH = 2 . \frac{h^2}{4g} . \sin 2\alpha$ $= \frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}$.

162 Fig. Beweis. Um den Mittelpunct C beſchreibe man einen Kreis mit dem Halbmeſſer $CA = 1$, ſo iſt der Durchmeſſer $AE = 2$. Man mache den Winkel $ACD = \alpha$, und $ACB = 2\alpha$, ziehe die Sehnen AB, BE, und BF auf AE ſenkrecht: ſo iſt $AB = 2 \sin \alpha$, $BE = 2 \cos \alpha$, $BF = \sin 2\alpha$. (2. §. Trig.) Weiter ſind die rechtwinklichten Dreyecke ABE, EBF, einander ähnlich, (177. §. Geomet.) und man hat $AE : AB = BE : BF$, alſo $2 : 2 \sin \alpha = 2 \cos \alpha : \sin 2\alpha$; folglich iſt $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Es

Es war aber AE $= \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$, und AH $= 2$ AE: (18. §.) alſo iſt AH $= \frac{h^2 . 2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}$, oder AH $= \frac{h^2 . \sin 2\alpha}{2g}$.

Der 1. Zuſatz.

23. Wenn $\alpha = 45°$ iſt, ſo iſt $2\alpha = 90°$, und $\sin 2\alpha = 1$. Wird α noch gröſſer, ſo nimmt $\sin 2\alpha$ wieder ab: alſo iſt die Schußweite unter dem Elevationswinkel von 45° am gröſten. Sie iſt alsdenn $= \frac{h^2}{2g}$, mithin ſo groß, als die der erſten Geſchwindigkeit der Kugel zugehörigen Höhe doppelt genommen.

Der 2. Zuſatz.

24. Wenn $\alpha = 15°$ iſt, ſo wird $2\alpha = 30°$, und $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, alſo AH $= \frac{h^2}{4g}$, und das iſt die Höhe, welche mit der erſten Geſchwindigkeit der Kugel zuſammengehört.

Der 3. Zuſatz.

25. Würde die Bewegung der Kugel durch den Widerſtand der Luft nicht deſto mehr verzögert, je gröſſer die Geſchwindigkeit iſt, womit ſie ſich durch die Luft bewegt; ſo würde man durch einen Probe-

ſchuß unter einem bekannten Erhöhungswinkel, wenn man die horizontale Schußweite gemeſſen hätte, die anfängliche Geſchwindigkeit der Kugel finden können. Es iſt nemlich $h = \sqrt{} . \frac{2g \,.\, AH}{\sin 2\alpha}$, und für den Winkel $\alpha = 15°$ hätte man $h = 2\sqrt{g \,.\, AH}$. Demnach würde man am bequemſten den Erhöhungswinkel von 15° für den Probeſchuß wählen. Die gröſte Schußweite wäre alsdenn doppelt ſo groß, als die horizontale Weite des Probeſchuſſes, und die Schußweiten unter andern Erhöhungswinkeln würden ſich alsdenn wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel verhalten.

Der 4. Zuſatz.

26. Die horizontale Weite des Kernſchuſſes hängt von der lothrechten Höhe der Batterie, wo die Kanone ſteht, über der Horizontalfläche der Stelle ab, wo die Kugel niederfällt. Wenn CD dieſe Höhe iſt; ſo hat man $CD = \frac{g \,.\, AC^2}{h^2}$, (20 §.) alſo $AC^2 = \frac{h^2 \,.\, CD}{g}$, und $AC = h\sqrt{\frac{CD}{g}}$. Es iſt aber $\frac{h^2}{g}$ die vierfache Weite des Probeſchuſſes: alſo würde man dieſe mit der Höhe CD multipliciren, und aus dem Product die Quadratwurzel ziehen müſſen, um die Weite des Kernſchuſſes zu finden.

Der

Der 5. Zuſatz.

27. Die erſte Geſchwindigkeit der Kugel iſt ohne Zweifel viel gröſſer, als ſie dem 25. §. gemäß vermittelſt des Probeſchuſſes würde gefunden werden; denn die horizontale Schußweite würde im leeren Raum viel gröſſer ausfallen, als in der widerſtehenden Luft: alſo kann der Probeſchuß eigentlich nicht dienen, die erſte Geſchwindigkeit der Kugel zu finden. Wenn es indeſſen ſeine Richtigkeit hätte, wie Herr Belidor glaubt, es durch Erfahrungen gefunden zu haben, daß bey einerley Pulverladung, wenn ſonſt alles übrige einerley iſt, die horizontalen Schußweiten ſich ſo ziemlich richtig, wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel verhielten; ſo würden die bisher vorgetragenen Regeln, die Schußweiten durch Rechnung zu finden, in der Ausübung ſehr brauchbar ſeyn.

Anmerkung.

28. Die krumme Linie, worin Bomben und Kanonenkugeln ſich bewegen würden, wenn der Widerſtand der Luft darin keine beträchtliche Aenderung verurſachte, heißt in der höhern Geometrie die Parabel: das iſt der Grund, weßwegen man durch die paraboliſche Theorie von der Bahn der Geſchützkugeln diejenige verſteht, wobey der Widerſtand der Luft nicht in Rechnung gebracht wird. Dieſer iſt aber bey den ſehr ſchnellen Bewegungen der Bomben und Kanonenkugeln ſo ſehr groß, daß ihre Bahn gar ſehr von der Parabel verſchieden iſt. Weil jedoch die erſte Geſchwindigkeit

keit der Bomben allemahl ſehr viel kleiner iſt, als die erſte Geſchwindigkeit der gröſten Kanonenkugeln; ſo läßt es ſich daher erklären, woher es kommt, daß Belidor beym Bombenwerfen die Verhältniſſe der Schußweiten ſo ziemlich der Erfahrung gemäß befunden hat. Solche Unterſuchungen darüber, wobey der Widerſtand der Luft mit in Rechnung gebracht wird, laſſen ſich nur mit Hülfe der höhern Mathematik anſtellen. Folgende kleine Tabellen können indeſſen dienen, einigermaſſen daraus abzunehmen, wie weit die Kugeln getrieben werden, wenn die Stücke mit halbkugelſchwer Pulver geladen ſind. Die in denſelben angezeigte Weite des Kernſchuſſes iſt diejenige, um welche ſich die Kugel von der Mündung des Stücks entfernt, ohne merklich von der graden horizontalen Linie abzuweichen, welche ihre Bahn an der Mündung des Stücks berührt.

Franzöſiſche

Franzöſiſche Kanonen	Weite des Kernſchuſſes	Weite des Bogenſchuſſes von 45°
32 pfündige	1440 Rhl. Fuß	14400 Rhl. Fuß
24 pfündige	1920 — —	14400 — —
16 pfündige	1920 — —	19200 — —
12 pfündige	1080 — —	12000 — —
8 pfündige	960 — —	10800 — —
4 pfündige	720 — —	7200 — —
2 pfündige	360 — —	3600 — —
Deutſche Kanonen		
Ganze Karthaune	1200 Rhl. Fuß	14400 Rhl. Fuß
Halbe Karthaune	1020 — —	12180 — —
Viertel Karthaune	900 — —	10560 — —
Regimentsſtück	780 — —	8640 — —
Ganze Schlange	1440 — —	17136 — —
Halbe Schlange	1080 — —	12888 — —
Viertel Schlange	840 — —	10032 — —
Falkonet	672 — —	7968 — —
Halbes Falkonet	494 — —	5880 — —
Serpentinell	384 — —	4488 — —

Was die practiſchen Schriftſteller ſonſt noch in der Artillerie vorzutragen pflegen, erfordert, ſoweit es mathematiſch iſt, zuviele Theorie, als daß er hier aus ſeinen Gründen richtig hergeleitet werden könnte, wohin unter andern auch

die

die Lehre von den Minen gehört. Die Beſchreibung der mancherley Geräthſchaften wäre hier zu weitläuftig, und die Beſchreibung vom Gebrauch des Pulvers zu Luſt-Feuerwerken iſt mehr phyſiſch und chymiſch, als mathematiſch. Als eines der beſten Handbücher für ſolche Leſer, die in der höhern Mathematik nicht geübt ſind, empfehlen ſich beſonders Herrn Carl Auguſt Struenſees Anfangsgründe der Artillerie, Leipzig und Liegnitz 1760.

Die
Optiſchen
Wiſſenſchaften.

Erſte Gründe der Optik.

Die 1. Erklärung.

1. Die Optik lehrt die mathematiſche Theorie von den Erſcheinungen der Gröſſe, der Geſtalt und Bewegung der Körper, in wiefern ſie durchs Geſicht empfunden werden. Im beſondern Sinn rechnet man hieher die Lehren von den Erſcheinungen, welche die Körper ſelbſt, nicht etwa nur Bilder von ihnen darſtellen, die in Spiegeln, oder durch Gläſer geſehen werden.

Die 2. Erklärung.

2. Was unſer Auge rühren muß, wenn wir ſehen ſollen, nennen wir das Licht, und wir ſtellen uns daſſelbe als eine zarte Maſſe vor, welche ſich von den Körpern, die wir ſehen, überall umher verbreitet.

Die 3. Erklärung.

3. Für ſich leuchtende Körper ſind ſolche, die eigenes und nicht anders woher empfangenes Licht in unſer Auge ſenden, wie die Sonne und die Feuerflamme. Die übrigen heiſſen dunkle nicht für ſich leuchtende Körper. Durchſichtige Maſſen ſind ſolche, die das Licht durchſcheinen laſſen, wie Glas und Waſſer: die übrigen nennen wir undurchſichtig.

Die 1. Erfahrung.

4. Jeden Punct ſowohl eines für ſich leuchtenden, als auch eines anderswoher erleuchteden Körpers kann man überall ſehen, wenn ſich nur zwiſchen demſelben und dem Auge nichts undurchſichtiges befindet.

Zuſatz.

5. Demnach iſt der Erfolg für unſre Empfindung eben ſo; als wenn das Licht von jedem ſichtbaren Punct nach allen Seiten in graden Linien ausgienge.

Die 4. Erklärung.

6. Dasjenige Licht, was von einem Punct in grader Linie ausgehet, heißt ein **Lichtſtrahl**. Wird ein Theil desjenigen Lichts, was ein ſolcher Punct umherſtrahlet, mit einer Ebene aufgefangen; ſo iſt der Raum, welchen dieſer Theil des Lichts erfüllt, eine **Pyramide** oder ein **Kegel**, nachdem die Figur, welche das Licht auffängt, gradlinicht, oder kreisförmig iſt. Daher erklärt es ſich leicht, was gemeint ſey, wenn von einer **Strahlenpyramide**, oder einem **Strahlenkegel** die Rede iſt.

Zuſatz.

164 Fig. 7. Weil der Stern im Auge ein Kreis iſt; ſo fällt von jedem ſichtbaren Punct eines Objects, ein Strahlenkegel ins Auge. Es ſtelle der kleine Kreis AB den Stern im Auge vor, und O ſeinen Mittelpunct, LM ſey ein ſichtbares Object; ſo gehen zwar von jedem Punct C, L, M, nach allen Seiten Strahlen aus: ins Auge aber kommen nur die Strahlenkegel ACB, ALB, AMB.

Die 5. Erklärung.

8. Unter den Strahlen, die ein ſichtbarer Punct ins Auge ſendet: heißt derjenige der **Hauptſtrahl**, welcher

welcher durch den Mittelpunct des Sterns ins Auge fällt. Er iſt die Axe des von einem ſolchen Punct auf den Stern fallenden Strahlenkegels.

Die 6. Erklärung.

9. Eine grade Linie OC durch den Mittelpunct des Sterns im Auge die auf ſeiner Ebene ſenkrecht iſt, heißt die Geſichtsaxe. Wenn dieſe gegen die Mitte C eines Objects gerichtet iſt, ſo iſt ſie zugleich der Hauptſtrahl des von der Mitte des Objects ins Auge kommenden Strahlenkegels. Wenn alsdenn L und M ein Paar Puncte ſind, die in der äuſſern ſichtbaren Gränze des Objects, und zugleich mit der Geſichtsaxe in einer Ebene liegen, und wenn LO und MO die daher ins Auge kommenden Hauptſtrahlen ſind; ſo iſt LOM der optiſche Winkel, unter welchem die Länge oder Breite des Objects in dieſer Ebene genommen dem Auge erſcheint. Er heißt auch der ſcheinbare Durchmeſſer, und COL, COM, ſind alsdenn ſcheinbare Halbmeſſer, wenn dieſe Winkel gleich groß ſind.

Die 2. Erfahrung.

10. Wir ſind gewohnt, die Gröſſe der Gegenſtände, welche wir durchs Geſicht warnehmen, nach dem Sehewinkel zu ſchätzen: ſie ſcheinen uns bey einerley Sehewinkel gleich groß zu ſeyn, aber deſtogröſſer oder kleiner, je gröſſer oder kleiner ihr Sehewinkel iſt.

Der 1. Zuſatz.

11. Einerley Sache kann in verſchiedenen Entfernungen gleich groß zu ſeyn ſcheinen, wenn der Sehewinkel einerley bleibt. Ein Fall von der Art wäre der, wenn mehrere Perſonen in einem Kreisbogen ihre Stellen haben; die dazu gehörige Sehne würde allen gleich groß erſcheinen. (130. §. Geom.)

Der 2. Zuſatz.

165 Fig. 12. Iſt die Augenaxe OC gegen den Mittelpunct C einer Kugel LAMN gerichtet und OL ein Hauptſtrahl, der von einem der äuſſerſten Puncte kommt, die noch Licht ins Auge ſenden können; ſo iſt COL der ſcheinbare Halbmeſſer der Kugel. Dem 29. §. der Trigonometri gemäß hat man ſin COL = $\frac{CL . \text{ſin tot}}{OC}$, weil CLO = 90° iſt. (136. §. Geom.) Die Entfernung OC des Mittelpuncts der Kugel vom Auge, ihr wirklicher und ſcheinbarer Halbmeſſer, ſind alſo drey Gröſſen, wovon jede gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben ſind.

Der 3. Zuſatz

13. Die Sinus der ſcheinbaren Halbmeſſer gleichgroſſer vom Auge aber ungleich weit entfernter Kugeln verhalten ſich in umgekehrter Ordnung wie die Entfernungen vom Auge. Das Segment LAM der Kugel, welches das Auge auf einmahl überſehen kann, iſt allemahl kleiner als die Halbkugel, und der Bogen AL von der Mitte dieſes Segments bis an die äuſſerſte ſichtbare Gränze in Graden ausgedrückt ergänzt den ſcheinbaren Halbmeſſer zu 90°.

Der 4. Zuſatz.

164 Fig. 14. Wenn CL den Halbmeſſer eines Kreiſes vorſtellet, auf deſſen Ebene die Geſichtsaxe im Mittelpunct ſenkrecht iſt, ſo ſind die ſcheinbaren Halbmeſſer wie COL alle gleich groß, und man hat tang COL = $\frac{CL . \text{ſin tot}}{CO}$. Wenn alſo auch in dieſem Fall von den dreyen Gröſſen CO, CL, COL, zwey gegeben ſind, ſo kann die dritte gefunden werden: auch

ſtehen

ſtehen die Tangenten der ſcheinbaren Halbmeſſer mit den Entfernungen im umgekehrten Verhältniſſe, wenn die wirklichen Halbmeſſer einerley ſind.

Der 5. Zuſatz.

15. Je kleiner die optiſchen Winkel, AOB, COD, ausfallen, deſto mehr nähert ſich ihr Verhältniß dem Verhältniſſe ihrer Sinus und Tangenten. Wenn alſo die wirklichen Halbmeſſer in Vergleichung mit den Entfernungen ſehr klein ſind, ſo verhalten ſich die ſcheinbaren Halbmeſſer gleich groſſer und ungleich weit entfernter Objecte beynahe in umgekehrter Ordnung, wie die Entfernungen. 166 Fig.

Die 3. Erfahrung.

16. Sehr weit entfernte Gegenſtände entziehen ſich unſerm Geſichte, wenn ihr ſcheinbarer Durchmeſſer unter einer halben Minute abnimmt: doch bleiben ſehr ſtark glänzende Körper uns auch noch unter einem viel kleinern Sehewinkel ſichtbar. (M. ſ. Rob. Smiths Lehrbegriff der Optik 97. §. 29. S. nach der Käſtneriſchen Ueberſ.)

Der 1. Zuſatz.

17. Die parallelen Seitenlinien einer Allee von Bäumen, wenn man ſich mitten im Eingange befindet, ſcheinen deſto mehr zuſammen zu laufen, je länger die Allee iſt. Wäre ſie 5000mahl länger, als ſie breit iſt, ſo würde dem Auge ihr äuſſerſtes Ende geſchloſſen ſcheinen.

Der 2. Zuſatz.

18. Auf einer weit ausgebreiteten Ebene ſind wir gewohnt, jede von unſerm Standort auf dieſer Ebene fortlaufende grade Linie AC (167. Fig.) mit einer durchs Auge O damit parallel laufenden wag- 167 Fig.

rechten Linie OL zu vergleichen. Daher ſcheint ſich die Ebene zu heben, weil die optiſchen Winkel BOK, COL abnehmen.

Der 3. Zuſatz.

19. Wenn die Fläche der Erde völlig eben wäre, ſo würde die ganze Strecke, welche das Auge grade vor ſich hin überſehen könnte, nicht viel mehr betragen, als die Höhe des Auges über dieſer Ebene 5000mahl genommen. Auf der ſphäriſchen Erde erſtreckt ſich die Geſichtsgränze ohngefehr nur halb ſoweit. (M. ſ. die Anfangsgründe 3 Th. 27. 28. §. Optik. 25. u. f. S.) Eine ſolche nach allen Seiten weit ausgebreitete Ebene erſcheint dem Auge, wie in einem Kreiſe eingeſchloſſen, welcher die Geſichtsgränze, Horizont, heißt, weil die äuſſerſten Objecte, die das Auge erreichen kann, alle gleich weit vom Auge entfernt zu ſeyn ſcheinen.

Die 7. Erklärung.

168 Fig. 19. Die ſcheinbare Entfernung zweyer Objecte B, C, von einander iſt der optiſche Winkel BOC unter welchem ihre wahre Entfernung BC dem Auge O erſcheint.

Der 1. Zuſatz.

20. Wenn A ein kenntliches Object in der äuſſerſten Geſichtsgränze und O die Stelle des Auges iſt, ſo hat die grade Linie OA eine bekannte Lage. Die Stelle mehrerer Objecte, B, C, die mit OA in einerley Ebene liegen, iſt alsdenn bekannt, wenn nicht allein ihre ſcheinbare Entfernung AOB, AOC, von der graden Linie OA, ſondern überdem auch ihre wahre Entfernung OB, OC, vom Auge bekannt iſt. Wenn ſie ſoweit entfernt ſind, daß das

Auge

Auge den Unterſcheid der Entfernungen OB und OC nicht bemerken kann, ſo erſcheinen ſie alle in der kreisförmigen Geſichtsgränze, die das Auge, als den Mittelpunct umgiebt.

Der 2. Zuſatz.

21. Um die Stelle eines Objects P, das mit OA, 168 Fig.
B, und C nicht in einerley Ebene liegt, beſtimmt anzugeben, ſtelle man ſich PR auf der Ebene AOB ſenkrecht vor, ſo iſt ROP der graden Linie OP Neigungswinkel gegen die Ebene AOB. (265. §. Geom.) Alsdenn kann man R die auf die Ebene AOB reducirte Stelle des Objects P nennen, und ROP iſt die ſcheinbare Entfernung des Objects *P* von der Ebene *AOB*. Ferner iſt AOR die ſcheinbare Entfernung der reducirten Stelle R von OA, und die eigentliche Stelle des Objects P iſt bekannt, wenn auſſer den beyden Winkeln AOR, ROP, auch die wahre Entfernung OP bekannt iſt. Uebrigens ſcheinen alle um das Auge herum befindlichen Objecte in einer Kugelfläche zu liegen, wenn ſie ſoweit entfernt ſind, daß der Zuſchauer den Unterſchied ihrer Entfernungen nicht bemerken kann.

Die 8. Erklärung.

22. Wenn einerley Sache B aus zweyen verſchiedenen Stellen O, *o*, unter verſchiedenen ſcheinbaren Entfernungen AOB, A*o*B, von der graden Linie O*o* geſehen wird, ſo nennt man die Differenz beyder ſcheinbaren Entfernungen die ihnen zugehörige Parallaxe, und das Dreyeck OB*o* das parallactiſche Dreyeck.

Zuſatz.

23. Im parallactiſchen Dreyeck iſt der Winkel OB*o* = AOB − A*o*B (54. §. Geom.) die Parall-

axe. Die Entfernung *Oo* zwiſchen beyden Stellen des Auges, eine von beyden ſcheinbaren Entfernungen AOB, A*o*B, eine von beyden wahren Entfernungen OB, *o*B, und die Parallaxe, ſind Gröſſen, die ſo von einander abhängen, daß wenn drey davon gegeben ſind, die vierte gefunden werden kann. (29. §. Trig.) Je gröſſer übrigens die Entfernungen OB, *o*B, in Vergleichung, mit der Entfernung *Oo* zwiſchen beyden Stellen des Auges ſind, deſto kleiner iſt die Parallaxe OB*o*.

Die 9. Erklärung.

169 Fig. 24. Die ſcheinbare Bewegung eines Puncts M, der ſich in einer Ebene bewegt, worin auch das Auge O ſeine Stelle hat, wird dem Auge nur bemerklich, in wieweit der optiſche Winkel AOM, als die ſcheinbare Entfernung des Puncts M von der graden Linie OA, Aenderungen leidet, wenn OA in dieſer Ebene eine bekannte Lage hat. Wenn alsdenn BOM den Winkel vorſtellet, welchen der Punct M in einer Secunde, Minute, oder Stunde zurück zu legen ſcheint; ſo iſt derſelbe die optiſche Geſchwindigkeit des Puncts M, nachdem man ſie für eine Secunde, eine Minute, oder eine Stunde zu wiſſen verlangt.

Der 1. Zuſatz.

25. Wäre N noch ein andrer Punct, welcher in derſelben Ebene AOB, in eben der Zeit von C nach N fortrückt, worin B den Weg BM zurück legt; ſo würde das Auge dieſe Bewegung ebenfalls nur in ſoweit empfinden, als es die Aenderung des Winkels AON bemerken kann. Aus der Aenderung des Winkels NOM, den beyde Geſichtslinien einſchlieſſen,

ſen, wird dem Auge ferner die relative Bewegung der Puncte M und N gegen einander bemerklich: der Punct M ſcheint näher nach N hin, oder weiter von N wegzurücken, nachdem der Winkel NOM nach und nach abnimmt, oder gröſſer wird.

Der 2. Zuſatz.

26. Wenn der Punct P ſo in Bewegung wäre, 168 Fig.
daß er nicht immer in einerley Ebene AOB bliebe, ſo würde beydes ſeine ſcheinbare Entfernung ROP von der Ebene AOB, und die ſcheinbare Entfernung AOR ſeiner auf dieſe Ebene reducirten Stelle R von der graden Linie OA Aenderungen leiden.

Die 7. Erfahrung.

27. Wenn wir mit einer Menge von Gegenſtänden umgeben ſind, die ſich mit uns ſelbſt insgeſammt auf einerley Art beſtändig nach parallelen Richtungen mit einerley Geſchwindigkeit bewegen; ſo ſind wir unſrer eigenen Bewegung uns um deßwillen nicht bewuſt, weil alle Gegenſtände, womit wir uns umgeben ſehen, ſowohl gegen einander, als auch gegen uns ſelbſt, einerley Lage behalten. Nur diejenigen Gegenſtände ſcheinen uns in Bewegung zu ſeyn, deren Entfernung von andern Gegenſtänden, die dem Anſchein nach in Ruhe ſind, Aenderungen zu leiden ſcheint.

Der 1. Zuſatz.

28. Wenn das Auge ſich in einer graden oder 170 Fig.
krummen Linie in der Ebene AOB von O bis *o* bewegt, B aber in Ruhe iſt; wenn ferner A ein bekannter Punct in der äuſſerſten Geſichtsgränze und vom Auge ſoweit entfernt iſt, daß derſelbe gar keine merkliche Parallaxe hat, das Auge mag ſich in

ſeiner Bahn, wo es wolle befinden; ſo iſt oA mit OA parallel, und der Punct B ſcheint dem Auge in Bewegung zu ſeyn, in wie weit der Winkel AoB Aenderungen leidet.

Der 2. Zuſatz.

170 Fig. 29. Bewegt ſich der Punct B ſelbſt mit dem Auge in einerley Ebene von B nach M, indem das Auge von O nach *o* fortrückt, ſo wird dem Auge die Bewegung des Puncts M in ſoweit bemerklich, inwieweit der Winkel AoM Aenderungen leidet. Man ziehe O*m* mit oM parallel, und mache O*m* = oM; ſo hat oM gegen oA eben die Lage, wie O*m* gegen OA. Verfährt man eben ſo für jeden andern Zeitpunct, wenn ſich der bewegte Punct in N, das Auge aber in ω befindet; ziehet man nun O*n* mit ωN parallel und macht O*n* = ωN; ſo liegen die Puncte B, *n*, *m*, in der ſcheinbaren Bahn des Puncts M. Der Zuſchauer, der ſeine eigene Bewegung nicht merkt, hat eben die Empfindung, die er hätte, wenn er in O in Ruhe wäre, der in Bewegung befindliche Punct aber die Bahn B*nm* durchliefe.

Die 10. Erklärung.

30. Wofern während der Fortpflanzung des Lichts von einem ſichtbaren Punct bis ins Auge des Zuſchauers etwas Zeit verfließt; ſo ſiehet der Zuſchauer den ſichtbaren Punct, wenn entweder alle beyde, oder wenigſtens einer davon in Bewegung iſt, nicht völlig in eben der Richtung, wie er würde geſehen werden, wenn das Licht gar keine Zeit brauchte, von einem Ort zum andern zu kommen. Der Winkel zwiſchen den Richtungslinien, nach welchen der Punct in dem einen oder dem andern Fall geſehen wird, heißt die **Abirrung des Lichts**.

Der

Der 1. Zuſatz.

31. Es ſey L ein leuchtender Punct, und O das Auge, *l* aber ein andrer leuchtender Punct, der vom Auge nicht ſo weit als L entfernt iſt. Wenn nun die Fortpflanzung des Lichts gleichförmig mit der Geſchwindigkeit *c* erfolgt; ſo würde zwar L von dem Zuſchauer in O ſpäter als *l* geſehen werden; wenn beyde zugleich leuchtend würden, die ſcheinbare Lage beyder Puncte gegen einander würde jedoch keine Aenderung leiden. 171 Fig.

Der 2. Zuſatz.

32. Der leuchtende Punct L bewege ſich in der graden Linie CD gleichförmig, das Auge O ſey in Ruhe, und OL ſey die Richtung worin der Punct L dem Auge in einem gewiſſen Zeitpunct erſcheint: ſo kann der Punct L in eben dieſem Augenblick nicht mehr in L ſeyn, wofern das Licht den Weg LO in einer gewiſſen Zeit zurück gelegt hat. In eben dieſer Zeit ſey L nach M gerückt, ſo daß L in demſelben Augenblick in M anlangt, wenn der Strahl LO ins Auge kommt; ſo iſt während der Bewegung des Puncts L durch den Weg LM auch in der mit MO parallelen Richtung LN Licht aus L ausgefloſſen. Eben dieſes Licht bewegte ſich, im erſten Augenblick des Ausfluſſes aus L, mit dieſem leuchtenden Punct zugleich in der Richtung LM: alſo iſt die Bewegung deſſelben in der Richtung LO aus den beyden Bewegungen in den Richtungen LM und LN zuſammengeſetzt, und man kann den Winkel MOL als die Abirrung des Lichts trigonometriſch finden, wenn die Geſchwindigkeiten des Puncts L in der Richtung LM und des Lichts in der Richtung LN bekannt ſind. 172 Fig.

Der

Der 3 Zuſatz.

33. Vermittelſt ähnlicher Schlüſſe kann die Abirrung des Lichts auch in andern Fällen gefunden werden, wenn entweder das Auge allein, oder auch mit demſelben der ſichtbare Punct ebenfalls in Bewegung iſt. Vermöge der Erfahrung aber iſt die Geſchwindigkeit des Lichts ſo ſehr groß, daß ſie nur bey den ſchnelleſten Bewegungen merklich wird, wovon man auf der Erde keine Beyſpiele hat. Nur unten in der Aſtronomie werden dieſe Lehren ihre Anwendung finden.

Die 11. Erklärung.

34. Von einem undurchſichtigen Körper ſagt man, er werfe ſeinen Schatten in den Raum, wohin von einem leuchtenden Körper eben darum kein Licht kommen kann, weil jener undurchſichtige Körper es auffängt. Kürze halber nennt man den unerleuchteten Raum ſelbſt den Schatten, wenn es darauf ankommt, die Geſtalt und Gröſſe dieſes Raums anzugeben.

Der 1. Zuſatz.

35. Alles Licht, was ein leuchtender Punct auf einen undurchſichtigen Körper wirft, iſt in dem Raum eines pyramiden- oder kegelförmigen Körpers enthalten: alſo verbreitet ſich der Schatten durch den Raum, welcher zu der Lichtpyramide noch hinzu kommt, wenn man ſie nach der andern von dem leuchtenden Punct abgekehrten Seite hin erweitert.

Der 2. Zuſatz.

36. Ein leuchtender Körper beſtehet aus unzählig vielen leuchtenden Puncten, wovon wenigſtens allemahl ein groſſer Theil auf einen ſolchen dunklen Körper Licht wirft, der dem umherſtrahlenden Licht ausge-

ausgeſetzt iſt. Demnach wirft der dunkle Körper alsdenn auch mehr als einen Schatten, nemlich eben ſoviele, als leuchtende Puncte da ſind, welche die Spitzen der auffallenden Lichtpyramiden abgeben.

Die 12. Erklärung.

37. Der Raum, wohin gar kein Licht kommen kann, wenn ein dunkler Körper einen Theil des von einem leuchtenden umherſtrahlenden Lichts auffängt, liegt im **vollen Schatten** oder **Kernſchatten**: Der übrige nur zum Theil erleuchtete Raum im **Halbſchatten**. Wenn vom Schatten ſchlechthin die Rede iſt, ſo wird gewöhnlich der Kernſchatten verſtanden.

Die 1. Aufgabe.

38. Die Halbmeſſer zweener Kreiſe in einerley Ebene, und die Entfernung ihrer Mittel- 173 Fig.
puncte ſind gegeben, man ſoll die Lage einer graden Linie finden, die beyde Kreiſe berührt.

Aufl. 1. Aus A ſey mit dem Halbmeſſer AE $= r$, aus B mit dem Halbmeſſer BD $= \varrho$ ein Kreis verzeichnet; ferner ſey AB $= a$, und BD $<$ AE. Man nehme BC $= \frac{a \cdot \varrho}{r - \varrho}$, halbire BC in M, und verzeichne aus M den Halbkreis BDC, der den kleinern Kreis in D ſchneidet: ſo iſt die grade Linie CD die geſuchte Tangente.

Beweis. Wenn BD gezogen wird, ſo iſt BDC $=$ R (131. §. Geom.) alſo berührt CD den Kreis um den Mittelpunct B. (136 §. Geom.) Man ziehe ferner durch A eine grade Linie mit BD parallel: dieſe wird CD in E ſenckrecht ſchneiden, (103. 101. §. Geom.) und es iſt alsdenn BC : BD $=$ AC : AE,

(175.

(175 §. Geom.) Ueberdem hat man AC $= a + \frac{a\varrho}{r-\varrho} = \frac{ar}{r-\varrho}$, alſo $\frac{a\varrho}{r-\varrho} : \varrho = \frac{ar}{r-\varrho}$: AE, und AE $= r$. Demnach liegt E in der Peripherie des um A verzeichneten Kreiſes, und CD berührt dieſen Kreis in E. (136. §. Geom.).

2. Man kann auch BO $= \frac{a\varrho}{r+\varrho}$ nehmen und über BO einem Halbkreis zeichnen, welcher dem kleinern gegebenen Kreis in F ſchneidet, ſo berührt OF ebenfalls beyde Kreiſe zugleich.

Beweis. Es ſind wiederum BF und OF auf einander ſenkrecht, (131, §. Geom.) und eine grade Linie, die durch A mit BF parallel gezogen wird, ſchneidet OF in G ebenfalls ſenkrecht: (103. 101. §. Geom.) Ferner iſt nun AO $= a - \frac{a\varrho}{r+\varrho} = \frac{ar}{r+\varrho}$, und BO : BF = AO : AG, oder $\frac{ar}{r+\varrho} : \varrho = \frac{ar}{r+\varrho}$: AG, mithin AG $= r$; woraus das übrige, wie vorhin folgt.

Zuſatz.

39 Durch C kann man zwey Tangenten, CDE und CRS, ziehen, welche beyde Kreiſe zugleich berühren: auch eben ſo durch O zwey Tangenten. FOG, POQ. Wenn ſich alsdenn die Ebene der Figur um die Axe AB drehet, ſo beſchreiben die Kreiſe ein paar Kugeln, ECS eine Kegelfläche, FOP, GOQ ein Paar entgegengeſetzte Kegelflächen. Beyde Kugeln

Kugeln berühren die erſte Kegelfläche von innen, und jede von den Kugeln berührt eben ſo von innen eine von den beyden entgegengeſetzten Kegelflächen.

Die 2. Aufgabe.

40. Die Entfernung $AB = a$ der Mittelpunct zwoer Kugeln, davon die eine leuchtend, die andre dunkel iſt, und ihre Halbmeſſer ſind gegeben: man ſoll die Geſtalt und Gröſſe des Schattens der dunklen Kugel finden.

Aufl. Eine Ebene, welche beyde Kugeln durch ihre Mittelpuncte ſchneidet, giebt ein Paar gröſte Kreiſe, und man kann alsdenn, wie im (38. §.) die graden Linien ziehen, welche beyde Kreiſe zugleich berühren. Wenn alsdenn die gröſſere Kugel leuchtend, die kleinere aber undurchſichtig iſt; ſo ergiebt die Vergleichung mit dem 39. §, daß letztere einen kegelförmigen Kernſchatten, DCR werfe, deſſen Länge $BC = \frac{a\varrho}{r - \varrho}$ gefunden wird: die Kegelfläche ZON aber giebt die Gränze des Halbſchattens ab, ſoweit ſie als eine abgekürzte Kegelfläche hinter der undurchſichtigen Kugel liegt. Der halbe Winkel an der Spitze C des vollen Schattenkegels wird gefunden, wenn man anſetzt BC: ſin. tot. = BD : ſin BCD. (32. §. Trig.) Auch findet man eben ſo die Hälfte BOF des Winkels an der Spitze des Halbſchattenkegels vermittelſt der Proportion BO : ſin. tot = BF: ſin BOF, und es iſt $BO = \frac{a\varrho}{r + \varrho}$.

Der 1. Zuſatz.

41. Die Sehnen PF, DR, ſind Durchmeſſer zweyer zu den Polen K, L, gehöriger Parallelkrei-

ſe, welche die ganze Fläche der Kugel in zwey Segmente und eine dazwiſchen liegende Zone eintheilen. Das Segment FKP empfängt in allen Stellen die völlige Erleuchtung, das Segment DLR liegt im vollen Schatten, und die Zone zwiſchen beyden Segmenten im Halbſchatten, der von FP gegen DR zu immer dunkler wird.

Der 2. Zuſatz.

42. Die Länge BC des Schattens wird deſto gröſſer, je weniger die Halbmeſſer beyder Kugeln von einander verſchieden ſind. In dem Fall $r = \varrho$ wird BC $= \frac{a\varrho}{r - \varrho}$ undendlich groß: (16 §. Allg. Rech.) Das heißt, der Schatten wird cylinderförmig. Wäre $\varrho > r$, ſo wäre BC negativ. (11. §. Allg. Rech.) das heißt, die Spitze des vollen Schattenkegels hätte nun ihre Stelle vor der undurchſichtigen Kugel auf der Seite, wo das Licht herkommt, der Kernſchatten ſelbſt aber wäre ein abgekürzter Kegel.

Der 3. Zuſatz.

43. Wenn die leuchtende Kugel in Vergleichung mit der dunklen Kugel ſehr groß, alſo $\frac{\varrho}{r}$ ein ſehr kleiner Bruch iſt; ſo hat man beynahe BC $= \frac{a\varrho}{r - \varrho}$ $= \frac{a\varrho}{r} : \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) = \frac{a\varrho}{r}$, oder BC $= \varrho : \frac{r}{a}$. Auch iſt bey eben der Vorausſetzung

BO =

$BO = \varrho : \frac{r}{a} = BC$. Dies iſt der Fall, wenn die leuchtende Kugel die Sonne, die dunkle aber die Erde vorſtellt; denn die Aſtronomie wird beweiſen, daß der Sonnendurchmeſſer wenigſtens 110 mahl gröſſer ſey, als der Erddurchmeſſer. Wird alsdenn der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne aus B geſehen $= \delta$ geſetzt, ſo iſt $\frac{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}{\text{ſin. tot}} = \frac{r}{a}$ (12. §.), alſo $BC = BO = \frac{\varrho \cdot \text{ſin. tot}}{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}$. Dieſe Schlüſſe finden alſo auch ihre Anwendung, wenn der Kreis um B jede andre Kugel vorſtellt, die noch kleiner als die Erde iſt.

Die 13. Erklärung.

44. Wird der körperliche Schatten mit einer Ebene geſchnitten, ſo liegt die Durchſchnittsfigur im Schatten. Dieſe wird Kürze halber der auf die Ebene projicirte Schatten, von den practiſchen Schriftſtellern auch der Schlagſchatten genannt.

Der 1. Zuſatz.

45. Auf einer Ebene, die den Schattenkegel DCR auf ſeiner Axe BC in W ſenkrecht ſchneidet, iſt der projicirte Schatten der Kugel KDLR ein Kreis, deſſen Halbmeſſer WY leicht gefunden wird, wenn die Entfernung BW gegeben iſt. Man findet nemlich $GW = BC - BW$, und hiernächſt ſin. tot : tang $BCD = CW, WY$, (34. §. Trig.) da denn der Winkel BCD aus dem 40. §. bekannt iſt. 173 Fig.

Der 2. Zuſatz.

46. In eben dem Fall iſt der kreisförmige Kernſchatten mit einem ringförmigen Halbſchatten umge-

ben, wovon der gröſſere Durchmeſſer WZ aus dem Winkel BOF gefunden wird, wenn BW gegeben iſt. Man ſetzt an ſin tot : tang BOF = OW : WZ, und es iſt OW = OB + BW.

Der 3. Zuſatz.

47. In dem Fall, wenn die leuchtende Kugel die Sonne, die dunkle aber die Erde, oder eine noch kleinere Kugel iſt, ſo wie wir ſie auf der Erde dem Sonnenlicht ausſetzen können, hat man BCD = $\frac{1}{2}\delta$ = BOF, (43. §.) und BC = $\frac{\varrho \text{ ſin. tot.}}{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}$ = BO. Wenn überdem BW = b geſetzt wird, ſo findet man ſin. tot : tang $\frac{1}{2}\delta$ = $\frac{\varrho \text{ ſin. tot.}}{\text{ſin } \frac{2}{1}\delta}$ − b : WY, (45. §.) alſo WY = $\frac{\varrho \text{ tang } \frac{1}{2}\delta}{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}$ − b tang $\frac{1}{2}\delta$, oder beynahe WY = ϱ − b tang $\frac{1}{2}\delta$, weil die Tangente eines kleinen Winkels von wenigen Minuten beynahe dem Sinus gleich iſt. Ferner erhält man ſin. tot. tang $\frac{1}{2}\delta$ = $\frac{\varrho \text{ ſin tot}}{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}$ + b : WZ, (45. §.) alſo WZ = ϱ + b tang $\frac{1}{2}\delta$.

Der 4. Zuſatz.

48. Der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne iſt, wie die Aſtronomie lehren wird, bald etwas weniges gröſſer, bald etwas kleiner, als 32′, und man kann dieſe Zahl als eine Mittelzahl annehmen: alſo iſt $\frac{1}{2}\delta$ = 16′, und $\frac{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}{\text{ſin. tot.}}$ = 0,00046542 ziemlich nahe = $\frac{1}{215}$. Dieſemnach findet man die Länge des

Erdſchattens BC = 215 . ϱ, und in einer Entfernung, die mehr als 215 Erdhalbmeſſer beträgt, giebt es keinen Kernſchatten mehr, ſondern nur Halbſchatten. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit jeder andern dunklen Kugel, die wir auf der Erde dem Sonnenlicht ausſetzen können.

Die 14. Erklärung.

49. Auf jeden Punct, wie D oder E einer dem Sonnenlicht ausgeſetzten Ebene fällt von jedem Punct des der Ebene zugekehrten Segments der Sonne ein Lichtſtrahl, und alle in einem ſolchen Punct zuſammenlaufende Lichtſtrahlen ſind in einem kegelförmigen Raum ADK, HEB, enthalten. Wenn die Axe eines ſolchen auffallenden Strahlenkegels eine Ebene, die das Licht auffängt, ſenkrecht trift, ſo ſagt man, die Ebene werde an dieſer Stelle ſenkrecht erleuchtet. 174 Fig.

Der 1. Zuſatz.

50. Man muß die Lichtkegel und Lichtpyramiden zuſammenlaufender Strahlen, von den Lichtkegeln und Lichtpyramiden aus einander fahrender Strahlen (6. §.) unterſcheiden. Dieſe leztern haben ihre Spitze in dem leuchtenden Körper, und ihre Grundfläche iſt diejenige, welche das Licht auffängt: bey jenem iſt es umgekehrt.

Der 2. Zuſatz.

51. Wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne von der Erde, welche man in einer runden Zahl auf 24000 halbe Erddurchmeſſer ſchätzen kann, wie in der Aſtronomie wird bewieſen werden, ſind alle Lichtſtrahlen, die von einerley Punct der Sonne auf ſo kleine Ebenen fallen, als wir auf der Erde der Sonne ausſetzen können, ſo gut als völlig parallel.

Die von jedem Punct der Sonne herkommenden auf eine dem Sonnenlicht ausgeſetzte Ebene fallenden Lichtpyramiden oder Lichtkegel ſind demnach als Strahlenpriſmen oder Strahlencylinder anzuſehen, nach Verſchiedenheit der Figur der Ebene, welche die Strahlen auffängt. Mit den von der Sonne herkommenden Lichtkegeln zuſammenlaufender Strahlen aber hat es nicht eben die Bewandniß, weil die Sonne eine ziemlich beträchtliche ſcheinbare Gröſſe hat. Strahlen, die von entgegen geſetzten Puncten des Sonnenrandes kommen, und in einerley Punct der erleuchteten Ebene zuſammen laufen, ſind unter einem Winkel von 32′ gegen einander geneigt.

Der 3. Zuſatz.

52. Eine Ebene die wir auf der Erde dem Sonnenlicht ausſetzen können, fängt alle vom Mittelpunct der ſcheinbaren Sonnenſcheibe herkommenden Strahlen unter gleichen Winkeln auf, (267. §. Geom.) und ſie wird von der Sonne ſenkrecht erleuchtet, wenn das ein rechter Winkel iſt. Die vom äuſſern Rande herkomenden Strahlen ſind alsdenn gegen die Ebene unter einem Winkel von 89° 44′ geneigt.

Die 3. Aufgabe.

53. **Eine undurchſichtige kreisförmige Ebene wird von der Sonne ſenkrecht erleuchtet: man ſoll die Geſtalt und Gröſſe des Schattens finden.**

174 Fig. Aufl. Eine Ebene durch der Sonne Mittelpunct S und der Ebene Mittelpunct C ſchneidet die Sonne in einem gröſten Kreiſe AHIKB, die kreisförmige Ebene aber in der graden Linie DE, die zugleich ein Durchmeſſer von ihr iſt. Aus D ſowohl, als auch aus E kann

kann man zwo Tangenten des Kreiſes DA, DK und EB, EH ziehen, (137. §. Geom.) da dann DA, EB, einander in einem Punct F der Axe CS ſchneiden, DK, EH, aber in dem Punct G. Alsdenn iſt DFE der volle Schattenkegel, und die Kegelfläche DGE nach F hin erweitert iſt die Gränze des Halbſchattens.

Man ziehe DS, ſo iſt ADS = SDK der ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne, und CFD = ADS — CSD. Weil aber CSD ein faſt gänzlich verſchwindender Winkel iſt, (50. §.) ſo hat man CFD = ADS = $\frac{1}{2}\delta$, wenn ADK = δ geſetzt wird. Ueberdem iſt CGD = ADK — CFD, alſo CGD = $\delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$ = CFD, und man findet CF : CD = ſin. tot : tang $\frac{1}{2}\delta$, (28. §. Trig.) mithin

$$CF = \frac{CD \,.\, \text{ſin. tot}}{\text{tang } \frac{1}{2}\delta} = CG.$$

Der 1. Zuſatz.

54. Man findet alſo die Länge CF des Kernſchattens wiederum ohngefehr 215mahl gröſſer, als den Halbmeſſer des Kreiſes, der den Schatten wirft, und es iſt auch hier ſehr nahe $CF = \frac{CD \,.\, \text{ſin. tot.}}{\text{ſin } \frac{1}{2}\delta}$ weil Tangente und Sinus eines Winkels von 16′, wie die trigonometriſchen Tafeln ergeben, noch nicht in Zehnmilliontheilen des Halbmeſſers verſchieden ſind. Auf der Ebene PQ, die den Schatten ſenkrecht ſchneidet, ſind die Halbmeſſer des projicirten Kernſchattens und Halbſchattens LR = CD — $\frac{1}{215}$ CL, und LT = CD + $\frac{1}{215}$ CL, wie im 47. §.

Der 2. Zuſatz.

55. Wenn die Ebene MN undurchſichtig, und DE eine kreisförmige Oefnung iſt; ſo iſt der mit dem

durchſcheinenden Licht erfüllte Raum dem vorhin betrachteten vom undurchſichtigen Kreiſe beſchatteten Raum in allen Stücken ähnlich. Von jedem Punct des der Oefnung DE zugekehrten Segments der Sonne fällt auf ſelbige ein Lichtkegel, wie DHE, DKE, und alle dieſe Lichtkegel haben den kegelförmigen Raum DFE als den vollen Lichtkegel mit einander gemein. Dieſer iſt mit einem Halbſchatten umgeben, den die hinter der Oefnung erweiterte Kegelfläche DGE begränzt. Die Länge der Axen CF, CG, dieſer Lichtkegel und die Halbmeſſer der darauf ſenkrechten Schnitte findet man wie vorhin die Abmeſſungen der Schattenkegel gefunden ſind.

Lehrſatz.

56. **Wenn die Sonne durch eine kleine eckigte Oefnung ſcheint, und das durchſcheinende Licht mit einer Ebene ſenkrecht aufgefangen wird; ſo kommt die Figur des auf der Ebene erleuchteten Raums der Figur eines Kreiſes deſto näher, je weiter die Ebene von der Oefnung entfernt iſt.**

Beweis. Von jedem Punct der Sonne fällt ein Strahlenpriſma durch die Oefnung, und ein Schnitt dieſes Priſmen mit der Oefnung parallel giebt eine Durchſchnittsfigur die der Oefnung gleich und ähnlich iſt. Wenn man ſich nun anfangs alle Hauptſtrahlen allein vorſtellet, die von jedem Punct der Sonne durch die Mitte der Oefnung gehen, ſo erhellet, daß ſich dieſe hinter der Oefnung in einen kegelförmigen Raum ausbreiten. Ein auf der Axe dieſes Kegels ſenkrechter Schnitt iſt ein Kreis, die Hauptſtrahlen, welche vom Umfange des durch die Oefnung ſcheinenden Segments der Sonne kommen,

müſſen den Umfang dieſes kreisförmigen Schnittes treffen, und der Kreis ſelbſt iſt deſto gröſſer, je weiter die Ebene, welche das Licht auffängt von der Oefnung entfernt iſt. Stellt man ſich ſtatt der einzelnen Hauptſtrahlen die mit einem jeden zuſammen gehörigen Strahlenpriſmen vor, ſo erhellet, daß anſtatt der Puncte, worin die Hauptſtrahlen die erleuchtete Ebene treffen, ſo viele der Oefnung gleiche und ähnliche Durchſchnittsfiguren zum Vorſchein kommen, die ganz nahe bey der Oefnung in einerley Raum zuſammen fallen, in gröſſern Entfernungen aber ſich immer mehr aus einander ziehen. Die mittlern Puncte dieſer Durchſchnittsfiguren, welche mit den Hauptſtrahlen zuſammen gehören, bleiben beſtändig in einer Kreisfläche liegen, die bey wachſender Entfernung immer gröſſer wird; alſo muß die Figur des ganzen erleuchteten Raums auf der Ebene bey wachſender Entfernung ſich der Figur eines Kreiſes immer mehr nähern.

Zuſatz.

57. Aus eben den Gründen erklärt es ſich, warum in dem Fall, wenn ein Theil der durch eine Oefnung ſcheinenden Sonne verfinſtert iſt, auf einer Ebene, die das Licht auffängt, der erleuchtete Raum der jedesmahligen Lichtgeſtalt der Sonne ähnlich iſt.

Die 15. Erklärung.

58. Der Schatten AB, welchen ein lothrecht ſte- 175
hender Körper AC auf eine wagrechte Ebene FG wirft, Fig.
heißt der grade Schatten. Wenn aber ein gra- 176
der Stift AC auf einer lothrecht ſtehenden Mauer Fig.
HL ſenkrecht iſt, und die Sonne darauf ſcheint; ſo heißt der Schatten AB alsdenn der verkehrte Schatten

ten, wenn er lothrecht herab hängt. Bey dieſen Unterſuchungen betrachtet man nur die Länge des Schattens mithin auch nur die Länge des Körpers, der den Schatten wirft: alſo kann man den Körper ſo anſehen, als wenn es eine grade Linie wäre, und die Länge ihres Schattens geſucht würde.

Der 1. Zuſatz.

176 Fig. 59. Wenn die Mauer LH lothrecht ſteht, und AC darauf ſenkrecht iſt, ſo iſt AC wagrecht. Wird nemlich AD lothrecht gezogen, ſo liegt AD in der Ebene LH, und weil AC darauf ſenkrecht iſt, ſo iſt CAD ein rechter Winkel, (246. §. Geom.) mithin AC wagrecht. (19. §. Stat.)

Der 2. Zuſatz.

60. Die Ebene CAD iſt lothrecht; (261. §. Geom.) und wenn der Schatten von AC in AD fällt, ſo ſteht der Mittelpunct der Sonne in der lothrechten Ebene CAD.

Die 16. Erklärung.

175 Fig. 61. Wenn SC ein Strahl iſt, der aus dem Mittelpunct der Sonne kommt, und die wagrechte Ebene FG in B trift; ſo iſt ABS die ſcheinbare Entfernung der Sonne von der wagrechten Ebene, und eben dieſer Winkel heißt auch die **Höhe der Sonne über dem Horizont.**

Der 1. Zuſatz.

175 Fig. 62. Wenn der Mittelpunct der Sonne allein leuchtend wäre; ſo wäre AB die Länge des graden Schattens der lothrechten Linie AC. Wegen der ziemlich beträchtlichen ſcheinbaren Gröſſe der Sonne aber verliert ſich der Schatten hier in einen Halbſchatten. Es ſey nemlich in der lothrechten Ebene

CAB

CAB auch CT ein Strahl der vom obern und CV ein Strahl, der vom untern Sonnenrande kommt, ſo erſtreckt ſich der Kernſchatten von A bis D; von D bis E aber der Halbſchatten. Mit dem verkehr- 176
ten Schatten auf der verticalſtehenden Wand HL Fig.
hat es eine ähnliche Bewandniß; nur daß AE die Länge des Kernſchattens wird.

Der 2. Zuſatz.

63. Wenn die Höhe oder Länge AC des Körpers, der den Schatten wirft, nicht ſehr groß iſt, ſo iſt auch der Unterſcheid beyder Schattenlängen auf der wagrechten Ebene FG (175 Fig.) nicht beträchtlich, ſo lange die Höhe der Sonne nicht unter 45° beträgt. Tritt dieſer Fall ein, ſo nimmt der Unterſcheid der Schattenlänge auf der wagrechten Ebene FG ſchnell zu: dagegen aber nimmt der Unterſcheid der verkehrten Schattenlängen (176 Fig.) auf der lothrechten Ebene HL deſto mehr wieder ab.

Die 17. Erklärung.

64. Die Länge AB, welche der Schatten hätte, wenn der Mittelpunct der Sonne allein leuchtend wäre, kann man die mittlere Länge des Schattens nennen.

Zuſatz.

65. Im rechtwinklichten Dreyeck ABC ſind die Länge oder Höhe AC, die mittlere Länge AB des Schattens, und die Höhe der Sonne ABC, oder ſtatt deſſen beym verkehrten Schatten ihre Ergänzung zu 90°, drey Gröſſen, wovon jede für ſich trigonometriſch gefunden werden kann, wenn die übrigen beyden gegeben ſind.

Anfangsgründe
der
Perſpectiv.

Die 1. Erklärung.

1. Die Perſpectiv lehrt, wie man ebene oder auch körperliche Figuren nach ihrer ſcheinbaren Geſtalt und Lage gegen einander auf einer Ebene, welche hier die perſpectiviſche Tafel heißt, ſo abbilden könne, wie ſie dem Auge in einer angenommenen Stelle erſcheinen müſſen.

Zuſatz.

177 Fig. 2. Die Ebene AB ſey horizontal, und werde von der verticalſtehenden Ebene CD in CE geſchnitten. In O befinde ſich das Auge vor der Ebene CD, hinter dieſer Ebene aber die Puncte L, M, P, oder noch mehrere, ſoviel man will. Wenn alsdenn CD eine durchſichtige Tafel iſt, und die Lichtſtrahlen LO, MO, PO, welches die von den erwehnten Puncten ins Auge kommenden Hauptſtrahlen ſind, die Tafel in den Puncten K, I, *p*, durchboren; ſo hat das Auge einerley Empfindung, es mag unmittelbar die Puncte L, M, P, oder ſtatt derſelben die Puncte K, I, *p*, auf der Ebene CD betrachten. Im letzten Fall iſt die Empfindung eben ſo, als wenn das Auge die Puncte L, M, P, durch eine durchſichtige Tafel betrachtete, und das hat den Nahmen der Perſpectiv veranlaſſet.

Die

Die 2. Erklärung.

3. Wenn man ſich von allen Puncten des Gegenſtandes, ſo weit ihn das Auge überſehen kann, ins Auge gezogene Geſichtsſtrahlen vorſtellet: ſo liegen dieſe insgeſammt in einem coniſchen oder pyramidenförmigen Raum, der ſeine Spitze im Auge hat. Dieſe optiſche Pyramide wird von der zwiſchen dem Auge und dem Gegenſtande befindlichen Tafel geſchnitten, und die Durchſchnittsfigur heißt das Bild, oder die Projection des betrachteten Gegenſtandes.

Der 1. Zuſatz.

4. Das Bild I ſeines Puncts M iſt ein Punct an der Stelle auf der Tafel, wo ſie von dem Geſichtsſtrahl OM durchbort wird. Das Bild I*p* einer graden Linie MP iſt ebenfalls eine grade Linie, und die grade Linie MP liegt mit ihrem Bilde in einerley Ebene OMP, die zugleich durchs Auge gehet.

Der 2. Zuſatz.

5. Wenn MP mit der Tafel parallel iſt, ſo iſt dieſe grade Linie auch mit ihrem Bilde parallel. (247. §. Geom.) Wenn ML vertical iſt, ſo iſt die Ebene OML vertical. (20. §. Stat.) Steht alſo die Tafel vertical, ſo iſt das Bild IK der lothrechten Linie ML ebenfalls auf dem Horizont AB ſenkrecht. (264. §. Geom.)

Die 3. Erklärung.

6. Will man Figuren abbilden, die zum Theil in einer horizontalen Ebene AB liegen, zum Theil auch auf derſelben lothrecht ſtehen; ſo nimmt man an, daß die Tafel vertical ſtehe, damit aufrecht ſtehende Sachen, wie ML, in IK auch aufgerichtet erſcheinen. 177 Fig.

nen. (5. §.) Aus O ziehe man OR auf die Tafel, und OS auf den Horizot ſenkrecht; ſo iſt OR der Abſtand des Auges von der Tafel, und OS die lothrechte Höhe des Auges über dem Horizont. Die Durchſchnittslinie CE der Tafel und der Horizontfläche AB heißt die Fundamentallinie oder Grundlinie, der Punct R auf der Tafel der Augenpunct, der Punct S im Horizont aber der Fußpunct.

Der 1. Zuſatz.

7. Wenn MP im Horizont mit der Grundlinie parallel iſt, ſo iſt auch MP mit der Tafel parallel: (248. §. Geom.) alſo iſt das Bild I*p* mit MP (5. §.) folglich auch mit der Grundlinie CE parallel. (258. §. Geom.) Weil ferner das Bild IK der lothrechten Linie ML auf dem Horizont AB ſenkrecht iſt; (5. §.) ſo iſt es auf der Grundlinie CE ſenkrecht. (246. §. Geom.)

Der 2. Zuſatz.

8. Man ziehe RT auf der Fundamentallinie ſenkrecht, ſo iſt RT auf dem Horizont AB ſenkrecht, (263. §. Geom.) und mit OS parallel. (257. §. Geom.) Wird hiernächſt auch ST gezogen, ſo hat das Viereck ORST bey R, T, S, rechte Winkel, (246. §. Geom.) mithin iſt auch SOR ein rechter Winkel (106. §. Geom.) und ORST ein Rechteck worin RT = OS, ST = OR: auch iſt die Ebene ORTS beydes zugleich vertical und auf der Tafel ſenkrecht. (261. §. Geom.)

Die 4. Erklärung.

9. Eine Ebene durch die drey Puncte O, R, S, gelegt heißt die Verticalfläche des Auges; ſie iſt mit der Ebene des Rechtecks ORTS (7. §.) einerley

ſey. Der Punct T in der Grundlinie lothrecht unter dem Augenpunct, kann der Fußpunct auf der Tafel heiſſen, um ihn von dem Fußpunct S im Horizont lothrecht unter dem Auge zu unterſcheiden. Wenn überdem noch RH mit der Grundlinie parallel gezogen wird, ſo iſt RH horizontal, und man nennt RH ſchlechthin die Horizontallinie, RT die Verticallinie des Auges. Die Ebene ORH iſt der Horizont des Auges.

Der 1. Zuſatz.

10. Es ſey M ein Punct im Horizont AB und MN auf der Grundlinie CE ſenkrecht: ſo iſt MN der Abſtand des Puncts M von der Tafel, (263. §. Geom.) und TN der Abſtand eben dieſes Puncts von der Verticalfläche des Auges. Aus dem Punct L, der oberhalb des Horizonts AB liegt, ſey LM lothrecht herab gelaſſen: ſo iſt LM die lothrechte Höhe des Puncts L über dem Horizont AB. Wofern vielleicht LM gröſſer iſt, als die Höhe des Auges RT, ſo liegt L über dem Horizont des Auges; in dieſem Horizont, wenn LM = RT iſt, und unter demſelben wenn LM kleiner iſt, als RT.

Der 1. Lehrſatz.

11. **Wenn zwey oder mehr grade Linien, wie CD, MV, FG, mit einander parallel ſind, ſie mögen alle in einerley, oder in verſchiedenen Ebenen liegen; ſo laufen ihre Bilder insgeſammt in demjenigen Punct der Tafel zuſammen, worin der mit ihnen parallele Geſichtsſtrahl OP die Tafel trift.** 178 Fig.

Beweis. Die grade Linie MV ſtoſſe verlängert bey K an die Tafel, der durchs Auge O damit parallele Geſichtsſtrahl aber in P: ſo iſt KP die Durchſchnittslinie der Ebene beyder Parallellinien OP, MV,

mit

mit der Tafel. In dieſer graden Linie liegt das Bild *m* eines jeden Puncts M der graden Linie KM, ſie mag hinter der Tafel ſoweit man will verlängert werden; denn *m* liegt in der Tafel, und in der Ebene der Parallellinien OP und KM, (4. §.) alſo in beyder Durchſchnittslinie KP. Demnach iſt K*m* das Bild von KM: und wenn M nach V weiter hinaus rückt; ſo rückt zugleich *m* weiter nach P. Nimmt man an, daß M von K über alle Gränzen wegrücke, ſo fällt zuletzt *m* in P, wenn KM unendlich groß wird. Wenn demnach CD, FG, verlängert mit der Tafel in B und A zuſammen ſtoſſen; ſo laufen ihre Bilder aus B und A gegen P zu, und P iſt ihrer aller Vereinigungspunct.

Der 1 Zuſatz.

177 Fig. 12. Die Bilder grader Linien, welche wie NM, FZ, auf der Tafel ſenkrecht ſind, laufen im Augenpunct R zuſammen.

Der 2. Zuſatz.

13. Alle im Horizont AB liegende auf der Grundlinie CE ſenkrechte grade Linien, wie NM, ſind auch auf der Tafel ſenckrecht: (263. §. Geom.) alſo laufen ihre Bilder in den Augenpunct.

Die 5. Erklärung.

14. Die im Augepunct R zuſammenlaufenden Bilder NR, TR, der im Horizont AB auf der Grundlinie ſenckrechten graden Linien NM, TQ, heiſſen bey einigen practiſchen Schriftſtellern die Geſichtslinien. Jedes Stück NI einer ſolchen Geſichtslinie iſt das Bild einer durch N auf der Tafel ſenckrechten Horizontallinie NM. Wie nun NM die wirckliche ſenckrechte Entfernung des Puncts M

von

von der Grundlinie und zugleich von der Tafel iſt: ſo kann man NI die perſpectiviſche Entfernung des Bildes I von der Grundlinie nennen.

Der 1. Zuſatz.

15. Obgleich die Tafel vertical ſtehend angenommen wird, ſo muß man ſich doch NI als Horizontal liegend, und die Tafel als durchſichtig vorſtellen.

Der 2. Zuſatz.

16. Das Bild eines ſolchen Puncts, der im Horizont AB liegt, kann nie jenſeits der Horizontallinie RH ſeine Stelle haben: daher heißt RH auch die Gränzlinie des Horizonts AB, ſo wie CE die gemeinſchaftliche Grundlinie des Horizonts und der Tafel iſt.

Die 6. Erklärung.

17. Die ſenckrechte Entfernung, NM des Puncts M hinter der Tafel heißt auch ſeine Tiefe hinter der Tafel, weil die Redensart gewöhnlich iſt, der Punct M liege ſo und ſoviele Fuſſe tief hinter der Tafel. In dieſer Rückſicht heißt auch NI die perſpectiviſche Vertiefung des Bildes I, und man nennt die im Augenpunct R zuſammen laufenden graden Linien, wie NR, am beſten die Vertiefungslinien. Wenn dagegen IK das Bild einer verticalſtehenden graden Linie ML, alſo auf CE ſenckrecht iſt; (7. §.) ſo wird auch IK als vertical ſtehend betrachtet, und mit der wirklichen Höhe ML eines lothrecht ſtehenden Objects gehört die perſpectiviſche Höhe IK zuſammen.

Der 1. Zuſatz.

18. Es ſey NM bey α, β, γ, in gleich groſſe Ruthen oder Fuſſen nach einem bekannten Maaſſe eingetheilt, ſo wird die perſpectiviſche Vertiefung NI

von den Geſichtsſtrahlen $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, bey *a*, *b*, *c*, in vertiefte perſpectiviſche Ruthen oder Fuſſe getheilt, welche jene geometriſche Ruthen oder Fuſſe abbilden. Dieſe perſpectiviſchen in die Tiefe laufenden Fuſſe fallen deſto kleiner aus, je weiter die dadurch abgebildeten Fuſſe hinter der Tafel liegen.

Der 2. Zuſatz.

19. Wäre eben ſo die mit der Tafel parallele grade Linie MP, oder die ebenfalls damit parallele lothrechte Höhe ML in gleiche Ruthen oder Fuſſe getheilt, ſo würden die aus O in die Theilungspuncte laufenden Geſichtsſtrahlen die Bilder I*p*, oder IK in eben ſoviele gleiche aber verkleinerte oder verjüngte Ruthen oder Fuſſe theilen.

Die 7. Erklärung.

20. Man nehme auf der Gränzlinie RH des Horizonts AB die Entfernung RW = dem Abſtand des Auges RO, auf der Grundlinie CE aber die Entfernung NX = der wirklichen Vertiefung NM: ſo heiſſen W und X die Diſtanzpuncte, nemlich W der Diſtanzpunct des Auges, und X der Diſtanzpunct der hinter der Tafel ligenden Stelle M. Auch nennt man RW, NX, die Diſtanzlinien. Die grade Linie WX zwiſchen den Diſtanzpuncten wird die Vertiefungslinie NR irgendwo ſchneiden, wenn man W und X wie es die Figur vorſtellet, ſo nimmt, daß NR zwiſchen dieſen Puncten liegt: eben darum heißt WX die Durchſchnittslinie.

Der 2. Lehrſatz.

177 Fig. 21. Die beyden Diſtanzpuncte W, X, liegen auf der Tafel mit dem Bilde I des Puncts M in grader Linie.

Beweis.

Beweis. Weil OR und NM parallel ſind, (257. §. Geom.) ſo ſind MNI und ORI ähnliche Dreyecke, (101. 175. §. Geom.) und es iſt OR : RI = MN : NI. Ferner iſt OR = RW, MN = NX, alſo auch RW : RI = NX : NI. Weil überdem RH und CE parallel ſind, ſo iſt der Winkel WRI = INX, und die Dreyecke RWI, INX, ſind ebenfalls einander ähnlich. (101. 176. §. Geom.) Dieſemnach iſt der Winckel NIX = RIW, und IW, IX, liegen in grader Linie. (20. §. Geom.)

Zuſatz.

22. Wenn alſo die Durchſchnittslinie WX und die Vertiefungslinie NR einander in I ſcheiden, ſo iſt NI die perſpectiviſche Vertiefung, welche die wirkliche Vertiefung NM = NX abbildet. (7. §. Geom.)

Die 1. Aufgabe.

23. Ebene oder auch körperliche Figuren auf der Tafel perſpectiviſch zu zeichnen, wenn ihre Seitenlinien entweder auf der Tafel ſenkrecht, oder damit parallel ſind.

Aufl. Vor allen Dingen muß die Entfernung 179
des Auges von der Tafel gegeben oder willkührlich Fig.
angenommen ſeyn, und eben ſo die lothrechte Höhe des Auges über der Ebene, die man als Horizontal liegend betrachtet. Dieſes vorausgeſetzt ziehe man eine grade Linie CE, welche die Grundlinie vorſtellet, nehme in derſelben einen Punct T als den Fußpunct an, und richte TR als die Verticallinie des Auges ſenckrecht auf. Man mache ferner TR der Höhe des Auges über demjenigen Horizont gleich, deſſen Grundlinie CE vorſtellet, ziehe RH als die Horizontallinie des Auges mit CE parallel, und neh-

me RW dem Abſtande des Auges gleich: ſo iſt bis auf den Maaßſtab alles zur Zeichnung vorbereitet. Wie nun bey geometriſchen Zeichnungen, auf dem Papier allemahl ein verjüngter Maaßſtab willkühr-lich gewählt wird; ſo kann man ihn auch hier will-kührlich wählen, und man richtet ſich dabey, wie auch ſonſt allemahl nach der Gröſſe des Flächenraums, der die Zeichnung faſſen ſoll. Den Maaßſtab ſelbſt kann man hier am bequemſten auf der Grund-linie auftragen, indem man dieſe von T nach C und E zu in gleiche Ruthen oder Fuſſe eintheilt: auch kann man eben ſo entweder RT oder jede andre ſenk-rechte Linie zwiſchen der Grundlinie und Gränzlinie des Horizonts in gleiche Ruthen oder Fuſſe theilen. Um den Maaßſtab für die Tiefen zu erhalten, theile man eine von den Vertiefungslinien wie NR dem 22 §. gemäß vermittelſt der in W zuſammen laufenden Durchſchnittslinien, wie es die Figur vorſtellt, ge-hörig ein: ſo wird jede andre Vertiefungslinie in eben dem Verhältniß durch ſolche grade Linien getheilt, die durch die Theilungspuncte in NR mit der Grund-linie parallel laufen.

Aus der folgenden kurzen Beſchreibung deſſen, was die 179. Figur vorſtellet, kann man leicht ab-nehmen, wie man ſich bey der Zeichnung ſelbſt zu verhalten habe. Die Vertiefungslinie NR liegt rech-ter Hand der Ebene des Auges 20 Fuß weit davon entfernt: ſie iſt von N bis I 56 Fuß lang, denn ſo-viele Fuſſe ſchneidet die Durchſchnittslinie WX von N bis X auf der Grundlienie ab. Die im Horizont mit der Grundlinie CE parallel laufende grade Linie I*p* iſt 40 Fuß lang, weil zwiſchen den Vertiefungs-linien NI und *np* von N bis *n* ſoviele Fuſſe enthalten

ſind

ſind. Die perſpectiviſche Höhe IK beträgt 8 Fuß, denn ſo hoch iſt NV im geomotriſchen Maaß; zu I*p* und IK gehört übrigens einerley verjüngtes Maaß. Ferner iſt NIKV ein 8 Fuß hohes über NI lothrechte ſtehendes Rechteck; I*pk*K iſt ein mit der Tafel paralleles eben ſo hohes Rechteck über der Grundlinie I*p*. Die Vertiefung *np* iſt eben ſo lang, und eben ſoweit von der Verticalfläche des Auges entfernt, als NI; auch ſteht über *np* ein eben ſo hohes lothrechtes Rechteck *nokp*, als NIKV war. Die drey genannten Rechtecke könnten eine 8 Fuß hohe Gartenmauer, das Rechteck NI*pn* den dazwiſchen liegenden 40 Fuß breiten und 56 Fuß tiefen Gartenplatz vorſtellen. Noch iſt *lmno* ein 4 Fuß breites und 12 Fuß in die Tiefe laufendes Rechteck. Die Figuren *abcd* 4 Fuß rechter Hand, *efgh* 4 Fuß linker Hand der Ebene des Auges ſind Quadrate, jede Seitenlinie iſt 6 Fuß lang, die vordere Seite *ab* iſt, ſo wie auch *fg*, 8 Fuß weit von der Tafel entfernt. Ueber *abcd* ſteht ein Würfel, wie es ſeyn muß 6 Fuß hoch, und über *efgh* eine Pyramide 12 Fuß hoch. In der Grundfläche *efgh* ſind die beyden Diagonallinien *eg*, *fh*, gezogen, und aus ihrem Durchſchnittspunct iſt eine 12 Fuß hohe grade Linie lothrecht aufgerichtet, welche die Höhe der Pyramide abgiebt.

Der 3. Lehrſatz.

24. Wenn die graden Linien CD, FG im Horizont AB mit einander parallel laufen, alſo gegen die Grundlinie CE unter einerley Winkel TBC = TAF geneigt ſind, ſo liegt der Vereinigungspunct P ihrer Bilder in der Horizontallinie RH, und ſein Abſtand RP vom Augen- 178 Fig.

punct iſt die Cotangente des Neigungswinkels der erwehnten Parallellinien gegen die Grundlinie für den Halbmeſſer OR.

Beweis. Man ziehe OP bis an die Tafel mit CD oder FG parallel, ſo iſt P der Vereinigungspunct der Bilder dieſer Parallellinien. (11. §.) Ferner iſt nun OP horizontal, weil CD, FG horizontal ſind, und OR iſt ebenfalls horizontal: alſo iſt die Ebene ROP horizontal, ihr Durchſchnitt mit der Tafel iſt die Horizontallinie des Auges, und in derſelben muß P liegen, weil dieſer Punct beydes zugleich in der Tafel und in der Ebene ROP liegt. Man ziehe FN auf CE ſenkrecht; ſo ſind FN und OR, ſo wie AF und OP parallel: (257. §. Geom.) alſo iſt POR = AFN (259. §. Geom.) = 90° − NAF, folglich RP als die Tangete des Winkels ROP zugleich die Cotangente von NAF für den Halbmeſſer RO. (2. §. Trigon.)

Die 8. Erklärung.

178 Fig. 25. Die graden Linien, wie AP, BP, die in einerley Punct P der Horizontallinie zuſammen laufen, können geneigte oder ſchiefe Vertiefungslinien heiſſen.

Zuſatz.

26. Wäre AG in gleiche Ruthen oder Fuſſe getheilt, ſo würden die aus dem Auge O in die Theilungspuncte laufenden Geſichtsſtrahlen auch die perſpectiviſchen aus A nach P laufende Vertiefung in perſpectiviſche nach P zu immer kleiner ausfallende Ruthen oder Fuſſe theilen, welche jene geometriſche Ruthen oder Fuſſe abbilden.

Die 9. Erkärung.

27. Auf der Gränzlinie RH des Horizonts nehme man PQ = der Entfernung des Auges O von

dem Vereinigungspunct P der Bilder aller mit FG parallelen Linien, auf der Grundlinie aber ſey AL = AF: ſo ſind Q und L Diſtanzpuncte für die in P zuſammenlaufenden geneigten perſpectiviſchen Vertiefungen. Auch ſind PQ, AL, damit zuſammengehörige Diſtanzlinien, und QL die Durchſchnittslinie.

Der 3. Lehrſatz.

28. Die beyden Diſtanzpuncte Q und L lie- 178
gen wiederum mit dem Bilde *f* des Puncts F Fig.
in grader Linie.

Beweis. Die Dreyecke FA*f*, OP*f*, ſind einander ähnlich, weil OP, AF, parallel ſind, und man hat OP : P*f* = AF : A*f*, folglich auch PQ : P*f* = AL : A*f*. Ueberdem iſt QP*f* = LA*f*, alſo das Dreyeck *f*PQ dem Dreyeck *f*AL ähnlich, und der Winkel P*f*Q = A*f*L. Daraus aber folgt, daß *f*Q, *f*L, in grader Linie liegen. (20. §. Geom.)

Zuſatz.

29. Wenn alſo die Durchſchnittslinie QL und Vertiefungslinie AP einander in *f* ſchneiden; ſo iſt A*f* die perſpectiviſche Vertiefung, welche die gegen die Tafel geneigte Vertiefung AF abbildet. (7. §. Geom.)

Die 2. Aufgabe.

30. Ebene oder auch körperliche Figuren auf der Tafel abzubilden, wenn auch unter den Seitenlinien ſolche ſind, welche mit der Tafel unter einem ſchiefen Winckel zuſammen laufen.

Aufl. Nachdem die im 23 §. beſchriebene 179.
Vorbereitung ſchon gemacht iſt, trage man auf der 180
Verticallinie RT die Entfernung RW des Auges Fig.

aus R in O, beſchreibe aus O mit dem Halbmeſſer RO einen Quadranten RS, und theile ihn in ſeine 90 Grade. Aus O ziehe man ferner durch alle Theilungspuncte Halbmeſſer, und bezeichne ihre Durchſchnittspuncte mit der Gränzlinie RH mit eben den Zahlen, wie die Theilungspuncte des Quadranten, womit ſie zuſammen gehören. Alsdenn ſind R10, R20, R30, u. ſ. f. Die Tagenten von 10°, 20°, 30°, u. ſ. f. für den Halbmeſſer RO. Eben dieſe Abtheilungen werden alsdenn auch an der andern Seite des Augenpuncts R auf der Horizontallinie aufgetragen, und die ſo eingetheilte Horizontallinie vertritt die Stelle eines perſpectiviſchen Transporteurs.

179 Fig. Wenn nemlich N*c* verlängert mit der Gränzlinie in *q* beym 36ſten Grade zuſammen ſtößt, ſo bildet TN*c* einen Winkel von ſovielen Graden ab, als auf der Gränzlinie liegen, ſoweit ſie ſich von *q* bis ins unendliche hinaus erſtreckt, alſo hier 54°. Eben ſo iſt es auch mit dem Winkel CN*q*, der den vorigen zu 180° ergänzt, und in dieſem Fall 126° faſſet.

Wenn nun *c* die Spitze eines Winkels iſt, deſſen Schenkel gehörig verlängert bey *q* und *r* an die Gränzlinie ſtoſſen; ſo faſſet dieſer Winkel *rcq* ſoviele Grade als auf der Gränzlinie zwiſchen *q* und *r* enthalten ſind. Denn man verlängere auch *cq* und *cr* bis an die Grundlinie in N und F, ſo bildet NF*c* ein Dreyeck ab, worin der Winkel FN*c* ſoviele Grade faſſet, als von *q* aus nach G ins unendliche fort auf der Gränzlinie liegen, der Winkel NF*c* aber ſoviele, als von *r* nach H hinaus ins unendliche fort auf der Gränzlinie liegen. Zieht man beyde zuſammen von 180° ab, ſo bleiben ſoviele Grade, als zwiſchen *q* und *r* auf der Gränzlinie liegen:

mithin

mithin ſoviele Grade als der Winkel TcN = qcr faſſet. (55. §. Geom.)

Um das übrige mit deſto mehrerer Deutlichkeit aus der Zeichnung ſelbſt abzunehmen, iſt die Tafel in der 180 Figur nochmahl beſonders gezeichnet. Daſelbſt iſt AP unter einem Winkel LAP von 50 Graden gegen die Grundlinie geneigt. Auf einer ſolchen geneigten Vertiefung ſchneidet man auf folgende Art eine Länge AD ab, die eine vorgeſchriebene Anzahl Fuſſe faſſet. Man trägt die Entfernung PO aus P nach Q, zählt von A nach L die vorgeſchriebene Anzahl, wie hier 36 Fuſſe ab, und ziehet die Durchſchnittslinie QL, welche in D die verlangte Länge abſchneidet. Ferner iſt hier DAF ein rechter Winkel, und weil AF in *p* läuft, ſo iſt die Diſtanzlinie *p*O in *pq* getragen, um aus *q* vermittelſt der Durchſchnittslinie *q*F die Länge AF von 48 Fuß abzuſchneiden. Aus F iſt FP mit AD, und eben ſo D*p* mit AF parallel gezogen, und dieſe beyden Linien ſchneiden einander in H, ſo daß AFHD ein Rechteck vorſtellet. Ueber jeder von den vier Seitenlinien dieſes Rechtecks iſt eine 6 Fuß hohe Ebene ſenkrecht aufgerichtet. Dieſe vier lothrechte Ebenen umſchlieſſen alſo in der horizontalen Ebene ein Rechteck ſo, daß die Zeichnung etwa einen Gartenplatz mit der umher befindlichen Mauer oder etwas dergleichen vorſtellen könnte. 180 Fig.

Der 1. Zuſatz.

31. Wenn eine krumme Linie, dergleichen die Kreiſe, und Kriegsbogen ſind, perſpectiviſch gezeichnet werden ſoll; ſo ſucht man die Bilder ſovieler einander ſehr nahe liegender Puncte, als man nöthig findet, um hiernächſt den Umfang des Bildes

durch alle ſo gefundene Puncte durchzuführen. Man kann zuerſt das Bild *k* vom Mittelpunct des Kreiſes ſuchen, welches hier 8 Fuß weit von der Tafel, und 4 Fuß weit von der Verticalfläche des Auges entfernt iſt. Ferner ſuche man die Bilder ſovieler Durchmeſſer als man nöthig findet, ſo liegen ihre Endpuncte in der Kreislinie. Wählt man ſolche Durchmeſſer, die einander unter gleichen Winkeln am Mittelpunct ſchneiden; ſo ſind ihre Endpuncte zugleich ſoviele Winkelpuncte eines regulairen Polygons.

Der 2. Zuſatz.

32. In der hiebey gefügten Figur iſt der Durchmeſſer *ab* auf der Tafel ſenckrecht, *cd* damit parallel. Dieſe Durchmeſſer ſind 16 Fuß, alſo die Halbmeſſer 8 Fuß lang, und der Kreis berührt bey *a* die Grundlinie. Ferner laufen *gh* und *fe* bey W und Y in den 45ſten Grad der Gränzlinie. Um alſo einem ſolchen Halbmeſſer, wie *kg* und *kh* die Länge von 8 Fuß zu geben, iſt WO in WX getragen, und *k*X gezogen. Weil dieſe Durchſchnittslinie in K mit der Tafel zuſammen ſtößt: ſo ſind KM und KN 8 Fuß lang genommen, die Durchſchnittslinien XM, XN, gezogen, und auf ſolche Art die Puncte *g* und *h* gefunden worden. Für den Durchmeſſer *ef* iſt eben ſo die Diſtanzlinie aus YO in YZ getragen.

Die 3. Aufgabe.

33. Den Schatten eines Körpers perſpectiviſch zu zeichnen, wenn die Erleuchtung von einer kleinen Lichtflamme oder auch ſonſt einem leuchtenden Körper herrührt, den man ohne merklichen Fehler, als einen leuchtenden Punct betrachten kann.

Aufl.

Aufl. Der körperliche Schatten iſt die Erweiterung der Strahlenpyramide, welche die Lichtflamme, als leuchtender Punct betrachtet, auf den dunklen Körper wirft, nach der andern Seite deſſelben, die vom Licht abgewandt iſt. Auf einer Ebene, welche dieſen körperlichen Schatten ſchneidet, findet man den Umriß des Schlagſchattens, wenn man vom mittlern Punct der Lichtflamme, deren Stelle in der Zeichnung als bekannt angenommen wird, durch ſoviele Puncte in den Gränzen des dunklen Körpers, als man nöthig findet, grade Linien ziehet, wo jede dieſer Linien die beſchattete Ebene trift, da hat man einen Punct im Umfange des Schlagſchattens. Zu mehrerer Erleichterung kann man ſich die Vorſtellung machen, als ob der Schatten eines Puncts ein Punct, der Schatten einer graden Linie ſelbſt eine grade Linie wäre, die mit jener Linie und dem leuchtenden Punct in einer Ebene liegt.

Die 181ſte Figur ſtellet den innern Raum eines Zimmers vor, wovon der Boden nebſt der Decke horizontal iſt, und die drey verticalen Seitenwände einander ſenkrecht ſchneiden. Bey λ befindet ſich die Lichtflamme und α iſt ein Eckpunct oben an einer von den lothrechten Seitenlinien eines auf dem Boden des Zimmers ſtehenden graden Priſmen. Weil die Stelle beyder Puncte im Zimmer allemahl als bekannt angenommen wird; ſo kennt man die Entfernungen $T\varphi$, $T\psi$, dieſer Puncte von der Ebene des Auges, und kann im Horizont $R\varphi$, $R\psi$, ziehen. Alsdenn weiß man, daß λ in der lothrechten Ebene über $R\varphi$; ſo wie α in der lothrechten Ebene über $R\psi$ liege. Wenn demnach auch nicht $\alpha\beta$ für ſich ſchon lothrecht wäre, ſo könnte man nun $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, 181 Fig.

 loth-

lothrecht ziehen, da dann die Durchſchnittspuncte β und μ mit Rψ und Rϕ im Horizont liegen. Zwey ſolche ſenkrechte Linien wie $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, ſind parallel, und die Puncte λ, α, μ, β, liegen in der Ebene dieſer Parallelinien. Demnach ziehe man $\mu\beta$ und $\lambda\alpha$, ſo iſt der Durchſchnittspunct π im Horizont der Schatten des Puncts α.

Man ſiehet nun wohl, daß $\beta\pi$ der Schatten von der Ecklinie $\beta\alpha$ ſey. Wird eben ſo der Schatten ϱ und σ der Eckpuncte γ und ε geſucht, ſo kann man den Schatten $\beta\pi\varrho\sigma\zeta$ des ganzen Priſmen zeichnen. Der Schatten t von der Spitze g der Pyramide efg würde im horizontalen Boden auf u fallen, wenn die Wand ihn nicht in t auffienge, und man ſiehet ſehr leicht bey Betrachtung der Figur, wie übrigens der Schatten von der ganzen Pyramide gezeichnet ſey.

Die 10. Erklärung.

177 Fig. 34. Es ſey L ein abzubildender Punct hinter der Tafel, und die lothrechte Linie LM treffe die Horizontfläche des Auges in G; ſo wird OG die Horizontallinie des Auges irgendwo in g ſchneiden, ſo daß g das Bild von G iſt. Ferner iſt nun OLMS eine verticale Ebene, welche kurz die **Verticalfläche** des abzubildenden Puncts heiſſen kann. Dieſe und die Verticalfläche des Auges ſchneiden einander in OS, und ROG = TSM iſt ihr Neigungswinkel, der hier die **Abweichung des Puncts** L **von der Verticalfläche des Auges** heißt. Ferner iſt GOL der ſcheinbare Abſtand des Puncts L vom Horizont des Auges, oder die **optiſche Höhe des Puncts** L **über dem Horizont des Auges.** (61. §. Opt.)

Der

Der 1. Zuſatz.

35. Wenn die Zeichnung eine von der Sonne erleuchtete Gegend vorſtellen, und das Bild der Sonne mit auf die Tafel gebracht werden ſoll: ſo ſtelle man ſich L als den Mittelpunct der Sonne vor. Alsdenn iſt OLMS die Verticalfläche der Sonne, und ihr Winkel ROG mit der Verticalfläche des Auges heißt in der Aſtronomie der Azimuthalwinkel der Sonne: GOL aber iſt die Höhe der Sonne über dem Horizont.

Der 2. Zuſatz.

36. Im Dreyeck RgK iſt Rg die Tangente des Azimuthalwinkels für den Halbmeſſer OR, und gK die Tangente der Höhe des Puncts L über dem Horizont für den Halbmeſſer Og.

Der 3 Zuſatz.

37. Je gröſſer die Entfernung OL iſt, deſto näher rückt das Bild I des lothrecht unter L im Horizont befindlichen Puncts M der Horizontallinie des Auges. In dem Fall, wenn L unendlich groß wäre, würde das Bild I mit g in der Horizontallinie RH zuſammen fallen.

Die 4. Aufgabe.

38. **Das Bild des Mittelpuncts der Sonne auf der Tafel zu zeichnen, wenn ihr Azimuthalwinckel, und ihre Höhe über dem Horizont gegeben ſind.**

Aufl. Weil RO der Abſtand des Auges iſt; ſo 179
gebe man dem Winkel ROH ſoviele Grade, als der Fig.
Azimuthalwinkel enthalten ſoll. Aus H nehme man auf der Horizontallinie HP = HO, mache den Winkel HPQ der Höhe der Sonne gleich, und richte aus H eine grade Linie über RH ſenckrecht auf, welche PQ in S ſchneidet: ſo iſt S das geſuchte Bild. (36. §.)

Die

Die 5. Aufgabe.

182 Fig. 38. Das bild *S* des Mittelpuncts der Sonne iſt auf der vertical ſtehenden Tafel gegeben, oder auch nach Anleitung des 37. §. gefunden; die Zeichnung ſtellet einen horizontalen Proſpect vor, und AB iſt das Bild einer dem Sonnenlicht ausgeſetzten lothrechten graden Linie: man ſoll das Bild ihres Schattens zeichnen.

Aufl. Aus dem Bilde S des Mittelpuncts der Sonne ziehe man SG auf der Horizontallinie des Auges ſenkrecht, und hiernächſt die graden Linien SA und GB, welche einander in C ſchneiden; ſo iſt BC der Schatten.

Beweis. Wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne von der Erde iſt G das Bild eines Puncts im Horizont lothrecht unter der Sonne: (37. §.) Demnach iſt dieſe Aufgabe als ein beſondrer Fall von der im 33. §. vorgetragenen Aufgabe anzuſehen.

Der 1. Zuſatz.

39. Wenn der Azimuthalwinkel der Sonne ROG = 90° iſt, ſo wird RG unendlich groß, und P fällt in R: alsdenn werden auch GS und PS unendlich groß, und es giebt kein Bild der Sonne auf der Tafel, weil ihr Mittelpunct ſelbſt nun in der Ebene der Tafel liegt. Zugleich iſt nun der Schatten BK der lothrechten Linie BA mit der Grundlinie parallel, und um ſeine Länge BK zu haben, wird der Winkel BAK ſo groß gemacht, als die Ergänzung der Sonne zu 90°.

Der 2. Zuſatz.

40. Wäre der Azimuthalwinkel, wie ROγ, gröſſer als 90°; ſo muß man Oγ rückwärts bis an die Horizontallinie in *g* verlängern, *gp* = *g*O nehmen,

men, unter der Horizontallinie den Winkel *gps* der Höhe der Sonne gleich machen: ſo iſt der Durchſchnitt *s* mit der auf der Horizontallinie ſenckrechten Linie *gs* als ein geometriſches Bild der Sonne auf der Tafel anzuſehen, weil es darauf kein phyſiches Bild giebt. Der Schatten hat nun die Lage von B nach *g*, und wenn man A*s* ziehet, ſo giebt der Durchſchnitt *c* mit B*g* die Länge B*c* des Schattens.

Die 6. Aufgabe.

41. **Den Schatten eines Körpers zu zeichnen, wenn des Tageslicht ihn erleuchtet, das durch eine Thür oder Fenſteröfnung in ein Zimmer ſcheint.**

Aufl. Die ganze Oefnung, durch welche das Tageslicht ins Zimmer fällt, iſt als eine leuchtende Fläche zu betrachten, und dunkle Körper, die dieſem Licht ausgeſetzt ſind, werfen auſſer dem vollen Schatten auch einen Halbſchatten von ſo beträchtlicher Gröſſe, daß man die eigentlichen Gränzen etwas genauer ſuchen muß, als in den vorhin betrachteten Fällen nöthig war. Man hilft ſich dabey durch allerley Vortheile, welche theils die Geſtalt der Oefnung an die Hand giebt, die das Licht durchſcheinen läßt, theils die Geſtalt des Körpers, deſſen Schatten gezeichnet werden ſoll. Gewöhnlich haben die Thür- und Finſteröfnungen die Geſtalt ſolcher Rechtecke, wovon zwey Seitenlinien vertical ſtehen, und die übrigen Horizontal liegen. Alsdenn genügt es, wenn man den Schatten ſucht, den der Körper werfen würde, wenn jede von den verticalen Seitenlinien für ſich allein leuchtend wäre: ſo erhält man einen zweifachen Halbſchatten, und der Raum, den beyde gemein haben, iſt der Kernſchatten.

Es

183 Fig. Es ſey ABCD eine Thüröfnung, oder auch PBCQ eine Fenſteröfnung, und auf dem horizontalen Boden ſtehe das Priſma EM. Man ziehe AE, AG, AL, und BF, BH, BM: ſo geben ſich die Durchſchnittspuncte e, g, l, und EeglL würde der Schatten ſeyn, wenn AB, oder auch PB allein leuchtend wäre, Weiter ziehe man DE, DG, DL und CF, CH, CM, ſo geben ſich die Durchſchnittspuncte ε, γ, λ, und der Schatten E$\varepsilon\gamma\lambda$L für den Fall, wenn die Erleuchtung allein von CD oder CQ käme. Der beyden Schatten gemeinſchaftliche Raum E$eh\lambda$L iſt der Kernſchatten. Für jede verticale Linie zwiſchen AB und CD in der Thür- oder Fenſteröfnung könnte man eben ſo einen Schatten finden, dieſe würden alle zwiſchen den Gränzen Ll und Eε liegen, und alle würden den Raum E$eh\lambda$L gemein haben: alſo kann kein Punct der Thür- oder Fenſteröfnung dahin ſcheinen.

Anmerkung.

42. Soll man Figuren abbilden, welche in Ebenen liegen, die gegen die Tafel, unter einem ſchiefen Winkel geneigt ſind; ſo bleiben die Regeln, nach welchen man zu Werke gehen muß, den bisher vorgetragenen ganz ähnlich: nur verſtattet es der Raum nicht, daß ſie hier vorgetragen werden könnten. Man findet im 3 Bande der Anfangsgründe alle Regeln ſo vollſtändig, als man ſie nöthig hat, um jede perſpectiviſche Zeichnung zu entwerfen. Der 7 Theil des Lehrbegriffes enthält auch die allgemeine analytiſche Perſpectiv, und man findet daſelbſt zugleich Nachrichten von den vornehmſten hieher gehörigen Schriftſtellern.

Die 11. Erklärung.

43. Je weiter das Auge von der abzubildenden Sache wegrückt, deſto mehr nähert ſich die Lage der ins Auge kommenden Strahlen der parallelen Lage.

Wenn

Wenn bey der Zeichnung des Bildes vorausgeſetzt wird, das Auge ſey ſo ſehr weit entfernt, daß die Abweichung der in daſſelbe kommenden Strahlen von der parallelen Lage nicht mehr merklich iſt; ſo heißt das Bild eine orthographiſche Projection der abgebildeten Sache.

Zuſatz.

44. Die orthographiſchen Bilder paralleler Linien ſind auf der perſpectiviſchen Tafel ebenfalls parallel. Die perſpectiviſchen Ruthen oder Fuſſe einer in die Tiefe laufenden graden Linie ſind gleich groß, und jedes Bild einer mit der Tafel parallelen graden Linie iſt der abgebildeten Linie gleich.

Die 12. Erklärung.

45. Die Tafel TC ſey auf dem Horizont MN 184
ſenckrecht, und RT ſey eine lothrechte Linie in der Fig.
Tafel, RO aber auf der Tafel und OS auf dem Horizont ſenckrecht: ſo iſt ORST eine auf der Tafel ſenkrechte Verticalfläche, und unter mehrern ſolchen auf der Tafel ſenckrechten Verticalflächen kann diejenige die erſte Verticalfläche heiſſen, deren Stelle als bekannt angenommen wird. Durch O ſey eine grade Linie O*o* ins unendlich weit entfernte Auge gezogen, und dieſe treffe die Tafel in G, den Horizont MN in D: ſo iſt der Winkel SDO die optiſche Höhe des Auges über dem Horizont, und die Ebene dieſes Winkels kann hier die Verticalfläche des Auges heiſſen. Sie iſt gegen die auf der Tafel ſenckrechte Verticalfläche ORTS unter dem Winkel TSD geneigt, und man nennt dieſen Winkel kurz die Abweichung des Auges von der erſten Verticalfläche.

Der 1. Zuſatz.

46. Durch die Winkel TSD und SDO wird die Lage der Tafel und des Auges gegen einander beſtimmt.

Der 2. Zuſatz.

47. Man ziehe auf der Tafel RH Horizontal, und OF bis an die Horizontallinie RH mit SD parallel. Ferner ſchneide SD die Grundlinie der Tafel in Y, ſo liegen die drey Puncte F, G, Y, in der Durchſchnittslinie der Verticalfläche SDO des Auges mit der Tafel, und dieſe Durchſchnittslinie iſt auf dem Horizont ſenckrecht. (264. §. Geom.) Demnach ſind RFG, OFG rechte Winkel, RF iſt die Tangente der Abweichung des Auges von der erſten Verticalfläche für den Halbmeſſer RO, und FG die Tangente der Höhe des Auges über dem Horizont für den Halbmeſſer OF.

Der 3. Zuſatz.

48. Wenn DE auf der Grundlinie ſenckrecht iſt, ſo liegen die Puncte R und E mit dem Bilde G des Puncts D in grader Linie, EG iſt die perſpectiviſche Vertiefung, welche die ſenckrechte Vertiefung ED abbildet. Auch ſind die Bilder aller übrigen ſenkrechten Vertiefungen mit EG oder RG parallel.

Die 13. Erklärung.

49. Man nenne R den reducirten Augenpunct, RO den reducirten Abſtand, und RT die reducirte Höhe des Auges, RH die Horizontallinie. Ferner nehme man RW = RO, EX = ED, und nenne W, X, Diſtanzpuncte, RW, EX, Diſtanzlinien, wie im 20. §.

Der 1. Zuſatz.

50. Die Diſtanzpuncte W und X liegen mit dem Bilde G des Puncts D in grader Linie. (21. §.)

Der

Der 2. Zuſatz.

51. Wenn AD eine geneigte Vertiefung und OP damit parallel iſt; ſo läuft das Bild AG von AD durch P, und die Bilder aller mit AD parallelen geneigten Vertiefungen ſind mit AP parallel, (44. §.) Auch iſt RP für den Halbmeſſer OR die Tangente des Winkels ROP = ADE der EAD zu 90° ergänzt.

Der 3. Zuſatz

52. Nimmt man PQ = PO und AL = AD, ſo liegen die Diſtanzpuncte Q, L, mit dem Bilde G von D in grader Linie. Man vergleiche den 28. §.

Die 7. Aufgabe.

53. Ebene, oder auch körperliche Figuren auf der verticalſtehenden Tafel orthographiſch perſpectiviſch zu zeichnen.

Aufl. Man ziehe die Horizontallinie RH und erſte Verticallinie RT, und nehme ihren Durchſchnittspunct R für den reducirten Augenpunct an. Auf der Verticallinie nehme man die reducirte Höhe des Auges RT und den reducirten Abſtand des Auges RO willkührlich an, und ziehe durch T die Grundlinie mit RH parallel. Wenn nun die Abweichung des Auges von der erſten Verticalfläche, und die optiſche Höhe deſſelben über dem Horizont gegeben ſind, ſo gebe man dem Winkel ROF die Zahl der Grade der Abweichung, mache FK = FO, ziehe FG auf der Horizontallinie ſenckrecht, und mache FKG der optiſchen Höhe des Auges über dem Horizont gleich: ſo iſt G ein Punct auf der Tafel, der bey der ganzen übrigen Zeichnung als Hülfspunct dient. Man kann ihn auf der Tafel ganz willkührlich wo man will annehmen, wenn die Abweichung des Auges und die optiſche Höhe deſſelben 186 Fig.

nicht vorgeſchrieben ſind. Uebrigens ziehe man noch RG bis an E in der Grundlinie, nehme RW = RO, und ziehe WG bis an X in der Grundlinie; ſo weiß man, daß G das Bild eines Puncts ſey, der um den Abſtand TE von der erſten Verticalfläche, und um den Abſtand EX von der Tafel entfernt iſt.

Weiter theile man die Grundlinie wie bey andern perſpectiviſchen Zeichnungen in gleiche Ruthen oder Fuſſe ein, die Horizontallinie aber im Verhältniß der Tangenten für den Halbmeſſer RO wie im 30. §; ſo iſt alles zur Zeichnung vorbereitet. Um nun eine Vertiefung wie BC zu ziehen, welche gegen die Tafel unter einem vorgeſchriebenen Winkel geneigt iſt; ziehe man zuerſt GP ſo, daß von R bis P auf der Horizontallinie ſoviele Grade liegen, als die Zahl der Grade des vorgeſchriebenen Winkels zu 90° ergänzen, hiernächſt aber BC mit GP parallel. Um ferner auf BC eine verlangte Anzahl perſpectiviſcher Ruthen oder Fuſſe abzuſchneiden, nehme man PQ = PO und ziehe GQ; man nehme ferner BD von ſovielen Ruthen oder Fuſſen, als BC faſſen ſoll, und ziehe DC mit GQ parallel, ſo hat BC die verlangte Länge.

Die perſpectiviſchen Höhen, und überhaupt, die Bilder aller mit der Tafel parallelen graden Linien ſind den abgebildeten Linien gleich: (44. §.) alſo hat es weiter keine Schwierigkeit, allerley Figuren im Horizont, oder auch eckigte Körper zu zeichnen, die ihre Grundfläche im Horizont haben.

Zuſatz.

54. Wenn das Auge in der erſten Verticalfläche ſteht, und ſeine optiſche Höhe über dem Horizont 45° beträgt; ſo fällt der Hülfspunct G mit O zuſammen.

ſammen. Alsdenn verwandelt ſich die orthographiſche Projection einer jeden Horizontal liegenden ebenen Figur in einen geometriſchen Grundriß, weil die Bilder aller graden Linien mit den Linien ſelbſt einerley Lage und Gröſſe behalten. Dieſe Projectionsart, welche unter allen die leichteſte iſt, nennt man die Vogelperſpectiv, auch wohl die Cavalierperſpectiv.

Anfangsgründe der Dioptrik.

Die 1. Erfahrung.

1. Ein Lichtſtrahl, der aus Luft in Glas oder Waſſer fällt, oder auch umgekehrt, aus Glaſe oder Waſſer wieder in Luft übergeht, behält nicht die Richtung einer graden Linie, er wird vielmehr da, wo Luft und Glas oder Waſſer an einander gränzen, in eine andre Lage gebrochen. So etwas erfolgt allemahl, wenn der Strahl aus einer durchſichtigen Maſſe in eine andre fällt, die mit jener nicht einerley Dichtigkeit hat.

Die 1. Erklärung.

2. Die Fläche, womit zwey durchſichtige Maſſen von ungleicher Dichtigkeit welche einen Lichtſtrahl durchgehen laſſen, aneinander gränzen, heißt von dem Erfolg der Brechung des Lichts die brechende

Fläche. Eine grade Linie, die in dem Punct, wo der Strahl auffällt, auf der brechenden Fläche ſenkrecht iſt; nennt man das **Einfallsloth**, der Winkel des einfallenden Strahls mit dem Einfallsloth wird kurz der **Neigunswinkel**, der Winkel des gebrochenen Strahls mit dem Einfallsloth aber der **gebrochene Winkel** genannt. Der **Brechungswinkel** iſt derjenige, welchen der einfallende und gebrochene Strahl einſchlieſſen. Man nennt übrigens denjenigen Theil der optiſchen Wiſſenſchaften im beſondern Sinn die **Dioptrik**, welcher die mathematiſche Theorie von den Erſcheinungen vorträgt, die das gebrochene Licht darſtellet.

Die 2. Erfahrung.

3. Der einfallende und gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallsloth in einerley Ebene. Der gebrochene Winkel iſt kleiner, als der Neigungswinkel, wenn der Strahl aus einer dünnern Maſſe in eine dichtere fällt, gröſſer aber in dem ungekehrten Fall. In einer und eben derſelben brechenden Maſſe bleibt das Verhältniß des Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels einerley, der Neigungswinkel ändre ſich, wie er wolle. Man nennt es für dieſe Maſſe das **Verhältniß der Refraction**, oder das **Brechungsverhältniß**.

Die Erfahrung lehrt ferner, daß dies Verhältniß beym Uebergange des Lichts aus der dichtern Maſſe in die dünnere in umgekehrter Ordnung eben ſo groß ſey, als beym Uebergange des Lichts aus der dünnern in die dichtere Maſſe, wenn in beyden Fällen die Maſſen einerley ſind.

Zuſatz.

Zuſatz.

4. Je kleiner der Neigungswinkel iſt, deſto klei- 185 Fig.
ner iſt der gebrochene Winkel, und der ſenkrecht auf- fallende Strahl geht ungebrochen durch. Fällt der Lichtſtrahl, EF auf eine ebene Glastafel, wovon ABCD einen Durchſchnitt in der Brechungsebene EFP vorſtellet; ſo iſt der zum zweytenmahl gebrochene Strahl GH beym Uebergange aus dem Glaſe in die Luft wieder mit dem einfallenden parallel.

Die 1. Aufgabe.

5. Der ſtrahlende Punct P wirft einen Licht- 188 Fig.
ſtrahl PM auf eine brechende Kugelfläche, wozu der Mittelpunct C gehört. Das Verhältniß der Refraction $= \mu : 1$ iſt gegeben, und die Lage des einfallenden Strahls PM gegen die Axe CP der Kugel: man ſoll die Lage des gebrochenen Strahls MW finden.

Aufl. Die Ebene durch C, P, und M ſchneidet die Kugel in einem gröſten Kreiſe, wovon MAN einen Bogen vorſtellet, und der Halbmeſſer CM nach R verlängert iſt in M auf der Kugelfläche ſenkrecht. (332. §. Geom.) In dieſer Ebene liegt auch MW, und wenn PM nach V verlängert wird, ſo iſt $\sin CMV : \sin CMW = \mu : 1$. Kürze halber ſetze man $CMV = \alpha$, $CMW = \beta$, $ACM = \gamma$, den Halbmeſſer $CA = CM = r$; ſo iſt $\sin\alpha = \mu \sin\beta$. Wenn alsdenn MW verlängert die Axe PC im Π ſchneidet; ſo iſt $C\Pi M = \gamma - \beta$ und $C\Pi = \frac{r \sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)}$. (29. §. Trig.)

Wenn nun auſſer dem Halbmeſſer CM die Entfernung CP und der dazwiſchen liegende Winkel γ gegeben ſind; ſo kann man CMP, alſo auch CMV

$=\alpha$ dem 34. §. Trig. gemäß, mithin ferner β finden: denn es iſt $\sin\beta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha$. Hiernächſt erhält man $C\Pi = \frac{r\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$, und $\sin C\Pi M = \frac{CM\sin\beta}{C\Pi}$, welches beydes die Lage des gebrochenen Strahls beſtimmt.

Der 1. Zuſatz.

6. Wenn die Winkel α, β, γ, klein ſind, ſo verhalten ſich ihre Sinus beynahe wie die Winkel ſelbſt, oder die mit dem Halbmeſſer $= 1$ zwiſchen ihren Schenkeln beſchriebenen Bogen. Alsdenn iſt $C\Pi = \frac{r\,.\,\beta}{\gamma-\beta}$, und $\beta = \frac{1}{\mu}\alpha$, alſo $\frac{\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\alpha}{\mu\gamma-\alpha}$, und $C\Pi = \frac{r\,.\,\alpha}{\mu\gamma-\alpha}$. Im Dreyeck CPM iſt ferner $CMP = 180° - \alpha$, alſo $\sin\gamma = \frac{PM\,.\,\sin\alpha}{CP}$, (29. §. Trig.) oder bey der hier angenommenen Vorausſetzung $\gamma = \frac{PM\,.\,\alpha.}{CP}$ Zugleich iſt beynahe $PM = AP$, alſo $\gamma = \frac{AP\,.\,\alpha}{CP}$, und man findet $C\Pi = \frac{r}{\mu(AP:CP)-1}$, oder $C\Pi = \frac{r\,.\,CP}{\mu\,.\,AP - CP}$. Noch ſetze man $AP = \delta$, ſo

ſo iſt $C\Pi = \frac{r(\delta + r)}{\mu\delta - \delta - r}$, oder $C\Pi = \frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r}$.

Der 2. Zuſatz.

7. Weil $A\Pi = C\Pi + AC$ iſt, ſo findet man $A\Pi = \frac{r(\delta + r)}{(\mu - 1)\delta - r} + r = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$, wenn die im vor. §. angenommene Vorausſetzung hier und im folgenden beybehalten wird.

Der 3. Zuſatz.

8. Je gröſſer $AP = \delta$ wird, deſto mehr nähert 189 Fig.
ſich $A\Pi$ dem Werth $\frac{\mu}{\mu - 1} r$. Hat der einfallende Strahl die Lage VM, wie es die 189 Figur vorſtellt, ſo daß derſelbe hinter der brechenden Kugelfläche mit der Axe in P zuſammen ſtoſſen würde; ſo iſt $AP = \delta$ negativ, und man findet $A\Pi = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta + r}$.

Der 4. Zuſatz.

9. Je gröſſer der Halbmeſſer einer Kugel wird, deſto mehr nähert ſich die Kugelfläche der Natur einer Ebene. Die Kugelfläche würde völlig eben 187
werden, wenn der Halbmeſſer unendlich groß würde. Fig.
In dem Fall erhält man $A\Pi = -\mu\delta$, und Π liegt vor der brechenden Fläche, wie es die 187 Figur vorſtellt. Der Mittelpunct C könnte auch wohl auf der Seite der brechenden Kugelfläche liegen, wo das Licht herkommt, wie es die 190 Figur vorſtellet, da 190
dann die hohle Seite das Licht auffängt: alsdenn wird Fig.
r in der Rechnung negativ, und man findet auch $A\Pi$ (7. §.) $= -\frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta + r}$ negativ. Das will

ſagen, wie in dem kurz vorhin betrachteten Fall, Π liege, nun vor der Kugelfläche auf eben der Seite, wo das Licht herkommt.

Der 5. Zuſatz.

10. Wenn die hohle Seite den Strahl in einer ſolchen Lage auffängt, daß er hinter der brechenden Fläche mit der Axe zuſammen ſtoſſen würde: ſo iſt auch δ negativ, und man hat $A\Pi$ (9. §.) $= \frac{\mu\delta r}{r-(\mu-1)\delta}$

$$= -\frac{\mu\delta r}{(\mu-1)\delta - r}.$$

Der 1. Lehrſatz.

188 Fig. 11. Alle aus einerley Punct P der Axe AP ſehr nahe bey dieſer Axe auffallende Strahlen laufen nach der Brechung in der Kugelfläche wieder in einerley Punct der Axe Π zuſammen.

Beweis. Für alle ſehr nahe bey A auffallende Strahlen bleiben die Winkel γ, α, β, ſo klein, daß die im 6. §. angenommene Vorausſetzung ohne merklichen Fehler beſtehen kann. Demnach iſt für alle dieſe Strahlen $A\Pi = \frac{\mu\delta r}{(\mu-1)\delta - r}$ (7. §.) einerley, und die Strahlen haben nach der Brechung eine ſolche Lage, daß ſie insgeſammt in Π zuſammen laufen.

Die 2. Erklärung.

12. Der Vereinigungspunct Π der Strahlen nach der Brechung in der Kugelfläche heißt auch ein Bild von P. Ein Auge, das hinter Π (188. Fig.) die Strahlen auffängt, nachdem ſie ſich alle in Π geſchnitten haben, hat eben die Empfindung, die es

haben

haben würde, wenn Π ſelbſt ein leuchtender Punct wäre. In eben dem Fall iſt Π ein wirkliches oder phyſiſches Bild, weil die Strahlen wirklich von Π her ins Auge kommen. In ſolchen Fällen, wenn Π vor der brechenden Kugelfläche liegt, (9. §.) fahren die Strahlen hinter derſelben jedoch in einer ſolchen Lage auseinander, als wenn ſie von Π herkämen: alsdenn iſt wenigſtens Π ein geometriſches Bild von P.

Die 3. Erklärung.

13. Ein Stück glatt geſchliffenes Glas heißt eine Glaslinſe, wenn es aus zweyen Kugelabſchnitten beſtehet, die beyde mit ihrer gemeinſchaftlichen kreisförmigen Grundfläche an einander ſchlieſſen. Eine grade Linie die alsdenn im Mittelpunct der gemeinſchaftlichen Grundfläche auf derſelben ſenkrecht iſt, heißt die Axe der Linſe, und in dieſer Axe, liegen die Mittelpuncte beyder Kugelflächen, welche die Linſe begränzen. (324. § Geom.)

Zuſatz.

14. Die 191. Figur ſtellet den Schnitt durch 191 Fig.
die Axe EC einer ſolchen Glaslinſe vor, C iſt der Vorderfläche DAB, und E der hintern Fläche DGB Mittelpunct. Wenn nun aus dem Punct P der Axe ein Strahlenkegel auf die Vorderfläche fällt, und nach der Brechung in der Vorderfläche die Strahlen im Vereinigungspunct Π zuſammen laufen würden; ſo leiden ſie in der Hinterfläche eine abermahlige Brechung, und laufen nach dieſer zweiten Brechung in einem andern Vereinigungspunct p als dem Bilde von P zuſammen. (10. §.)

Die 2. Aufgabe.

15. Die Entfernung $AP = \delta$ eines Puncts P in der Axe der Glaslinſe von der Vorderflä-

che iſt gegeben, nebſt den Halbmeſſern $CA = r$, $EG = \varrho$ beyder Flächen, und dem Verhältniß der Refraction für Luft und Glas: man ſoll die Entfernung Gp des Bildes p von der hintern Fläche finden.

Aufl. Zuerſt iſt $A\Pi = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$ (7. §.) Wenn ferner $G\Pi = \Delta$ und das Verhältniß der Refraction für den Fall $= \nu : 1$ geſetzt wird, wenn der Strahl aus dem Glaſe in die Luft fällt, ſo findet man $Gp = \frac{\nu\Delta\varrho}{\varrho - (\nu - 1)\Delta}$. 10. §.) Hier iſt nun $\nu : 1 = \frac{1}{\mu} : 1 = 1 : \mu$ (3. §.), alſo wird $Gp = \frac{\Delta \cdot \varrho}{\mu\varrho - (1 - \mu)\Delta}$, oder $Gp = \frac{\Delta \cdot \varrho}{(\mu - 1)\Delta + \mu\varrho}$. Ferner ſey die Dicke des Glaſes $AG = c$, ſo iſt $\Delta = A\Pi - c$, und man findet $Gp = \frac{(A\Pi - c)\varrho}{(\mu - 1)(A\Pi - c) + \mu\varrho}$, oder auch $GP = \varrho : \left(\mu - 1 + \frac{\mu \cdot \varrho}{A\Pi - c}\right)$.

Der 1. Zuſatz.

16. Gewöhnlich iſt die Dicke c des Glaſes in Vergleichung mit den übrigen Linien ſo klein, daß man c weglaſſen, und $G\Pi = A\Pi$ annehmen kann; da dann $Gp = \frac{A\Pi \cdot \varrho}{(\mu - 1) A\Pi + \mu\varrho}$ gefunden wird. Ferner war $A\Pi = \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\delta - r}$, alſo wird $(\mu - 1)$

$$A\Pi + \mu\varrho = \frac{\mu\ (\mu - 1)\ \delta r}{(\mu - 1)\,\delta - r} + \mu\ \varrho$$

$$= \frac{\mu\,(\mu + 1)\,\delta\ (r + \varrho) - \mu r\varrho}{(\mu - 1)\,\delta - r},$$ und man erhält

$$Gp = \frac{\delta r\varrho}{(\mu - 1)\,\delta\,(r + \varrho) - r\varrho}.$$

Der 2. Zuſatz.

17. Wenn das Glas eine ganze Kugel iſt, ſo hat man $r = \varrho$, und $c = 2r$. Das giebt $A\Pi - c$ $= \frac{\mu\delta r}{(\mu - 1)\,\delta - r} - 2r = \frac{2r(\delta + r) - \mu\delta r}{(\mu - 1)\,\delta - r}$, und $\frac{\varrho}{A\Pi - c} = \frac{(\mu - 1)\,\delta - r}{2(\delta + r) - \mu\delta}$: folglich findet man für die Kugel $Gp = \varrho : \left(\mu - 1 + \frac{\mu\varrho}{A\Pi - c}\right)$

$$(15.\ \S.) = r : \left(\mu - 1 + \frac{\mu\,(\mu - 1)\ \delta - \mu r}{2\,(\delta + r) - \mu\delta}\right),$$

oder $Gp = \frac{(2\,(\delta + r) - \mu\delta)\,r}{2\,(\mu - 1)\,(\delta + r) - \mu r}$.

Der 2. Lehrſatz.

18. Auf jeden Punct M der Glaslinſe kann ein Lichtſtrahl QM in einer ſolchen Lage fallen, daß nach der zweyten Brechung der aus dem Glaſe wieder in die Luft übergehende Strahl nq mit dem einfallenden QM wieder parallel wird. 191 Fig.

Beweis. Man ſetze die Winkel CEN $= \varepsilon$, ENM $=$ KN$\Pi = \eta$, und KN$p = \vartheta$; ſo ſind dieſe Winkel für den nach der erſten Brechung auf die hintere Fläche der Linſe fallenden Strahl MN das,

was

was die Winkel γ, α, β, für den aus P einfallenden Strahl PM an der Vorderfläche waren. Wenn ferner beyde Halbmeſſer CM, EN, einander in S ſchneiden, ſo ergiebt ſich aus der im 55. §. Geom. bewieſenen Eigenſchaft der Dreyecke, ECS, MNS, daß ECM + CEN = CMN + MNE ſey, alſo $\gamma + \varepsilon = \beta + \eta$ und $\varepsilon = \beta + \eta - \gamma$: auch ſchneiden beyde Halbmeſſer einander unter dem Winkel ESM = CSN = $\gamma + \varepsilon$. In der Brechungsebene ziehe man durch M und N ein Paar grade Linien, welche die Kreisbogen BAD, BGD, berühren, und einander ſelbſt in T ſchneiden: ſo iſt MTN = ESM 106. §. Geom.) = $\gamma + \varepsilon$.

Wenn nun die Stelle M, wo der Strahl auffällt, einerley bleibt, und AP wächſt, ſo wird der Neigungswinkel LMP = α = CMH, alſo auch β = CMN kleiner, und Π rückt der Linſe näher. Stellt man ſich AP unendlich groß vor; ſo iſt das der Fall, wenn der einfallende Strahl mit der Axe parallel iſt, alsdenn iſt LMP = $\alpha = \gamma$. Indem ſich ſolcher-Geſtalt der einfallende Strahl um M gegen ML zu drehet, kommt er endlich in eine Lage wie MV, in der er verlängert die Axe CE hinter der Linſe in W ſchneidet, da dann AW für den einfallenden Strahl VM das iſt, was AP für den Strahl PM war. Je kleiner LMV wird, deſto näher rückt W dem Glaſe, und wenn LMV verſchwindet, ſo fällt W mit C zuſammen: zugleich verſchwinden α und β, folglich wird $\varepsilon = \eta - \gamma$. Kommt endlich der einfallende Strahl in die Lage MQ an der andern Seite von ML, ſo iſt der Winkel LMQ = α dem vorigen LMP der Lage nach entgegengeſetzt: folglich iſt nun α mithin auch β negativ, und $\varepsilon = \eta - \beta - \gamma$.

Dieſer

Dieſer Winkel ε verſchwindet, und N fällt in G, wenn $\eta - \beta = \gamma$ wird, zugleich wird ESM = MTN $= \gamma$.

Wächſt LMQ $= - \alpha$ mithin zugleich β noch weiter, ſo wird ε negativ, weil N über G weg nach n rückt, und es iſt nun MTN $= \gamma - \varepsilon$, bis endlich MTN verſchwindet, wenn ε = CE$n = \gamma$ wird, da dann zugleich beyde Tangenten durch M und n in die parallele Lage kommen. Zugleich kommt der zum zweytenmahl gebrochene Strahl nq in eine mit dem einfallenden QM parallele Lage. (4. §.) Wenn man ſich nemlich ein paar Ebenen vorſtellet, welche die Glaslinſe in M und n berühren; ſo iſt es für dieſen beſondern Fall einerley, ob der ganze Raum zwiſchen den parallelen Ebenen mit Glaſe ausgefüllet iſt, oder nur der linſenförmige Raum.

Der 3. Lehrſatz.

19. **Alle ſo auf die Glaslinſe fallende Strahlen, daß ſie nach der zweyten Brechung in die mit der anfänglichen parallele Lage kommen, laufen nach der erſten Brechung durch einerley Punct π der Axe des Glaſes.** 192 Fig.

Beweis. Wenn der Strahl QM dieſe Eigenſchaft hat, ſo muß er mit der Axe der Linſe in einerley Ebene liegen, Vermöge der allgemeinen Formuln war im 5 §. $C\Pi = \frac{r \sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)}$, $A\Pi = C\Pi + r$ und $G\Pi = A\Pi - c = C\Pi + r - c$. Hier rückt nun Π nach π, aus $C\Pi$ und $A\Pi$ werden $C\pi$ und $A\pi$, wenn MTN $= \gamma + \varepsilon = 0$, alſo $\varepsilon = - \gamma$ geſetzt wird. Weil überdem $\varepsilon = \beta + \eta - \gamma$ bleibt, ſo iſt zugleich $\beta = - \eta$. Dieſemnach iſt nun $C\pi$

=

$= - \frac{r \sin \eta}{\sin(\eta + \gamma)}$, da dann das Zeichen − die der vorigen entgegen geſetzte Lage anzeigt, und es wird $A\pi = C\pi + \nu = r - \frac{r \sin \eta}{\sin(\eta + \gamma)}$.

Im Dreyeck EΠN iſt der Winkel bey $\Pi = \gamma - \beta$, und $EN\Pi = 180° - \eta$, alſo ferner $\varrho : \sin(\gamma - \beta) = G\Pi + \varrho : \sin \eta$, (29. §. Trig.) und $\varrho \sin \eta = (G\Pi + \varrho) \sin(\gamma - \beta)$. Man ſetze ſtatt GΠ den obigen Werth $G\Pi = C\Pi + r - c = \frac{r \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)} + r - c$, ſo erhält man $\varrho \sin \eta = r \sin \beta + (r + \varrho - c) \sin(\gamma - \beta.)$ Man ſetze ferner der angenommenen Bedingung gemäß $\beta = -\eta$, ſo erhält man $\varrho \sin \eta = - r \sin \eta + (r + \varrho - c) \sin(\eta + \gamma)$, und daraus folgt $\frac{\sin \eta}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{r + \varrho - c}{r + \varrho}$. Es war aber $A\pi = r \left(1 - \frac{\sin \eta}{\sin(\eta + \gamma)}\right)$: alſo findet man $A\pi = r \left(1 - \frac{r + \varrho - c}{r + \varrho}\right)$, oder $A\pi = \frac{r\,c}{r + \varrho}$. Weil dieſer Werth von γ nicht abhängt, ſo iſt derſelbe für alle der angenommenen Bedingung gemäß auffallende Strahlen einerley.

Zuſatz.

20. Für eine ganze Kugel iſt $r = \varrho$, $c = 2r$, alſo $A\pi = r$, wie der Natur der Kugel gemäß iſt.

Der 4. Lehrſatz.

192 Fig. 21. **Unter allen Lichtſtrahlen, die ein ſeitwärts der Axe befindlicher Punct Q auf die Glaslinſe *BADG* wirft, giebt es in der Ebe-**

ne

ne durch Q und die Axe der Linſe einen ſol-
chen, der nach der zweyten Brechung in ei-
ne Lage kommt, die mit derjenigen parallel
iſt, worin er auffiel.

Beweis. Wenn man CQ ziehet, ſo kann auf je-
de Stelle M des zwiſchen CP und CQ in der Ebene
PCQ liegenden Bogens AL ein Strahl in eben dieſer
Ebene ſo auffallen, wie es die Bedingung des Lehr-
ſatzes erfodert. (18. §.) Man ſetze QP auf der Axe
des Glaſes ſenkrecht, und es ſey π die Stelle der
Axe, worin ſie von dem Strahl nach der erſten Bre-
chung geſchnitten werden muß, alſo CMπ der ge-
brochene Winkel CMO der Neigungswinkel: ſo er-
hellet, daß CMπ, CMO, verſchwinden müſſen,
wenn M in A fällt, daß alſo in dem Fall OM ver-
längert durch P laufe. Wenn ferner M von A nach
L rückt, und allemahl $\sin CMO = \mu \sin CM\pi$ bleibt,
ſo muß OM verlängert anfangs PQ zwiſchen P und
Q ſchneiden, aber der Durchſchnittspunct mit PQ
wird bald über Q hinausrücken, weil er offenbar
ſchon jenſeits Q liegt, wenn M in L fällt. Alſo muß
es zwiſchen A und L einen Punct M geben, der die
Eigenſchaft hat, das der auffallende Strahl QM
nach der zweiten Brechung in eine Lage kommt, wel-
che mit derjenigen parallel iſt, worin er auffiel.

Zuſatz.

22. Wenn die ſcheinbare Entfernung PAQ des
Puncts Q von der Axe der Linſe aus der Mitte ihrer
Vorderfläche geſehen ein ſehr kleiner Winkel iſt, ſo
iſt auch PCQ, mithin um ſo mehr ACM = γ ſehr
klein. Ueberdem iſt AOM = $\alpha + \gamma$ ebenfalls klei-
ner als BAQ, folglich α, und eben darum auch β
ein

ein ſehr kleiner Winkel. Demnach wird der Strahl QMNq bey M und N ſo wenig gebrochen, daß er faſt in grader Linie durchgehet.

Die 4. Erklärung.

23. Unter allen Strahlen, die ein Punct, wie P oder Q auf eine Glaslinſe BD wirft, heißt derjenige der mittlere Strahl, auch der Hauptſtrahl, welcher entweder völlig, oder doch beynahe ungebrochen durchgehet.

Zuſatz.

24. Der Hauptſtrahl geht entweder völlig, oder doch beynahe mitten durch die Linſe.

Der 5. Lehrſatz.

192 Fig. 25. Wenn PQ eine grade auf CP ſenckrechte Linie, und PAQ ein ſehr kleiner Winkel iſt, ſo laufen unter den Strahlen, die jeder Punct wie Q in der Linie PQ auf das Glas ſendet, diejenigen, welche ſehr nahe bey dem Hauptſtrahl auf die Linſe fallen, nach der zweyten Brechung in einerley Punct q dieſes Hauptſtrahls zuſammen: auch liegt alsdenn q eben ſoweit hinter der Linſe, als der Vereinigungspunct p der aus dem Punct P der Axe auffallenden Strahlen.

Beweis. Alle Strahlen, die von Q ſehr nahe bey der Axe QC auf die Vorderfläche BAD fallen, laufen nach der erſten Brechung in einerley Punct K dieſer Axe zuſammen, und es iſt $LK = \frac{\mu . LQ . r}{(\mu - 1) LQ - r}$ (7. §.) Die aus P nahe bey der Axe CP auffallenden Strahlen laufen nach der erſten Brechung in Π zuſammen, und es iſt $A\Pi = \frac{\mu AP\, r}{(\mu - 1)\, AP - r}$. Weil

aber

aber PCQ ein ſehr kleiner Winkel iſt, ſo hat man ſehr nahe CQ = CP, alſo auch LQ = AP, mithin LK = AΠ, und ferner CK = CΠ. Man ziehe KE, ſo ſind CEK, CKE, ſehr kleine Winkel, und es iſt beynahe EC + CK, oder EΠ = EK, alſo auch GΠ = HK. Weil nun alle aus Q kommende ſehr nahe bey QC auffallende Strahlen nach der erſten Brechung gegen K laufen, und K in der Axe EK der hintern Fläche der Linſe liegt; ſo haben ſie nach der zweyten Brechung in eben dieſer Axe EK den Vereinigungspunct q, ſo wie die aus P kommenden Strahlen nach der zweyten Brechung in p zuſammen laufen. Vermöge des 10 §. iſt alsdenn $Gp = \frac{\mu . G\Pi \varrho}{(1-\mu) G\Pi + \varrho}$, und $Hq = \frac{\mu . HK . \varrho}{(1-\mu) HK + \varrho}$: alſo ſehr nahe $Gp = Hq$. Weil überdem qNK, mithin NEq, EqN, ſehr kleine Winkel ſind; ſo iſt wiederum ſehr nahe EN + Nq = Eq = EH + Hq, alſo Nq = Hq, mithin auch Nq = Gp.

Zuſatz.

25. Wenn das Glas eine ganze Kugel iſt, ſo geht von jedem Punct wie Q ein Strahl durch der Kugel Mittelpunct. Derſelbe wird gar nicht gebrochen, und er iſt unter den aus Q auffallenden Strahlen der Hauptſtrahl: mithin findet der Satz auch bey der Kugel ſeine Anwendung.

Die 5. Erklärung.

26. In eben dem Sinne, wie p ein Bild von P iſt, kann auch q ein Bild von Q heiſſen. So hat jeder Punct der Linie PQ ſein Bild hinter der Linſe in dem daher auffallenden Hauptſtrahl, alle dieſe 192 Fig.

Bilder zuſammen liegen in der graden Linie pq und machen ein Bild der ganzen Linie aus. Wenn alſo auch ſonſt ein Gegenſtand, deſſen ſcheinbare Gröſſe aus der Mitte der Linſe geſehen nur klein iſt, Licht auf die Linſe wirft; ſo entſteht hinter der Linſe ein Bild des Gegenſtandes, welches demſelben ſonſt in allem ähnlich iſt, nur in verkehrter Stellung.

Der 1. Zuſatz.

27. Wenn PQ ein Halbmeſſer des Objects iſt, ſo iſt pq ein Halbmeſſer des Bildes, die Dreyecke POQ, $p\omega q$ ſind einander ähnlich, und man hat $PQ : pq = OP : \omega p$. Iſt die Dicke des Glaſes in Vergleichung mit den übrigen Linien ſehr klein; ſo iſt auch ohne merklichen Fehler $OP = AP$, und $\omega p = Gp$: alſo verhalten ſich alsdenn die Halbmeſſer des Gegenſtandes und des Bildes, wie ihre Entfernungen vom Glaſe.

Der 2. Zuſatz.

28. In allen den Fällen, wenn die Dicke des Glaſes ſo klein iſt, daß man ſie ohne merklichen Fehler aus der Rechnung weglaſſen darf, iſt $POQ = p\omega q$ der ſcheinbare Halbmeſſer des Objects aus der Mitte des Glaſes geſehen, und der Halbmeſſer des Bildes iſt die Tangente dieſes ſcheinbaren Halbmeſſers für den Halbmeſſer ωp, oder Gp.

Der 3. Zuſatz.

29. In dem Fall, wenn das Glas eine ganze Kugel iſt, verhalten ſich die Halbmeſſer des Gegenſtandes und des Bildes gegen einander, wie ihre Entfernungen vom Mittelpunct der Kugel.

Die 6. Erklärung.

30. Der Punct in der Axe der Glaslinſe, worin Strahlen die nahe bey der Axe mit ihr parallel ein-

einfallen, nach dem Durchgange durchs Glas wieder zuſammen laufen, heißt der Brennpunct der Linſe, und die Brennweite iſt die Entfernung dieſes Brennpuncts von der Glaslinſe. Der Nahme rührt von der Wirkung des Sonnenlichts in dem kreisförmigen Bilde der Sonne hinter der Glaslinſe her, wenn man das Sonnenlicht durchſcheinen läßt. Wenn dieſer Raum des Bildes vielmahl kleiner iſt als der kreisförmige Raum der Glaslinſe, welche die Sonnenſtrahlen auffängt; ſo verurſachen die in den engern Raum zuſammengebrachten Sonnenſtrahlen ſoviele Hitze, daß ſie entzündliche Maſſen in Brand ſetzen. Der kreisförmige Raum, den das Sonnenbild einnimmt, heißt daher auch der Brennraum und was man gewöhnlich Brennpunct nennt, iſt eigentlich des Brennraums Mittelpunct.

Zuſatz.

31. Die Brennweite der Glaslinſe iſt die Entfernung des Bildes von der Glaslinſe für den beſondern Fall, wenn der Gegenſtand davon ſoweit entfernt iſt, daß alle von einerley Punct deſſelben auf die Linſe fallende Strahlen nicht merklich von der parallelen Lage abweichen. Eigentlich wäre es die Entfernung des Bildes für einen unendlich weit entfernten Gegenſtand.

Die 3. Aufgabe.

32. Die Halbmeſſer der beyden ſphäriſchen Flächen der Linſe, und das Verhältniß der Refraction ſind gegeben: man ſoll die Brennweite finden.

Aufl. Wenn die Entfernung des Bildes Gp (192. Fig.) überhaupt $= x$ geſetzt wird, ſo iſt x

$= \frac{\delta r \varrho}{(\mu - 1)\delta(r + \varrho) - r\varrho}$, (16. §.) und dieſer Ausdruck muß die Brennweite geben, wenn δ unendlich groß angenommen wird. (31. §.) Wenn alſo die Brennweite $= f$ geſetzt wird, ſo findet man

$$f = \frac{r\varrho}{(\mu - 1)(r + \varrho)}.$$

Der 1. Zuſatz.

33. Wenn eben nicht die gröſte Schärfe der Rechnung nöthig iſt, ſo kann den Verſuchen gemäß für Luft und Glas $\mu = \frac{3}{2}$ angenommen werden, und das giebt $f = \frac{r\varrho}{\frac{1}{2}(r + \varrho)} = \frac{2r\varrho}{r + \varrho}$.

Der 2. Zuſatz.

34. Für die Kugel iſt $x = \frac{2(\delta + r) - \mu\delta}{2(\mu - 1)(\delta + r) - \mu r} \cdot r$, (17. §.) alſo findet man $f = \frac{(2 - \mu)r}{2(\mu - 1)}$.

Wenn alſo $\mu = \frac{3}{2}$ geſetzt werden kann, ſo iſt $f = \frac{1}{2}r$.

Der 3. Zuſatz.

35. Wenn das Glas, eine ſehr geringe Dicke hat, ſo bleibt die Brennweite einerley, man mag die eine oder die andre Seite dem Object zukehren.

Die 4. Aufgabe.

36. Die Brennweite der Linſe und die Entfernung des Objects iſt gegeben, man ſoll die Entfernung des Bildes finden.

Aufl. Es iſt $x = \frac{\delta r\varrho}{(\mu - 1)\delta(r + \varrho) - r\varrho}$, alſo auch $x = \delta . \frac{r\varrho}{(\mu - 1)(r + \varrho)} : \left(\delta - \frac{r\varrho}{(n - 1)(r + \varrho)}\right)$,

und

und $\frac{r\varrho}{(\mu - 1)(r + \varrho)} = f$, (31. §.) alſo $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$.

Für die ganze Kugel iſt $x = \frac{((2-\mu)\delta + 2r)r}{2(\mu-1)\delta - (2-\mu)r}$. (17. §.) Man multiplicire im Zähler und Nenner mit $\frac{2-\mu}{2(\mu-1)}$; ſo wird der Nenner $= (2 - \mu) \left(\delta - \frac{(2-\mu)r}{2(\mu-1)}\right) = 2 - \mu (\delta - f)$, und der Zähler $= ((2-\mu)\delta + 2r) . \frac{(2-\mu)r}{2(\mu-1)} = ((2-\mu)\delta + 2r) . f$. Demnach findet man $x = \frac{((2-\mu)\delta + 2r)f}{(2-\mu)(\delta - f)}$. Die Gleichung $\frac{(2-\mu)r}{2(\mu-1)} = f$ giebt ferner $r = \frac{2(\mu-1)f}{2-\mu}$, mithin wird auch $x = \frac{((2-\mu)^2\delta + 4(\mu-1)f)f}{(2-\mu)^2(\delta - f)}$, oder $x = \frac{\delta f}{\delta - f} + \frac{4(\mu-1)f}{(2-\mu)^2(\delta-f)} . f = \left(\delta + \frac{4(\mu-1)f}{(2-\mu)^2}\right) . \frac{f}{\delta - f}$.

Der 1. Zuſatz.

37. Wird $\mu = \frac{3}{2}$ geſetzt, ſo erhält man $x = \delta + 8f) \frac{f}{\delta - f}$.

Der 2. Zuſatz.

38. Weil f einerley bleibt, welche Seite einer dünnen Glaslinſe auch dem Object zugekehrt ſeyn mag, ſo bleibt auch die Entfernung des Bildes in beyden Fällen einerley.

Der 3. Zuſatz.

39. Wenn die Stelle des Bildes mit der Stelle des Objects verwechſelt wird, ſo fällt das Bild dahin, wo vorher das Object ſeine Stelle hatte. Man ſetze $\delta = Gp$, und nehme in p die Stelle des Objects an, ſo iſt $x = \frac{Gp \cdot f}{Gp - f}$. Man ſetze ferner $Gp = \frac{AP \cdot f}{AP - f}$, ſo wird $Gp - f = \frac{ff}{AP - f}$, und man findet $x = AP$.

Der 4. Zuſatz.

40. Wenn das Object um die Brennweite des Glaſes davon ertfernt iſt, ſo giebt es gar kein Bild: alle Strahlen, die von einerley Punct des Objects auf das Glas fallen, kommen nach der Brechung in eine Lage, die mit der Lage des dazu gehörigen Hauptſtrahls parallel iſt.

Die 7. Erklärung.

41. Der Nahme einer Glaslinſe iſt in der Dioptrik in einer etwas allgemeinen Bedeutung gewöhnlich. Zuweilen iſt das Glas an einer Seite eben, es ſtellet alsdenn nur einen Kugelabſchnitt vor, deſſen Axe zugleich die Axe des Glaſes iſt, und es heißt ein Planconvex Glas. Ferner nennt man ein ſolches Glas ein Hohlglas, oder eine Hohllinſe, und unterſcheidet es vom convexen Glaſe, wenn entweder alle beyde ſpäriſche Flächen auswärts hohl ſind, oder

oder auch nur eine davon ihre hohle Seite auswärts hat, und die andre Seite eben geſchliffen iſt. Die kreisförmigen Grundflächen dieſer Kugelſegmente, wenn ſie gleich nicht allemahl in einerley Ebene zuſammen fallen können, müſſen jedoch einander parallel, und die grade Linie zwiſchen ihren Mittelpuncten muß auf beyden ſenkrecht ſeyn, und die Axe des Glaſes abgeben. Endlich kann auch noch die eine Seite hohl und die andre erhaben ſphäriſch ſeyn. Wenn alsdenn die erhabene Seite einen kleinern Halbmeſſern hat, alſo ſtärker gekrümmt iſt, als die hohle Seite, ſo heißſt das Glas von der Figur des Schnitts durch ſeine Axe ein **Meniſcus**, oder mondförmiges Glas. Wenn dagegen die erhabene Seite einen gröſſern Halbmeſſer hat, mithin weniger gekrümmt iſt, als die hohle Seite, ſo nennt man es ein Concavconvexes Glas.

Der 1. Zuſatz.

42. Für die auf beyden Seiten convexe Linſe bleibt der allgemeine Ausdruck für die Brennweite $f = \frac{r\varrho}{(\mu - 1)(r + \varrho)}$ (32. §.) unverändert, alſo auch die Entfernung des Bildes $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$. (35. §.) So lange die Entfernung δ des Objects gröſſer iſt, als die Brennweite f, ſo lange hat das Bild ſeine Stelle hinter dem Glaſe, es nähert ſich dem Glaſe und dem Brennraum deſto mehr, je gröſſer δ iſt, und der Brennraum ſelbſt iſt das nächſte und zugleich das kleinſte Bild hinter dem Glaſe.

Je näher das Object dem Glaſe rückt, deſto weiter entfernt ſich das Bild davon, und wird zugleich

deſto gröſſer, bis es endlich ganz wegfällt, wenn $\delta = f$ iſt. Für noch kleinere δ wird x negativ. Das heißt, die von jedem Punct des Objects herkommenden Strahlen fahren nach der Brechung im Glaſe hinter demſelben aus einander in einer ſolchen Lage, als kämen ſie von einem Punct vor dem Glaſe her. Alle dieſe geometriſchen Vereinigungspuncte machen nun ein geometriſches Bild des Objects aus.

Wenn δ negativ iſt, das heißt, wenn die Strahlen in einer ſolchen Lage auf das Glas fallen, daß ſie hinter demſelben zuſammen laufen würden; ſo iſt $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$ allemahl poſitiv, und kleiner als f. Es giebt alſo hinter dem Glaſe ein wirkliches Bild, das dem Glaſe näher liegt, als der Brennraum. Strahlen, welche durch die Brechung in einer Glaslinſe ſchon in die Lage gebracht ſind, daß ſie nach den Puncten eines Bildes zuſammen laufen, kann man mit einer andern Glaslinſe, die alsdenn ein Collectivglas heißt, vor ihrer Vereinigung auffangen: alsdenn iſt für das Collectivglas δ negativ, und $x = \frac{\delta f}{\delta + f}$.

Der 2. Zuſatz.

43. Das Planconvexe Glas hat eine ebene Seitenfläche, und das iſt ſoviel, als wenn eine von beyden ſphäriſchen Flächen einen unendlich groſſen Halbmeſſer hätte. Setzt man dieſem gemäß $\varrho = \infty$, ſo wird die Brennweite $f = \frac{1}{\mu - 1} r$. Uebrigens hat das Glas mit der doppelt convexen Linſe einerley Eigenſchaften. Wird $\mu = \frac{3}{2}$ genommen, ſo iſt $f = 2r$.

Der 3. Zuſatz.

44. Der Meniſcus hat eine hohle Seite, der Halbmeſſer dieſer hohlen Seite iſt negativ, und es iſt einerley, ob man r oder ϱ negativ nimmt. Dieſer negative Halbmeſſer iſt alsdenn gröſſer als der poſitive. Es ſey ϱ negativ, ſo iſt $f = \frac{-r\varrho}{(\mu-1)(r-\varrho)} = \frac{r\varrho}{(\mu-1)(\varrho-r)}$ poſitiv. Das Glas hat einen wirklichen Brennraum, und kommt in Anſehung der übrigen Eigenſchaften mit dem doppeltconvexen und planconvexen Glaſe überein.

Der 4. Zuſatz.

45. Für die doppelte Hohllinſe ſind r und ϱ beyde negativ, alſo iſt $f = \frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{r\varrho}{-r-\varrho} = -\frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{r\varrho}{r+\varrho}$ negativ, und das Glas hat keinen wirklichen ſondern einen geometriſchen Brennraum. Ferner wird $x = \frac{-\delta f}{\delta + f}$ ſo lange allemahl negativ, als δ poſitiv bleibt: alſo iſt nur ein geometriſches Bild vorhanden, wie beym convexen Glaſe in dem Fall, wenn die Entfernung des Objects kleiner als die Brennweite iſt. Wird δ negativ, ſo iſt $x = \frac{\delta f}{f-\delta}$ ſo lange poſitiv, als $\delta < f$ bleibt. Das will ſagen: wenn die Strahlen ſo auf das Glas fallen, daß ſie hinter demſelben in einer ſolchen Entfernung vom Glaſe zuſammen laufen würden, die kleiner, als die Brennweite iſt; ſo giebt es hinter demſelben ein wirk-

liches Bild in einer ſolchen Entfernung vom Glaſe, die gröſſer als δ iſt.

Der 5. Zuſatz.

46. Für das einfache Hohlglas iſt die Brennweite $f = - \frac{1}{\mu - 1} r$ (43. §.) ebenfalls negativ, und es hat mit der doppelten Hohllinſe einerley Eigenſchaften.

Der .6 Zuſatz.

47. Das concavconvexe Glas hat einen negativen Halbmeſſer, der kleiner als der poſitive iſt. Man nehme ϱ dafür an, ſo iſt die Brennweite $f = \frac{-r\varrho}{(\mu-1)(r-\varrho)}$ negativ, und die Eigenſchaften des Glaſes ſind mit den Eigenſchaften der doppelten und einfachen Hohllinſe einerley.

Die 8. Erklärung.

48. Glaslinſen, die ein wirkliches Bild der Sache, wovon das Licht hindurch fällt, darſtellen können, heiſſen Sammlungsgläſer: Die übrigen aber Zerſtreuungsgläſer, welche allemahl dem durchfallenden Licht, wenn es von einem wirklichen Object herkommt: eine ſolche Lage geben, als käme es von Puncten eines vor dem Glaſe befindlichen Bildes her.

Zuſatz.

49. Das doppelte und einfache Converglas und der Meniſcus ſind Samlungsgläſer: (42. 43. 44. §.) Das doppelte und einfache Hohlglas aber und das concavconvexe Glas ſind Zerſtreuungsgläſer. (45. 46. 47. §.)

Die 3. Erfahrung.

50. Was oben im 9. §. der Optik die Geſichtsaxe hieß, iſt eigentlich die Axe einer mehr weichen als harten

harten ſehr durchſichtigen linſenförmigen Maſſe im innern des Auges, die den Nahmen der Kryſtallinſe führt. Sie hat eine ſolche Lage, daß ihre Axe zugleich die Axe des ganzen Augapfels abgiebt, und ſie hat in Abſicht auf die Strahlenbrechung eben die Wirkung, wie eine Glaslinſe. Von auſſen iſt der Augapfel mit einer harten elaſtiſchen Haut umgeben, die gegen den Vordertheil des Auges zu durchſichtig wird, und daſelbſt die Hornhaut heißt. An dieſer Hornhaut liegt im innern des Auges eine andre zarte Haut, die ſo genannte Aderhaut, welche gegen die Hornhaut zu die innere Fläche dieſer Haut verläßt, und nun für die Kryſtallinſe eine ringförmige Einfaſſung abgiebt. An der innern Fläche der Aderhaut ſchließt die Netzhaut an, die hinten im Auge mit dem Geſichtsnerven zuſammen hängt. Zwiſchen der Kryſtallinſe und der Hornhaut befindet ſich in einem beſondern Häutchen die kreisförmige Oefnung, welche der Stern heißt, der ſich enger zuſammen ziehet, oder erweitert, nachdem ſtärkeres oder ſchwächeres Licht ins Auge fällt. Zwiſchen der Kryſtallinſe und Hornhaut iſt der innere Raum des Auges mit der wäſſerigen Feuchtigkeit, und hinter der Kryſtallinſe mit der ſo genannten glasartigen Feuchtigkeit angefüllet.

Zuſatz.

51. Lichtſtrahlen, die von einem weit genug entfernten Gegenſtande aus einem ſolchen Punct, der in der Augenaxe oder nahe dabey liegt, auf die Hornhaut fallen, werden in der wäſſerigen Feuchtigkeit in eine ſolche Lage gebracht, daß ſie hinter der Hornhaut ihre Vereinigungspuncte haben, und daſelbſt ein Bild des Gegenſtandes machen würden, wovon

ſie

ſie herkommen. In dieſer Lage fallen ſie auf die Kryſtallinſe, und werden durch die darin erfolgende zwiefache Brechung in ein der Linſe noch näher liegendes kleineres Bild zuſammengebracht. Das Object könnte wohl dem Auge ſo nahe ſeyn, daß das erſte Bild, was die an der Hornhaut gebrochenen Strahlen machen würden ein blos geometriſches bliebe: alsdenn aber würden dennoch die in einer ſolchen Lage auf die Kryſtallinſe fallenden Strahlen, als wenn ſie von dem geometriſchen Bilde kämen, hinter der Linſe ein andres phyſiſches Bild zuwege bringen. Demnach kommt es auf die Entfernung des Gegenſtandes vom Auge an, ob die Vereinigungsweite hinter der Linſe grade ſo groß iſt, als die Entfernung der Linſe von der Netzhaut, da dann in dieſem Fall auf der Netzhaut im Auge, wie im finſtern Zimmer auf einer weiſſen Fläche, wenn das Licht durch eine Glaslinſe hinein ſcheint, ein deutliches Bild des Objects zuwege gebracht wird.

Die 4. Erfahrung.

52. Mit der Entſtehung dieſes Bildes auf der Netzhaut iſt zugleich die Empfindung verbunden, daß wir den Gegenſtand ſehen, wovon das im Bilde vereinigte Licht herkommt. Wenn das Bild deutlich iſt, ſo iſt auch unſre Empfindung deutlich, widrigenfalls aber undeutlich: doch wird die vollkommenſte Deutlichkeit des Bildes zum deutlichen Sehen eben nicht erfodert.

Der 1. Zuſatz.

53. Das Bild auf der Netzhaut im Auge iſt bey entfernten Sachen undeutlich, wenn es bey nahe liegenden Sachen deutlich iſt, weil alsdenn das deutliche Bild entlegener Sachen der Kryſtallinſe näher

liegt

liegt, als die Netzhaut. Die Strahlen welche ſich in den Puncten des deutlichen Bildes vereinigen, fahren hinter denſelben auseinander, ſie breiten ſich auf der Netzhaut in Zerſtreuungskreiſen aus, und verurſachen ein undeutliches Bild. Dieſe Beſchaffenheit hat es mit den Augen ſolcher Perſonen, die man **Kurzſichtige** nennt. Wenn dagegen das Auge **weitſichtig** iſt, ſo fällt das deutliche Bild eines weit erfernten Gegenſtandes auf die Netzhaut, und das deutliche Bild einer nahe gelegenen Sache iſt von der Kryſtallinſe weiter, als die Netzhaut entfernt. Dieſe ſchneidet alſo die Kegel der nach den Puncten des deutlichen Bildes zuſammen laufenden Lichtſtrahlen vor ihrer Vereinigung, und das zu jedem Strahlenkegel gehörige Licht breitet ſich ebenfalls in einen Zerſtreuungskreis aus: deßwegen wird das Bild, und mit demſelben die Empfindung undeutlich.

Der 2. Zuſatz.

54. Einer weitſichtigen Perſon kann eine Glas- 193
linſe AB zum deutlichen Sehen einer nahe gelegenen Fig.
Sache PQ behülflich ſeyn, wenn ſie ſelbige durch das Glas betrachtet. Es muß nemlich die Entfernung CP des Objects vom Glaſe etwas keiner als die Brennweite ſeyn, ſo werden die von jedem Punct P oder Q herkommende auf das Glas fallende Strahlen PD, PE, QD, QE, durch die Brechung in eine ſolche Lage gebracht, als wenn ſie von den weiter entfernten Puncten *p*, *q*, herkämen. (42. §.) Die Strahlen, wenn ſie das Auge nun in der Gegend O auffängt, machen ein Bild, das der Kryſtallinſe näher liegt, als in dem Fall, wenn das Auge ohne Glas die Sache betrachtet. Dem Glaſe muß nur die rechte Figur gegeben werden, damit das deutliche Bild auf die Netzhaut falle.

Der 3. Zuſatz

194 Fig. 55. Auch einer kurzſichtigen Perſon kann eine Hohllinſe AB zum ähnlichen Gebrauch dienen, um eine entfernte Sache PQ deutlich zu ſehen. Eine ſolche Hohllinſe bringt das von jedem Punct P oder Q herkommende Licht durch die Brechung in eine ſolche Lage, als wenn es von einem der Linſe näher liegenden Punct p oder q herkäme, (45. §.) Die in einer ſo veränderten Lage ins Auge bey O kommenden Lichtſtrahlen machen alsdenn ein Bild, das von der Kryſtallinſe weiter entfernt iſt, als in dem Fall, wenn die Sache ohne Glas betrachtet wird: alſo kommt es nur auf die rechte Figur des Glaſes an, damit das deutliche Bild auf die Netzhaut falle.

Die 5. Aufgabe.

56. Eine Perſon kann auf eine gewiſſe Weite δ nicht deutlich ſehen, ſondern auf eine andre Entfernung α: man ſoll die Brennweite eines Glaſes ſuchen, das vors Auge gehalten die von dem Object in der Entfernung δ herkommenden Strahlen nach der Brechung ſo ins Auge bringt, als wenn daſſelbe um den Abſtand α entfernt wäre.

193 Aufl. Man ſetze $CP = \delta$, $Cp = \alpha$, die Brenn-
194 Fig. weite des Glaſes f, ſo iſt allemahl $\alpha = \frac{\delta f}{\delta - f}$: (36. §.) hier aber muß α negativ ſeyn, weil jene allgemeine Rechnung vorausſetzt, daß p an der andern Seite des Glaſes liege. Demnach ſetze man $\frac{\delta f}{\delta - f} = -\alpha$, ſo wird $\delta f\ \alpha f - \alpha\delta$, und

$\alpha\delta$

$\alpha\delta = (\alpha - \delta) f$, folglich $f = \frac{\alpha\delta}{\alpha - \delta}$.

Der 1. Zuſatz.

57. Für den Kurzſichtigen muß $\alpha < \delta$ ſeyn, daher wird f negativ, und das Glas muß eine Hohllinſe ſeyn.

Der 2. Zuſatz.

58. Aus der Stelle O des Auges würde das Object ohne Glas unter dem optiſchen Winkel POQ geſehen werden, welches durchs Glas unter dem optiſchen Winkel pOq erſcheint: durchs erhabene Glas erſcheint alſo das Object etwas vergröſſert, und durchs Hohlglas verkleinert.

Die 8. Erklärung.

59. Optiſche Werkzeuge, die man aus zweyen oder mehrern hinter einander geſtellten in einer Röhre eingeſchloſſenen Glaslinſen zuſammenſetzt, heiſſen **Fernröhre, Teleſcope**, wenn ſie weit entfernte durch die Gläſer geſehene Sachen deutlich und unter einem vergröſſerten Sehewinkel darſtellen. Solche Werckzeuge aber heiſſen im beſondern Sinn **Vergröſſerungswerkzeuge, Microſcope**, die dem Auge behülflich ſind, ſehr kleine dem Auge nahe liegende Sachen unter einem gröſſeren Sehewinkel, als ohne Gläſer deutlich zu ſehen. Bey Fernröhren ſowohl, als auch bey Microſcopen, wenn dieſe aus mehrern hinter einander geſtellten Gläſern beſtehen, und zuſammengeſetzte **Microſcope** heiſſen, nennt man das erſte dem Object zugekehrte Glas das Objectivglas, die übrigen aber Augengläſer. In allen Fällen ſtellt man die Gläſer ſo hinter einander, daß ihre Axen in eine grade Linie zuſammen fallen.

Zuſatz.

Zuſatz.

60. Eine Perſon, die ein mittelmäſſig gutes Geſicht hat, ſiehet deutlich, wenn die Strahlen, welche von einerley Punct einer Sache herkommen, entweder völlig oder doch beynahe in paralleler Lage auf den Stern im Auge fallen: dieſes iſt bey den Rechnungen über die Anordnung optiſcher Werkzeuge die gewöhnliche Vorausſetzung. Bey dem allen kann aber doch auch der Kurzſichtige ein ſolches Werckzeug brauchen: er muß nur die Entfernung der Gläſer, oder wenn es nur eine Linſe iſt, die Entfernung dieſer Linſe vom Object um ein geringes ändern, damit die von jedem Punct des Objects herkommende Strahlen in mehraus einander fahrender Lage den Stern im Auge treffen.

Die 9 Erklärung.

61. Diejenige Zahl heißt für ein Fernrohr die Vergröſſerungszahl, welche angiebt, wievielmahl der Geſichtswinkel durch die Gläſer gröſſer erſcheine, als wenn das Object ohne Gläſer in derſelben Entfernung geſehen würde, in der man es durch die Gläſer betrachtet. Für ein Microſcop ſoll die Vergröſſerungszahl angeben, wievielmahl das Object durch die Gläſer geſehen gröſſer erſcheint, als es ohne Gläſer in derjenigen Entfernung deutlich würde geſehen werden, in der ein mittelmäſſig gutes Auge ſonſt dergleichen Sachen, die ſchon ins kleine fallen, deutlich ſiehet.

Der 6. Lehrſatz.

62. Eine Sammlungslinſe als Objectivglas mit einer andern Sammlungslinſe von kürzerer Brennweite ſo verbunden, daß beyde um die Summe ihrer Brennweiten von einander

ander entfernt ſind, dient als Fernrohr, welches eine weit entfernte Sache zwar verkehrt, aber doch deutlich, und ſovielmahl vergröſſert vorſtellet, als die Brennweite des Oculars in der Brennweite des Objectivs enthalten iſt.

Beweis. Die von jedem Punct P oder Q des weit entfernten Objects auf das Objectiv AB fallenden Lichtſtrahlen ſind einander faſt parallel, und die Entfernung Cp des Bildes iſt daher der Brennweite des Objectivs gleich. Hinter dem Bilde fahren die in jedem Punct deſſelben zuſammen laufenden Strahlen wieder auseinander, und werden vom Ocular DE eben ſo aufgefangen, als wenn das Bild pq ein ſtrahlendes Object wäre. Wenn alſo das Ocular DE ein Sammlungsglas, und die Entfernung Fp der Brennweite deſſelben gleich iſt; ſo kommen die aus jedem Punct wie q auffallenden Strahlen nach der Brechung in die unter ſich und mit dem Hauptſtrahl qF parallele Lage. (40 §.) Ein ſonſt gutes eben nicht kurzſichtiges Auge, das in O die Strahlen auffängt, ſieht alſo das Object PQ deutlich (60 §.) aber verkehrt, weil das aus Q herkommende Licht in der Richtung GO ins Auge kommt, als wenn es von einem Punct unter der Axe herkäme. Aus O ohne Gläſer geſehen würde das Object PQ unter einem von PCQ $= p$Cq nicht merklich verſchiedenen Winkel erſcheinen, da es durch die Gläſer unter dem Winkel FOG $= p$Fq geſehen wird. 197 Fig.

Für den Sinus totus = 1 iſt aber tang $p\mathrm{F}q = \frac{pq}{p\mathrm{F}}$,

tang $p\mathrm{C}q = \frac{pq}{\mathrm{C}p}$ (28. §. Trig.) alſo tg. $p\mathrm{F}q$: tg.

$pCq = \frac{1}{Fp} : \frac{1}{Cp} = Cp : Fp$. Weil dieſe Winkel nur klein ſind, ſo verhalten ſie ſich beynahe, wie ihre Tangenten; mithin iſt die Vergröſſerungszahl $= \frac{Cp}{Fp}$.

Lehrſatz.

63. **Wenn ein Winkel ſo klein iſt, daß er höchſtens einige wenige Minuten beträgt; ſo kann man dieſen Winkel ſelbſt durch die Zahl ausdrücken, welche die Länge ſeines Sinus, oder ſeiner Tangente für den Halbmeſſer = 1 angiebt. Das iſt zugleich ſehr nahe die Länge des mit dem Halbmeſſer = 1 zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchriebenen Kreisbogens, und man findet alsdenn ſehr leicht dem 235 § Geom. gemäß, die Zahl der Grade Minuten und Secunden; die der Winkel faſſet.**

Exempel. Geſetzt es wäre des Winkels PCQ Tangente = 0,010763, allemahl für den Halbmeſſer = 1 verſtanden; ſo iſt die Länge der halben Peripherie = 3,1416 (230 §. Geom.) und man ſetzt an 3,1416 : 0,010763 = 180° oder 10800′ zur geſuchten Zahl der Grade oder Minuten, die der Winkel faſſet. Hier fände man 37 Minuten.

Die 9. Erklärung.

64. Der Raum welcher durchs Fernrohr überſehen werden kann, heißt das Geſichtsfeld, er iſt wegen der Figur der Gläſer kreisförmig, und man beurtheilet die Gröſſe dieſes Geſichtsfeldes aus dem halben oder ganzen ſcheinbaren Durchmeſſer deſſelben, ſo wie es ohne Gläſer würde geſehen werden.

Der 1. Zuſatz.

65. Wenn Q einer von den äuſſerſten Puncten des Objects und QC der daher kommende Haupt- ſtrahl iſt, der das Augenglas in G trift, und nach der Brechung die Axe der Gläſer in O ſchneidet; ſo überſiehet das Auge aus O das Geſichtsfeld, deſſen Maaß der ſcheinbare Halbmeſſer PCQ = FCG ab- giebt. Man ſetze die Brennweite des Objectivs $= p$, des Oculars $= q$, den Oefnungshalbmeſſer FG des Oculars $= z$, den ſcheinbaren Halbmeſſer des Geſichtsfeldes $= \varphi$; ſo iſt $\varphi = FCG = \frac{FG}{FC}$ (63. §.) $= \frac{z}{p+q}$. Weil ferner alle durch C fallende Haupt- ſtrahlen hinter dem Ocular in O ihren Vereinigungs- punct haben; ſo iſt $FO = \frac{FC \cdot q}{FC - q}$, (36. §.) mit- hin auch $FO = \frac{(p+q)\,q}{p} = \left(1 + \frac{q}{p}\right) q$ bey- nahe $= q$, wenn q in Vergleichung mit p nur klein iſt. 197 Fig.

Der 2. Zuſatz.

66. Weil $\varphi = \frac{FG}{FC}$, und $FG = z$ war, (64. §.) ſo iſt auch $FC = \frac{z}{\varphi}$, mithin $FO = \frac{z \cdot q}{\varphi} : \left(\frac{z}{\varphi} - q\right)$, oder $FO = \frac{z \cdot q}{z - \varphi \cdot q}$. Ferner iſt $FOG = \frac{z}{OF}$ (63. §.) b alſo $FOG = \frac{z - \varphi \cdot q}{q}$. Ueberdem ſey die Vergröſſerungszahl $= m$, ſo iſt $FOG = m \cdot FCG$ =

$= m . \varphi$: alſo erhält man $m . \varphi = \frac{z - \varphi . q}{q}$, oder $m\varphi = \frac{z}{q} - \varphi$, daraus folgt $(m + 1)\varphi = \frac{z}{q}$, und $\varphi = \frac{1}{m + 1} . \frac{z}{q}$. Wenn alſo das Verhältniß vom Oefnungshalbmeſſer des Oculars zur Brennweite einerley bleibt, ſo wird das Geſichtsfeld deſto kleiner, je mehr das Fernrohr vergröſſert.

Der 3 Zuſatz.

67. Damit alles Licht, was von jedem der äuſſerſten Puncte Q des Gegenſtandes kommt, ſoweit das Geſichtsfeld reicht, auch vom Ocular bey G aufgefangen werden könne, muß der Oefnungshalbmeſſer des Geſichtsfeldes noch etwas gröſſer, als $z = FG$
197 ſeyn. Auf die Oefnung AB des Objectivs fallen die
Fig. Lichtkegel APB, AQB, die dazu gehörigen Strahlen laufen in p, q, zuſammen, breiten ſich hiernächſt in die coniſchen Räume aus, welche ſich von p und q bis ans Ocular in F und G erſtrecken, woſelbſt FK, GE, die Halbmeſſer ihrer Grundflächen ſind. Eben dieſe Lichtkegel verwandeln ſich hinter dem Ocular in Strahlencylinder, und es bleiben FK, GE, die Halbmeſſer der Querſchnitte dieſer Strahlencylinder. Ueberdem ſind FK, GE, ſehr nahe gleich groß, und es iſt $\frac{AC}{FK} = \frac{Cp}{Fp} = m$. Man ſetze den Oefnungshalbmeſſer des Objectivs $CA = x$, und $FK = GE$, $= y$, ſo iſt $\frac{x}{y} = m$, und $y = \frac{1}{m}x$. Daraus findet man den Oefnungshalbmeſſer des Oculars $FE = FG +$

GE

$$GE = z + y = (m + 1)\,\varphi . q + \frac{1}{m}\,x.$$

Der 4. Zuſatz.

68. Wenn y eben ſo groß oder auch noch gröſſer iſt, als der Halbmeſſer der Oefnung des Sterns im Auge, ſo erhält das Bild auf der Netzhaut von jedem Punct des Gegenſtandes durch die Gläſer ſoviel Licht, als es ohne Gläſer erhalten würde: nur würde noch in Erwegung zu ziehen ſeyn, daß nicht alles Licht durch die Gläſer durchgehet, ſondern etwas davon zurück ſtrahlet. Wenn dagegen y kleiner iſt, als der Halbmeſſer des Sterns; ſo erhält jeder Punct des Bildes auf der Netzhaut von dem damit zuſammengehörigen Punct des Gegenſtandes weniger Licht durch die Gläſer, als ohne Gläſer. Wird alſo der Halbmeſſer des Sterns $= \omega$ geſetzt, die ſcheinbare Klarheit des Objects ohne Gläſer geſehen $=$ C, durch die Gläſer geſehen $= c$; ſo iſt $\omega^2 : y^2 = C : c$, mithin $c = \frac{y^2}{\omega^2} . C.$

Die 10. Erklärung.

69. Das Fernrohr, wenn ein Sammlungsglas als Ocular mit dem Objectivglaſe, welches allemahl ein Sammlungsglas ſeyn muß, verbunden iſt, hat den Nahmen des Sternrohrs erhalten. Das zuerſt in Holland und bald nachher vom Galiläus zum zweytenmahl erfundene Fernrohr hatte ein hohles Augenglas: daher nennt man noch jetzt holländiſche auch Galiläiſche Fernröhre ſolche, die ein hohles Augenglas haben.

Der 1. Zuſatz.

70. Die Entfernung CF des hohlen Augenglaſes DE vom Objectivglaſe AB muß der Differenz der Brenn- 200 Fig.

Brennweiten $Cp - Fp$ gleich ſeyn. Alsdenn fängt das Augenglas, die gegen die Puncte des Bildes pq zuſammenlaufende Strahlen vor ihrer Vereinigung auf, und bricht diejenigen, welche zu einerley Punct des Gegenſtandes gehören, in die mit dem Hauptſtrahl Fq parallele Lage GH. Man ſiehet alſo das Object deutlich und aufrecht unter dem Winkel OFL $= pFq$, wenn das Auge unmittelbar an das Augenglas gehalten wird, weil es in O, wo der Hauptſtrahl GH die Axe ſchneidet, nun ſeine Selle nicht haben kann.

Der 2. Zuſatz.

71. Man wendet leicht alle für das Sternrohr bewieſene allgemeine Formuln auf das Galiläiſche Fernrohr an, wenn man die Brennweite q des Augenglaſes negativ annimmt. Es wird alſo die Vergrösſerungszahl $m = -\frac{p}{q}$ negativ, weil der Winkel, unter welchem das Object geſehen wird, die entgegen geſetzte Lage erhält. Für das Geſichtsfeld war $\varphi = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{z}{q}$, und weil hier q und m negativ werden, ſo erhält man $\varphi = -\frac{1}{1-m} \cdot \frac{z}{q} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{z}{q}$. Uebrigens bleibt $y = \frac{1}{m} x$, und $\epsilon = \frac{y^2}{w^2} \cdot C$.

Der 3. Zuſatz.

72. Bey gleicher Brennweite und Oefnung des Oculars, und gleicher Vergrösſerung würde das Geſichts-

ſichtsfeld noch etwas gröſſer ausfallen, als das Geſichtsfeld, welches das Sternrohr faſſet, wenn das Auge in der Axe da ſeine Stelle haben könnte, wo alle Hauptſtrahlen nach der Brechung im Augenglaſe einander ſchneiden. Nun aber, wenn es in der Axe des Fernrohrs unmittelbar am Augenglaſe ſeine Stelle hat, kann es von den Hauptſtrahlen, die aus O herzukommen ſcheinen, nur ſoviele faſſen, als auf einen kreisförmigen Raum des Augenglaſes fallen, der ſo groß, als der Stern im Auge iſt. Dieſem- 200
nach genügt es, wenn z = FG ſo groß gemacht wird, Fig.
als der Halbmeſſer der Augenöfnung iſt, oder etwas weniges gröſſer, und man kann bey gleicher Vergröſſerung und gleicher Brennweite des Augenglaſes dieſem Fernrohr kein ſo groſſes Geſichtsfeld, als dem Sternrohr zuwege bringen.

Die 11. Erklärung.

73. Weil das Galiläiſche Fernrohr die Sachen aufgerichtet darſtellet, ſo würde es als Erdfernrohr gebraucht ganz gute Dienſte leiſten können, wenn nicht das Geſichtsfeld ſo eingeſchränkt wäre. Um deßwillen hat man bald nach Erfindung der Fernröhre mit dem erhabenen Augenglaſe DE des Sternrohrs 202
noch zwey andre Augengläſer RS, TV, verbunden, Fig.
und einem ſolchen aus vier Sammlungsgläſern zuſammengeſetzten Fernrohr den Nahmen des Erdfernrohrs im beſondern Sinne beygelegt.

Der 1. Zuſatz.

74. Die Strahlen ſind durch die Brechung im 202
erſten Ocularglaſe DE in eine ſolche Lage gebracht, Fig.
als wenn ſie von einem weit entfernten Object kämen, daß unter dem Winkel FOG geſehen würde. Man

ziehe ML mit GH parallel, ſo iſt ML unter den mit GH parallelen Strahlen der Hauptſtrahl. Alle dieſe mit GH parallel auf das Glas RS fallenden Strahlen werden durch die Brechung hinter dem Glaſe RS in k zuſammen gebracht, die mit der Axe FM parallelen Strahlen in π, ſo daß $M\pi$ der Brennweite des Glaſes RS gleich iſt. So entſteht das zweyte aufrechtſtehende Bild πk des Objects. Hinter dieſem Bilde breiten ſich die durch jeden Punct deſſelben laufenden Strahlen wieder auseinander, und werden von dem dritten Ocularglaſe TV aufgefangen. Dies ſtellt man ſo, daß πN der Brennweite deſſelben gleich iſt; ſo werden die durch π laufenden Strahlen nach der Brechung wieder mit der Axe der Gläſer, und die durch k laufenden Strahlen mit dem Hauptſtrahl kN parallel. Weil nun der aus Q kommende Hauptſtrahl QC zuletzt in die Lage IK kommt, ſo erſcheint das Object nun durch alle vier Gläſer deutlich, aufrecht, und unter dem Winkel NKI, wenn das Auge in K ſeine Stelle erhält.

Der 2. Zuſatz.

75. Die beyden letzten Ocularglǎſer RS, TV, haben für ſich allein die Wirkung eines Sternrohrs, ſie würden alſo den optiſchen Winkel FOG = OML aufs neue vergröſſern, wenn das Glas TV eine kleinere Brennweite als RS erhielte. Weil man aber durch die Beyfügung der beyden letzten Ocularglǎſer vornehmlich nur die aufrechte Vorſtellung des Objects zuwege bringen wollte, ſo gab man allen dreyen Augenglǎſern gleiche Brennweiten, und erreichte jene Abſicht ohne weitere Vergröſſerung des optiſchen Winkels.

Die

Die 12. Erklärung.

76. Einfache Microſcope heiſſen ſolche, die entweder wirklich nur aus einer einzigen Linſe beſtehen, oder vielleicht aus mehrern ganz nahe zuſammengeſtellten Linſen ſo angeordnet ſind, daß man ſie als ein einziges Glas betrachten kann. Zuſammengeſetzte Microſcope ſind in ſoweit den Fernröhren ähnlich, daß man ſie aus einem Objectiv und einem oder mehrern davon ziemlich entfernten Augengläſern zuſammen ordnet.

Die 5. Erfahrung.

77. Weil die Schärfe des Geſichts bey verſchiedenen Perſonen ſehr verſchieden iſt, ſo läßt ſich die Entfernung, in welcher ganz kleine Sachen deutlich geſehen werden, zwar nicht allgemein feſtſetzen. Indeſſen kann man dieſe Entfernung für ein mittelmäßig gutes Geſicht ziemlich ſicher auf 8 Zoll ſchätzen.

Der 7. Lehrſatz.

78. Eine ganz kleine Glaslinſe *AB*, die eine ſehr kurze Brennweite hat, dient als Microſcop, wenn das Object *PQ* im Brennraum ſelbſt, oder ganz nahe dabey, das Auge aber auf der andern Seite in *O* ganz nahe beym Glaſe ſeine Stelle hat. Die Vergröſſerungszahl wird alsdenn gefunden, wenn man 8 Zolle mit der Brennweite der Linſe dividirt. 195 Fig.

Beweis. Ein ganz kleines Object, wie PQ, ſiehet man unter einem deſto gröſſern Winkel PCQ, je näher man es dem Auge bringt. Wenn *Cp* für die Entfernung angenommen wird, in der das kleine Object unter dem Winkel *pCq* deutlich würde geſehen werden; ſo iſt die Vergröſſerungszahl $\frac{PCQ}{pCq}$

 =

$= \frac{PQ}{CP} : \frac{PQ}{Cp}$ (63. §.) $= \frac{Cp}{CP}$, und $Cp = 8$ Zoll. (77. §.) Iſt überdem CP die Brennweite der Linſe AB, oder auch CP nur ſehr wenig kleiner als die Brennweite; ſo erhält das Auge in O die von jedem Punct des Objects herkommenden Strahlen entweder in völlig, oder beynahe paralleler Lage, wie es zum deutlichen Sehen erfodert wird.

Der 1. Zuſatz.

195 Fig. 79. Bey dieſen Schlüſſen iſt auf die Dicke, und die Figur der beyden ſphäriſchen Flächen der Linſe, die bey einerley Brennweite ſehr verſchieden ſeyn kann, nicht Rückſicht genommen worden: man würde ſonſt finden, daß ſelbſt der Winkel POQ noch etwas vergröſſert erſcheine, wie man auch aus dem 58. §. einigermaſſen abnehmen kann. Die hievon herrührende Vergröſſerung iſt indeſſen nur wenig beträchtlich.

Der 2. Zuſatz.

199 Fig. 80. Es ſey L einer von den äuſſerſten Puncten eines ſehr kleinen Objects, ſoweit es durch die Linſe BD überſehen werden kann, wenn das Auge in G unmittelbar an der Linſe ſeine Stelle hat; ſo muß der aus L auffallende Strahl LM in der Vorderfläche der Linſe aus der Lage MF in die Lage MG gebrochen werden. In G, leidet er die zweyte Brechung und kommt in der Lage GH ins Auge. Der Geſichtswinkel durchs Glas iſt alſo CGH, der ohne Glas PGL ſeyn würde. Man ſetze $AM = x$, $PGL = \varphi$, $CGH = m\varphi$, $AG = c$; ſo iſt überdem auch $CGH = \mu . CGK = \mu . AGM$: alſo $m . \varphi = \mu . AGM$. Weiter iſt $AGM = \frac{x}{c}$, (63. §.) alſo $m\varphi = \frac{\mu x}{c}$, und das

giebt

giebt den ſcheinbaren Halbmeſſer des Geſichtsfeldes $\varphi = \frac{\mu x}{mc}$. Wie m gefunden werden könne, iſt im 236. §. der Photom. im 3 Theil der Anfangsgründe 484. S. gewieſen. Hier kann $m = 1$ geſetzt werden, weil gewöhnlich c ſehr klein iſt: alſo hat man $\varphi = \frac{\mu x}{c}$, und x iſt der Oefnungshalbmeſſer der Linſe. Aus dem Winkel φ wird auch PL = φ . GP, (63. §.) gefunden, welches der Halbmeſſer von dem ſichtbaren Stück des Objects iſt, ſoweit es das Microſcop faſſet.

Der 3. Zuſatz.

81. Der aus P auf M fallende Strahl nimmt den Weg PMNS, ſo daß NS mit der Axe AC parallel, und GN der Halbmeſſer des Strahlencylinders iſt, worin ſich der aus P auffallende Strahlenkegel nach der Brechung verwandelt hat. In den Anfangsgründen (237. §. Photom. mit dem 400 §. verglichen) iſt bewieſen, daß hier GN ſehr nahe = AM = x ſey, wenn die Linſe eine ſehr geringe Dicke hat. Läßt man alſo den Buchſtaben c, C, ω, die Bedeutung, welche ſie im 70. §. hatten, ſo iſt für die microſcopiſche Linſe $c = \frac{x^2}{\omega^2}$. C.

Der 8. Lehrſatz.

82. Eine microſcopiſche Linſe *AB* als Objectiv mit einem erhabenen Augenglaſe *DE* auf ähnliche Art verbunden, wie das Objectiv eines Sternrohrs mit dem Augenglaſe, (62. §.) dient als ein zuſammengeſetztes Microſcop. 198 Fig.

Beweis. Man ſetze die Entfernung des Objects CP = a, die Entfernung des Bildes Cp = α, die Brenn-

Brennweite des Oculars $= q$: ſo muß $Fp = q$ ſeyn, damit das Object aus O durch die Gläſer deutlich geſehen werde. Ferner iſt die Vergröſſerungszahl $m = \frac{pFq}{pCq} = \frac{\alpha}{q}$, und der Winkel $pCq = PCQ$ iſt ſchon in dem Verhältniß $a : h$ gröſſer, als derjenige, unter welchem das Object aus C in der Entfernung h würde geſehen werden, vorausgeſetzt, daß $a < h$ ſey. Wird alſo in Beziehung auf dieſen zuletzt erwehnten Winkel die Vergröſſerungszahl $=$ M geſetzt; ſo iſt $M = \frac{h}{a} m = \frac{h}{a} \cdot \frac{\alpha}{q}$.

Der 1. Zuſatz.

83. Man ſetze den Oefnungshalbmeſſer des Oculars $FG = z$, und $PCQ = pCq = \varphi$, ſo iſt $\frac{z}{\alpha + q} = \varphi$, oder $\varphi = \frac{z}{q} : \left(\frac{\alpha}{q} + 1\right) = \frac{z}{q(m+1)}$. Weil ferner $m = \frac{a}{h} \cdot M$ war, ſo hat man auch $\varphi = \frac{z}{q} : \frac{aM + h}{h} = \frac{h}{aM + h} \cdot \frac{z}{q}$; und daraus den Halbmeſſer des Objects ſoweit es überſehen werden kann, $PQ = a\varphi$. Für die Helligkeit iſt, wie im 67. §. $y = \frac{1}{m} x = \frac{hx}{M \cdot a}$.

Die Brennweite der Objectivlinſe ſey $= p$, ſo iſt $\alpha = \frac{a \cdot p}{a - p}$, alſo $a \cdot \alpha - p\alpha = a \cdot p$, und $p(a + \alpha)$

$=$

$= a \,.\, \alpha$, mithin $p = \frac{a \,.\, \alpha}{a + \alpha}$. Man dividire im Zähler und Nenner mit q und ſchreibe m ſtatt $\frac{\alpha}{q}$, ſo wird $p = \frac{ma}{(a : q) + m} = \frac{m \,.\, q \,.\, a}{a + mq}$. Setzt man ferner $m = \frac{a}{h} \,.\, \mathrm{M}$, ſo erhält man $p = \frac{(a : h)\,\mathrm{M}q}{1 + (\mathrm{M} : h)q}$, oder $p = \frac{\mathrm{M} \,.\, q \,.\, a}{\mathrm{M}q + h}$, alſo umgekehrt $a = \frac{(\mathrm{M}q + h)\,p}{\mathrm{M}q} = \left(1 + \frac{h}{\mathrm{M}q}\right)p$.

Der 2. Zuſatz.

84. Wählt man ſtatt des erhabenen Ocularglaſes die Hohllinſe DE, ſo muß dieſe vor der Stelle des Bildes pq die Strahlen in der Entfernung Fp $= q$ auffangen, damit die zu jedem Punct gehörigen Strahlen in die parallele Lage kommen. Das zuſammengeſetzte Microſcop hat nun alle Aehnlichkeit mit dem Galiläiſchen Fernrohr. Man nimmt q und m negativ an; ſo iſt auch M negativ, folglich $\varphi = \frac{z}{(q\,(m - 1)}$, und es bleibt $a = \left(1 + \frac{h}{\mathrm{M}q}\right)p$. 196 Fig.

Der 3. Zuſatz.

85. Wenn das kleine Object PQ der microſcopiſchen Linſe AB ſo nahe liegt, daß die Entfernung Cπ des Bildes ſehr groß ausfallen würde, ſo kann man zwey Oculare damit verbinden. Das erſte Ocular DE muß alsdenn als Collectivglas die gegen die Puncte des Bildes πk zuſammenlaufenden Strahlen in ein näheres Bild pq zuſammen bringen. (42. §.) 201 Fig.

Die

Die hinter dem Bilde pq wieder auseinander fahrenden Strahlen muß das Ocularglas RS in der Entfernung Mp die ſeiner Brennweite gleich iſt, auffangen, damit ſie in der Lage, welche zum deutlichen Sehen erfordert wird, ins Auge kommen.

Man ſetze $CP = a$, $C\pi = \alpha$, $F\pi = b$, $Fp = \beta$, die Brennweiten der Linſe $AB = p$, des Collectivglaſes $DE = q$, des Augenglaſes $RS = r$, den Winkel $PCQ = FCk = \varphi$, ſo iſt $\frac{\pi Fk}{\varphi} = \frac{C\pi}{F\pi}$ (63. §.) $= \frac{\alpha}{b}$, und $\frac{pMq}{\pi Fk} = \frac{Fp}{Mp} = \frac{\beta}{r}$, alſo $\frac{pMq}{\varphi} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{r}$. Das iſt die Vergröſſerungszahl in Abſicht auf den Winkel PCQ. Wird alſo das M in der vorhin angezeigten Bedeutung gebraucht, ſo iſt $M = \frac{h}{a} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{r}$. Dies wäre alſo die Vergröſſerungszahl in dem Sinne, wie es beym Microſcop gewöhnlich verſtanden wird.

Die 6. Erfahrung.

86. Durch eine kleine kreisförmige Oefnung laſſe man das Sonnenlicht in ein finſteres Zimmer fallen, und bringe ein dreyſeitiges gläſernes Priſma in den mit dem Sonnenlicht erfüllten beynahe cylindriſchen Raum in einer ſolchen Lage, daß die Seitenlinien auf der Verticalfläche durch den einfallenden Sonnenſtrahl ſenkrecht ſind. Man fange in einiger Entfernung hinter dem Priſma das durchſcheinende Sonnenlicht mit einer weiſſen Fläche auf; ſo erſcheint auf derſelben ein erleuchteter Raum, der mehr nach

der

der Länge, als nach der Breite ausgedehnt, und überdem ſehr lebhaft gefärbt iſt. Die kenntlichſten Farben liegen mit allen dazwiſchen fallenden Schattirungen von unten nach oben in folgender Ordnung: roth, dunkelgelb, hellgelb, grün, hellblau, dunkelblau, violet. Man kann an dem im erleuchteten Raum glänzenden und ebenfalls gefärbten Staube deutlich wahrnehmen, daß die Sonnenſtrahlen nach dem Durchgange durchs Priſma ſich in graden Linien ausbreiten, die einander nicht mehr parallel ſind.

Man laſſe etwas von dem gefärbten Licht, ſoweit es einerley Farbe zeigt, durch ein kleines rundes Loch in einem ſchwarzen Papier fallen, und breche dieſen gefärbten Strahl von neuen mit einem andern gläſernen Priſma: ſo findet man nach der Brechung die Farbe des Lichts nicht weiter geändert, auch den Strahl nicht weiter in mehrere getheilt, die gegen einander geneigt ſind.

Der 1. Zuſatz.

87. Das Sonnenlicht beſtehet aus einer Vermiſchung verſchiedener in Abſicht auf die Brechbarkeit ungleichartiger Strahlen. Bey einerley Neigungswinkel wird das violette ſtärker, als das blaue Licht, das blaue ſtärker als das grüne gebrochen, und ſo nach der Ordnung weiter: das rothe Licht wird am wenigſten gebrochen. Wenn die brechende Maſſe einerley iſt, ſo gehört für jede Lichtart ein gewiſſes beſtändiges Verhältniß der Refraction.

Der 2. Zuſatz.

88. Das Licht, was ein ſtrahlendes Object durch eine Glaslinſe ſendet, kann nicht in einem und eben demſelben deutlichen Bilde hinter der Glaslinſe vereini-

einiget werden: es muß vielmehr für jede Lichtart ein eigenes Bild geben. Das violette Bild liegt der Linſe am nächſten, und die übrigen Bilder entfernen ſich von der Linſe deſtomehr, jeweniger das Licht brechbar iſt: am weiteſten iſt das rothe Bild von der Linſe entfernt.

Die 13. Erklärung.

89. Wenn gleich alles Licht in Abſicht auf die Brechbarkeit vollkommen gleichartig wäre; ſo würden doch nicht alle Strahlen, die aus einerley Punct des Objects auf die Glaslinſe fallen, nach der Brechung den Hauptſtrahl in einerley Punct ſchneiden. Die Entfernung zwiſchen dem Vereinigungspuncte der zunächſt bey dem Haupſtrahl auffallenden Lichtſtrahlen, und demjenigen Punct, worin der Hauptſtrahl von denjenigen Lichtſtrahlen nach ihrer Brechung geſchnitten wird, die in mehrerer Entfernung von dem Hauptſtrahl auffallen, nennt man die **Abweichung des Lichts wegen der Kugelgeſtalt** der Glaslinſen, und unterſcheidet ſie von der **Abweichung oder Zerſtreuung des Lichts**, die von der ungleichen **Brechbarkeit** herrührt. (88. §.)

Zuſatz.

90. Würden alle Lichtſtrahlen, nach ihren Brechungen in jeder Glaslinſe aufs vollkommenſte in den Sammlungspuncten vereiniget, die vermittelſt der oben erklärten Formuln gefunden werden: ſo könnte man mit einem Fernrohr von ganz mäſſiger Länge eine ſehr anſehnliche Vergröſſerung zuwege bringen. Weil jedoch bey gleicher Oefnung des Objectivglaſes die Helligkeit deſto kleiner ausfällt, je anſehnlicher die Vergröſſerungszahl ſeyn ſoll; ſo müſte man ſeine Freyheit haben, den Oefnungshalbmeſſer ſo groß zu nehmen,

nehmen, als man für gut fände. Wenn ferner Brennweite und Oefnung des Oculars einerley bleibt, ſo wird auch das Geſichtsfeld deſto kleiner, je beträchtlicher die Vergröſſerung iſt: demnach müſte man auch des Geſichtsfeldes halber den Oculargläſern hinlänglich groſſe Oefnungen geben können. Allein hiebey iſt man wegen der gedoppelten Abweichung des Lichts ſehr eingeſchränkt, und eben das iſt die Urſache, weßwegen vormahls, ehe man Mittel fand, dieſen Unvollkommenheiten abzuhelfen, ſehr lange Fernröhre gebraucht werden muſten, wenn die Vergröſſerung einigermaſſen beträchtlich ausfallen ſollte.

Die 7 Erfahrung.

91. Herr Huygen (Dioptr. Prop. 56.) fand ein Sternrohr gut, deſſen Objectiv bey einer Oefnung von 3 Zoll im Durchmeſſer 30 Fuß Brennweite hatte, mit einem Ocular von $3\frac{3}{10}$ Zoll Brennweite im Rheinl. Maaſſe. Der Göttingiſche Herr Mayer giebt in einer handſchriftlichen Tafel, die Herr Klügel in einem aus der Mayerſchen Bibliothek erſtandenen Exemplar gefunden hat, einem Objectiv von 30 Fuß Focuslänge ein Ocular von 5,77 Zoll im Durchmeſſer. (M. ſ. H. Klügels Analyt. Dioptrik 2 Th. 5 Abſch. 428 §. 178. S.)

Die 6. Aufgabe.

92. Die Vergröſſerungszahl iſt gegeben: man ſoll ein Fernrohr anordnen, welches bey dieſer vorgeſchriebenen Vergröſſerung die betrachteten Objecte eben ſo deutlich und helle, als das Huygenſche oder Mayerſche darſteller.

Aufl. 1. Wegen der gleichen Deutlichkeit wird erfodert, daß ſich die Brennweiten der Objective ver-

halten, wie die Quadrate der Vergrößerungszahlen; die Brennweiten der Oculare aber wie die Vergrößerungszahlen ſelbſt: alſo wie die Quadratwurzeln aus den Brennweiten der Objective.

2. Wegen der gleichen Helligkeit müſſen die Oefnungshalbmeſſer der Objective ſich wie die Vergrößerungszahlen, oder wie die Quadratwurzeln aus den Brennweiten der Objective verhalten. M. ſ. davon mit mehrern den 3 Band der Anfangsgründe im XIV. Abſch. der Photometri.

Exempel. Bey Huygens Fernrohr war die Vergrößerungszahl $m = \frac{360}{3,3} = 109$. Will man nun ein Fernrohr haben, das 60mahl vergrößern ſoll; ſo findet man die Brennweite des Objectivs $= \frac{60^2}{109^2} \cdot 30 = 9$ Fuß, die Brennweite des Oculars 1,8 Zoll, die Oefnung des Objectivs $= \frac{60}{190} \cdot 3$ Zoll $= 1,65$ Zoll.

Die 14. Erklärung.

93. Zwey oder drey ganz nahe hinter einander geſtellte Objectivgläſer kann man als ein aus beyden, oder allen dreyen zuſammengeſetztes Objectiv betrachten, und derjenige Abſtand um welchen das Bild eines unendlich weit entfernten Gegenſtandes vom letzten Glaſe entfernt iſt, kann die Brennweite des zuſammengeſetzten Objectivs heiſſen. Hat alsdenn das zuſammengeſetzte Objectivglas die Eigenſchaft, daß es ein völlig, oder wenigſtens beynahe deutliches Bild ohne Farben zuwege bringt, ſo kann es von dieſer Eigenſchaft ein achromatiſches oder farbenloſes Objectiv, und ein Fernrohr, das

mit einem ſolchen Objectiv verſehen iſt, ein achromatiſches Fernrohr heiſſen. Von dem Künſtler in Engelland, der auf Herrn Leonh. Eulers Veranlaſſung das erſte Fernrohr dieſer Art verfertigte, nennt man dergleichen Fernröhre auch Dollondiſche.

Der 1. Zuſatz.

94. Wenn die vordere convexe Linſe PP die mit der Axe parallel auffallenden Strahlen in T ſammlen würde, die gleich hinter derſelben befindliche Hohllinſe QQ aber dieſe gegen F zuſammenlaufenden Strahlen wieder mehr aus einander fahrend macht, und in G vereiniget; (45. §.) ſo iſt BG die Brennweite des doppelten Objectivs, da dann BF kleiner ſeyn muß, als die Brennweite des Hohlglaſes. 203 Fig.

Der 2. Zuſatz.

95. Wenn eben ſo die erſte Linſe PP Strahlen, die mit der Axe parallel auffallen, in F ſammlen würde, und die zweyte QQ ſie weiter auseinander bringt, daß ſie in G zuſammen laufen würden, wenn nicht die dritte Linſe RR ſie auffinge, und in H ſammelte; ſo iſt CH die Brennweite des dreyfachen Objectivs. Dies wäre der Fall, wenn BF kleiner als die Brennweite des Hohlglaſes iſt. Wäre BF gröſſer als des Hohlglaſes Brennweite, ſo würden die Strahlen nach der Brechung im Hohlglaſe in eine ſolche Lage kommen, als kämen ſie von einem Punct G vor dem Hohlglaſe her. In dieſer Lage würden ſie nun auf die dritte Linſe RR fallen, welche ſie als Sammlungsglas wieder in H vereiniget. 204 Fig. 205 Fig.

Die 15. Erklärung.

96. Man nehme an, für die violetten am meiſten brechbaren Strahlen ſey das Verhältniß der Refraction = M : 1, für die rothen am wenigſten

brechbaren Strahlen ſey es N : 1; ſo kann man diejenigen, für welche das Verhältniß der Refraction $= \frac{1}{2}(M+N) : 1$ iſt, als Strahlen von mitlerer Brechbarkeit betrachten, und dies eben erwehnte Verhältniß das mittlere Brechungsverhältniß nennen. Setzt man alsdenn $\frac{1}{2}(M+N) = \mu$ und $\frac{1}{2}(M-N) = \varepsilon$, ſo iſt $M = \mu + \varepsilon$, $N = \mu - \varepsilon$, und das mittlere Brechungsverhältniß iſt $\mu : 1$, das gröſte und kleinſte Brechungsverhältniß $\mu + \varepsilon : 1$ und $\mu - \varepsilon : 1$.

Die 8 Erfahrung.

97. Man hat bey mehrmahls wiederhohlten Verſuchen gefunden, daß das mittlere Brechungsverhältniß ſo wenig, als das gröſte und kleinſte Brechungsverhältniß für alle Glasarten einerley ſey. Zuerſt ſind bey den Unterſuchungen darüber vornemlich die zweierley Glasarten bekannt worden, welche in Engelland Kronglas und Flintglas heiſſen. Für das Kronglas iſt $\mu = 1,53$, für das Flintglas $\mu = 1,58$, und die beyden Werthe von ε verhalten ſich für Kronglas oder Flintglas beynahe wie 2 : 3. Das Flintglas bricht alſo Strahlen etwas ſtärker als Kronglas, auch zerſtreut das erſtere die ungleichartigen Strahlen etwas mehr, als das letztere.

Der 1. Zuſatz.

95. Die Auflöſung der Aufgabe, wie ein achromatiſches Objectiv vortheilhaft angeordnet werden könne, kommt darauf an, daß man, wenn die Brennweite, und die Entfernung der einzelnen Linſen von einander feſtgeſetzt iſt, einer jeden Linſe Brennweite für ſich, und die Halbmeſſer ihrer ſphäriſchen Flächen ſinde. Wählt man alsdenn zu den ein-

einzelnen Linſen verſchiedene Glasarten, für welche die Brechungsverhältniſſe verſchieden ſind; ſo iſt es möglich, alles ſo anzuordnen, daß die Undeutlichkeit des Bildes entweder völlig, oder doch beynahe gehoben werde, welche die Farbenzerſtreuung, und die Abweichung des Lichts wegen der Kugelgeſtalt der Gläſer ſonſt zuwege bringt. In Abſicht auf das weſentliche eines Fernrohrs iſt es hiernächſt einerley, das Objectiv mag einfach oder zuſammen geſetzt ſeyn. Wenn alle Abmeſſungen des zuſammengeſetzten Objectivs beſtimmt ſind; ſo läßt ſich angeben, wie groß die Brennweite und Oeſnung einer einfachen Linſe ſeyn müſte, wenn die Lichtſtrahlen nach dem Durchgange durch dieſe Linſe ein eben ſo groſſes Bild mit eben derſelben Helligkeit und Deutlichkeit zuwege brächten, wie es das Licht beym Durchgange durchs zuſammengeſetzte Objectiv zuwege bringt. Eine ſolche einfache Linſe würde alsdenn beym Fernrohr mit dem zuſammen geſetzten Objectiv einerley Dienſte leiſten. Hier iſt es nicht möglich zu der in ſolcher Abſicht anzuſtellenden Rechnung eine nähere Anleitung zu geben; man findet ſie aber vollſtändig im 3ten Bande der Anfangsgründe, im XVI und den folgenden Abſchnitten der Photometrie.

Der 2. Zuſatz.

96. Dieſe Rechnungen, welche an ſich nicht ſchwer, ſondern nur etwas weitläuftig ſind, führen auf folgende Reſultate.

Die Hohllinſe des zuſammengeſetzten Objectivs wird aus Flintglaſe verfertiget, die erhabene Linſe des doppelten, oder auch beyde Converlinſen des dreyfachen Objectivs aus Kronglaſe. Wenn alsdenn die Vergröſſerungszahl = m iſt; ſo hat man folgende Abmeſſungen:

Für das doppelte Objectiv.

	erſte Linſe	zweyte Linſe
Brennweite in Zollen	0,0909 . *m*	− 0,1018 . *m*
Halbmeſſer d. Vorderfl.	0,0964 . *m*	− 0,0810 . *m*
Halbmeſſer d. Hinterfl.	0,0964 . *m*	− 0,2179 . *m*.

Die Entfernung der Linſen von einander iſt 0,0076 . *m* Zoll und der Oefnungshalbmeſſer = 0,022 . *m* Zoll.

Oder ſtatt deſſen

	erſte Linſe	zweyte Linſe
Brennweite in Zollen	0,0909 . *m*	− 0,1018 . *m*
Halbmeſſer d. Vorderfl.	0,0875 . *m*	− 0,0875 . *m*
Halbmeſſer d. Hinterfl.	0,1073 . *m*	− 0,1820 . *m*.

Die Entfernung der Linſen, und der Oefnungshalbmeſſer bleiben, wie vorhin. Wird überdem noch die Brennweite des doppelten Objectivs = β geſetzt, und die Brennweite der einfachen Linſe von eben der Wirkung in Abſicht auf Gröſſe, Deutlichkeit und Helligkeit des Bildes = Π: ſo hat man $\beta = \frac{11}{24} . m$ Zoll, und $\Pi = \frac{1}{2} m$ Zoll.

Für das dreyfache Objectiv.

	erſte Linſe	zweyte Linſe	dritte Linſe
Brennweite in Zollen	0,1068 . *m*	− 0,0663 . *m*	0,1091 . *m*
Halbmeſſer d. Vorderfläche	0,1956 . *m*	− 0,0769 . *m*	0,1156 . *m*
Halbmeſſer d. Hinterfläche	0,0796 . *m*	− 0,0769 . *m*	0,1156 . *m*.

Oder ſtatt deſſen

	erſte Linſe	zweite Linſe	dritte Linſe
Brennweite in Zollen	0,1068 . *m*	− 0,0663 . *m*	0,1091 . *m*
Halbmeſſer d. Vorderfläche	0,1282 . *m*	− 0,0769 . *m*	0,0769 . *m*
Halbmeſſer d. Hinterfläche	0,1012 . *m*	− 0,0769 . *m*	0,2331 . *m*.

Bey

Bey beyden Anordnungen iſt die Entfernung der Linſen $= 0{,}0055 . m$ Zoll, und der Oefnungshalbmeſſer $= 0{,}0192 . m$, oder beynahe $\frac{1}{50}m$ Zoll. Noch ſey die Brennweite des dreyfachen Objectivs $= \gamma$, die Brennweite der gleichgültigen Linſe wie vorhin $= \Pi$; ſo iſt $\gamma = \frac{10}{41}m$ Zoll, und $\Pi = \frac{1}{4}m$ Zoll.

Die 7. Aufgabe.

97. Die Vergröſſerungszahl iſt gegeben: man ſoll die Anordnung eines mit dem doppelten oder dreyfachen Objectiv verſehenen Sternrohrs finden.

Aufl. 1. Aus der gegebenen Vergröſſerungszahl ſuche man die Abmeſſungen des doppelten Objectivs nach Anleitung des 96. §. und verbinde damit ein Ocular von $\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite in der Entfernung von $(\frac{1}{2}\frac{1}{4}m + \frac{1}{2})$ Zoll: denn dies Objectiv iſt mit einem einfachen gleichgültig, deſſen Brennweite $\Pi = \frac{1}{2}m$ Zoll iſt, und dazu gehört ein Ocular von $\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite. Des doppelten Objectivs Brennweite iſt $\beta = \frac{1}{2}\frac{1}{4}m$ Zoll, alſo die Entfernung beyder Gläſer $= (\frac{1}{2}\frac{1}{4}m + \frac{1}{2})$ Zoll. (62. §.) Der Oefnungshalbmeſſer ſey für das Objectiv $= x$, für das Ocular $= z$; ſo iſt des Geſichtsfeldes Halbmeſſer $\phi = \frac{m}{m+1} . \frac{z}{\Pi} = \frac{2}{m+1} . z$, $x =$

$0{,}02 . m$ Zoll, $y = \frac{1}{m}x = 0{,}02 = \frac{1}{50}$ Zoll.

2. Soll das dreyfache Objectiv gewählt werden, ſo ſuche man wiederum aus der Vergröſſerungszahl zuforderſt die Abmeſſungen deſſelben, (96. §.) verbinde aber damit ein Ocular von $\frac{1}{4}$ Zoll Brennweite in der Entfernung von $(\frac{10}{41}m + \frac{1}{4})$ Zoll: denn des

dreyfachen Objectivs Brennweite iſt $y = \frac{10}{41}m$, und des gleichgültigen einfachen Objectivs Brennweite $\Pi = \frac{1}{4}m$, alſo wird ein Ocular von $\frac{1}{4}$ Zoll Brennweite in der Entfernung $(\frac{10}{41}m + \frac{1}{4})$ Zoll erfodert. Ferner iſt $\varphi = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{z}{\Pi} = \frac{4}{m+1}z$, und es bleibt $y = \frac{1}{30}$ Zoll.

Der 1. Zuſatz.

98. Will man ein hohles Augenglas brauchen, damit ſich die Objecte aufgerichtet darſtellen, ſo iſt die Entfernung der Gläſer $(\frac{1}{2}\frac{1}{4}m - \frac{1}{2})$ Zoll oder $\frac{10}{41}m - \frac{1}{4})$ Zoll, nachdem das doppelte oder dreyfache Objectiv gewählt wird. Auch iſt im erſten Fall $\varphi = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{z}{\Pi} = \frac{2z}{m-1}$, im letzten Fall $\varphi = \frac{4z}{m-1}$.

Der 2. Zuſatz.

99. Bey einerley Vergröſſerungszahl wird die ganze Länge des Rohrs nur ohngefehr halb ſo groß, wenn das dreyfache Objectiv gebraucht wird, als in dem Fall, wenn man das doppelte wählt: auch iſt bey einerley Oefnung des Oculars und gleicher Vergröſſerung im erſten Fall das Geſichtsfeld nur halb ſo groß, als im letzten Fall.

Anmerkung.

100. Die Hauptſtrahlen, welche durch die Mitte des Objectivs beynahe ungebrochen durchgehen, werden nach der Brechung im Ocular wegen ihrer ungleichen Brechbarkeit nicht in einerley Punct vereiniget: daher kommt es, daß durch ein Fernrohr mit dem einfachen Objectiv das Object mit einem farbigten Rande erſcheint. (Anfangsgründe 3 Band 279 §. Photom.) Die davon herrührende Undeutlichkeit wird auch durchs zuſammengeſetzte Objectiv nicht gehoben: ſie rührt, wenn das Objectiv dreyfach iſt, allein vom Ocular her, und die zweyte Linſe des doppelten

Obje=

Objectivs hat auch einigen Antheil daran. Damit der farbigte Rand entweder völlig oder doch gröſtentheils gehoben, auch ſelbſt das Geſichtsfeld noch mehr erweitert werde, kann man zwey Augengläſer mit einander verbinden, ſo wie es im 3 Bande der Anfangsgründe 359—365. §. der Photom. umſtändlich gewieſen iſt. Um beyde Abſichten, die Hebung des farbichten Randes und die möglichſte Erweiterung des Geſichtsfeldes, zu erreichen, werden auch 3, 4, bis 5 Ocularglăſer, beſonders alsdenn gebraucht, wenn das Werkzeug als Erdrohr dienen, und die Objecte aufrecht vorſtellen ſoll. Im XVIII. Abſchnitt der Photometri, im 3 Bande der Anfangsgründe ſind alle dieſerhalb nöthige Rechnungen vollſtändig vorgetragen. Wer ſich nur ſoweit in der allgemeinen Rechenkunſt geübt hat, als in dieſem Handbuch dazu Anleitung gegeben iſt, dem wird es nicht ſchwer fallen, jenen Rechnungen zu folgen. Wer aber auch nicht Zeit oder Gedult genug hat, dieſe Rechnungen durchzuführen, der wird doch auch aus dem bisherige Vortrage hinlänglichen Unterricht ſchöpfen können, um für die Ausübung von der Anweiſung des Hrn. Fuß weitern Gebrauch zu machen, die Herr Prof. Klügel auch aus dem Franzöſiſchen unter dem folgenden Titel ins Deutſche überſetzt hat: Umſtändliche Anweiſung, wie alle Arten von Fernröhren in der gröſten möglichen Vollkommenheit zu verfertigen ſind, aus des ältern Herrn Eulers Theorie der Dioptrik gezogen, und für alle Künſtler begreiflich gemacht von Hrn. Nicolaus Fuß. Leipzig. 1778.

Anfangsgründe der Catoptrik.

Die 1. Erklärung.

1. Jede recht glatt polirte Fläche einer harten Maſſe, worauf man keine merkliche Ungleichheiten wahrnehmen kann, heißt hier eine Spiegelfläche.

Die 1. Erfahrung.

2. Man laſſe im finſtern Zimmer durch eine kleine Oefnung einen Sonnenſtrahl auf einen ebenen Spiegel fallen: ſo nimmt man an dem im erleuchteten Raum glänzenden Staube leicht war, daß der einfallende Strahl in grader Linie wieder zurückgeworfen werde. Auch kann man ſich durch mehr als ein Hülfsmittel davon verſichern, daß bey jedem Verſuch und jedem Einfallswinkel nicht allein der einfallende und zurükgeworfene Strahl in einer Ebene liegen, ſondern auch beyder Strahlen Neigungswinkel gegen die Ebene des Spiegels gleich groß ausfallen.

Die 2. Erklärung.

3. Eine grade Linie, die auf der Spiegelfläche in dem Punct, wo der Strahl auffällt, ſenkrecht ſteht, heißt das Einfallsloth: in dem Fall, wenn die Spiegelfläche krumm iſt, muß man eine grade auf derjenigen Ebene ſenkrechte Linie verſtehen, welche die Spiegelfläche in dem Punct berührt, wo der

Strahl auffällt. Die Ebene durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl iſt die Neigungsebene des letztern, in derſelben liegt auch der zurückgeworfene Strahl, (2 §.) und man kann ſie die Zurůkwerfungsebene nennen. Die Catoptrik erklärt die Mathematiſche Theorie von den Erſcheinungen, die das zurůkgeworfene Licht verurſachet.

Zuſatz.

4. Die Winkel, welche beyde Strahlen, der einfallende und zurůkgeworfene, mit dem Einfallsloth machen, ergänzen die Neigungswinkel der Strahlen gegen die Spiegelfläche zu 90°, und ſind beyde gleich groß, weil die Neigungswinkel gleich groß ſind.

Der 1. Lehrſatz.

5. Wenn der ſtrahlende Punct *L* ſein Licht auf die ebene Spiegelfläche *XY* wirft, und *LR* auf *XY* ſenkrecht iſt; ſo haben alle zurůck geworfene Strahlen *AB*, *CD*, *EF*, eine ſolche Lage gegen einander, daß ſie rückwärts verlängert einander in einerley Punct *M* ſchneiden, der im Neigungsloth *LR* ſoweit hinter der Spiegelfläche als *L* vor derſelben liegt. 206 Fig.

Beweis. Es ſey LC ein einfallender Strahl, alſo LCR ſein Neigungswinkel gegen die Spiegelfläche, in deſſen Ebene auch der zurůck geworfene Strahl CD liegt. Wenn dieſer nach H verlängert wird, ſo iſt GCD = RCL (2. §.) und GCD = RCH, (20. §. Geom.) alſo RCL = RCH. Ueberdem iſt CRM = CRL = 90°: alſo muß CH mit RM irgendwo in M zuſammen laufen, (99. §. Geom.) ſo daß RM = RL wird. (90. §. Geom.) Völlig eben

ſo

ſo erhellet, daß auch AB, EF, verlängert durch M laufen.

Der 1. Zuſatz.

6. Das Auge einer Perſon, die den Spiegel betrachtet, hat eben die Empfindung, die es hätte wenn L wirklich in M vorhanden wäre, und von M aus die Lichtſtrahlen um ſich her verbreitete. Deßwegen ſcheint L in M zu ſtehen, und M iſt das Bild von L.

Der 2. Zuſatz.

7. Wofern alles auf den Spiegel fallende Licht zurükgeworfen wird, ſo erleuchtet das Bild M jede Ebene, die das zurückgeworfene Licht auffängt, völlig ſo, wie der Punct L ſelbſt dieſe Ebene erleuchten würde, wenn er in M befindlich und der Spiegel nicht da wäre.

Der 3. Zuſatz.

8. Jeder Punct eines Gegenſtandes, wie OL, hat ſein Bild hinter der Spiegelfläche in der von ihm darauf ſenkrecht fallenden graden Linie, ſo daß Bild und abgebildeter Punct gleich weit von der Spiegelfläche entfernt ſind. Alle dieſe Bilder liegen hinter der Spiegelfläche vollkommen in eben der Ordnung, wie die abgebildeten Puncte in dem Gegenſtande ſelbſt liegen: ſie machen alſo zuſammen genommen ein Bild des ganzen Gegenſtandes aus, das demſelben gleich und ähnlich iſt.

Der 4. Zuſatz.

207 Fig. 9. Wenn AB eine Perſon iſt, die ſich im lothrecht ſtehenden Spiegel CD betrachtet, und Oo der Stern im Auge; wenn ferner A der oberſte Scheitelpunct, B der Fußpunct iſt, und AC, BD, nach a und b verlängert auf CD ſenkrecht ſind, auch $Ca = CA$, $Db = DB$ genommen iſt: ſo kann man Oa, oa, auch

Ob

Ob, *ob*, ziehen, welches mit der Spiegelfläche die Durchſchnittspuncte *m*, *n*, und *p*, *q*, giebt. Man ziehe nach A*m*, A*n*, und B*p*, B*q*: ſo geht das zum Strahlenkegel A*mn* gehörige Licht ins Auge O*o* ſo zurück als käme es von *a* her, das zum Strahlenkegel B*pq* gehörige Licht aber ſo, als wenn es von *b* herkäme. Alle übrige Puncte des Körpers der Perſon ſelbſt und eines jeden andern Gegenſtandes bilden ſich eben ſo im Spiegel ab: alſo begreift man völlig, wie es zugehet, daß jede Perſon ſich ſelbſt, und andre Sachen, die vor dem Spiegel befindlich ſind, hinter dem Spiegel ſiehet.

Der 5. Zuſatz.

10. Das Bild *ab* eines Objects AB hat gegen die hintere Spiegelfläche eben die Lage, die das Object ſelbſt gegen die Vorderfläche hat. Das Bild eines aufrecht ſtehenden Gegenſtandes erſcheint im aufrecht ſtehenden Spiegel zwar eben ſo: jedoch verwechſeln ſich die rechte und linke Seite mit einander. Wenn der Spiegel gegen eine grade Linie oder Ebene, die horizontal liegt, unter einem Winkel von 45° geneigt iſt; ſo erſcheint das Bild der Linie, oder Ebene lothrecht. Auch umgekehrt das Bild einer lothrechten graden Linie oder Ebene erſcheint wagrecht im Spiegel, der unter einem Winkel von 45° dagegen geneigt iſt. 208 Fig.

Der 6. Zuſatz.

11. Das Bild *ab* erſcheint unter demſelben Sehewinkel, wie das Object AB ſelbſt erſcheinen würde, wenn es hinter dem Spiegel an der Stelle des Bildes mit demſelben in einerley Lage befindlich wäre. Wenn O den Mittelpunct des Sterns im Auge vorſtellet, und die beyden Schenkel O*a*, O*b*, 208 Fig.

des

des Sehewinkels, unter welchem das Bild *ab* erſcheint, die Spiegelfläche in α, β, treffen; ſo bedarf es deſſen nur, daß die Spiegelfläche ſich von α bis β erſtrecke, um *ab* aus O ganz zu überſehen. Wenn alſo AB die ganze Höhe einer grade ſtehenden Perſon iſt, die ſich im lothrecht ſtehenden Spiegel CD betrachtet, ſo wird nur eine Höhe *pm* des Spiegels erfodert, damit man ſich ganz darin ſehen könne, Es iſt aber $pm = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}$ AB. (175. §. Geom.)

Der 7. Zuſatz.

12. Ein Object, das zwiſchen zweyen ebenen Spiegeln befindlich iſt, wenn ſie unter einem Winkel, der kleiner als 180° iſt, gegen einander geneigt ſind, bildet ſich in beyden ab. Je kleiner alsdenn der Winkel iſt, unter welchem die Spiegelflächen gegen einander geneigt ſind, deſto mehreremahl können die von jedem Spiegel zurückgeworfenen Strahlen wieder auf den andern fallen, und ein neues Bild machen: zwiſchen zweyen parallelen Spiegeln, vervielfältiget ſich das Bild unzähligmahl. M. ſ. die Anfangsgründe 3. B. 43. u. f. §. der Catoptrik.

Der 8. Zuſatz

206 Fig. 13. Wenn ein Lichtkegel, oder eine Lichtpyramide BDFM zuſammenlaufender Strahlen, die in einem Punct M hinter der Spiegelfläche XY zuſammenlaufen würden, auf den ebenen Spiegel fällt; ſo haben alle zurückgeworfene Strahlen einen wirklichen phyſiſchen Vereinigungspunct L in der graden Linie MR, die von der Spitze M der auffallenden Lichtpyramide auf den Spiegel ſenkrecht fällt; und beyde Vereinigungspuncte M, L, der auffallenden und zurückgeworfenen Strahlen ſind von der Spiegelfläche gleich weit entfernt.

Die

Die 3. Erklärung.

14. Ein ſphäriſcher Spiegel, deſſen polirte Fläche die Figur eines Kugelabſchnitts hat, iſt entweder ein Hohlſpiegel, oder ein erhabener ſphäriſcher Spiegel, nachdem die Figur ſeiner polirten Fläche mit der Figur der innern hohlen Seite, oder der äuſſern erhabenen Seite der Fläche eines Kugelſegments überein kommt. Die Axe dieſes Kugelſegments iſt zugleich die Axe des Spiegels.

Die 1. Aufgabe.

15. Aus dem Punct P der Axe AP des ſphäriſchen Hohlſpiegels fällt ein Lichtſtrahl PM auf die Spiegelfläche, der nach Mp zurück geworfen wird: die Lage des einfallenden Strahls iſt gegeben, man ſoll die Lage des zurückgeworfenen finden. 209 Fig.

Aufl. Wenn C der Mittelpunct der ſphäriſchen Fläche des Spiegels iſt; ſo ziehe man CM: alsdenn liegt der zurückgeworfene Strahl in der Ebene PMC und es iſt $CMp = CMP$. Ferner wird angenommen, daß der Halbmeſſer der Spiegelfläche $CM = r$, der Winkel ACM, oder ſtatt deſſen APM, und die Entfernung $AP = \delta$ gegeben ſind. Im Dreyeck PCM iſt alsdenn $\sin CMP = \frac{\sin APM}{r} . CP$, und im Dreyeck pCM eben ſo $\sin CMp = \frac{\sin ApM}{r} . Cp$. (29. §. Trig.) Ferner iſt $CMp = CMP$, (2. §.) alſo $\frac{\sin APM}{r} . CP = \frac{\sin ApM}{r} Cp$, und daraus folgt $Cp = \frac{\sin APM}{\sin ApM} . CP$

. CP. Weil nun $CP = AP - AC = \delta - r$ gegeben iſt, ſo iſt der Winkel $CMP = CMp$ gegeben, folglich auch $ApM = APM + 2\,CMP$, und man kann Cp, mithin auch $Ap = AC - Cp$ finden.

Der 1. Zuſatz.

16. Wenn AM ein ſo kleiner Kreisbogen iſt, daß ApM, ACM, APM nur kleine Winkel ſind; ſo iſt ſehr nahe $\frac{\sin APM}{\sin ApM} = \frac{APM}{ApM}$, und $APM = \frac{AM}{AP}$, $ApM = \frac{AM}{Ap}$ (63. §. Dioptr.), alſo findet man $Cp = \frac{Ap}{AP} \cdot CP$. Man ſetze $Ap = x$, ſo iſt $Cp = r - x$, und man erhält $r - x = \frac{x}{\delta} \cdot (\delta - r)$. Daraus folgt $\delta r - \delta x = \delta x - rx$, und $\delta r = 2\delta x - rx$, mithin $x = \frac{\delta r}{2\delta - r}$, oder auch $x = \frac{\delta \cdot \frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$.

Der 2. Zuſatz.

17. Je gröſſer δ wird, deſto mehr nähert ſich x dem Werth $\frac{1}{2}r$, und ſo groß iſt Ap, wenn der einfallende Strahl mit der Axe des Spiegels parallel iſt. Fällt der Strahl in einer ſolchen Lage VM auf,
210 Fig. daß er verlängert die Axe hinter dem Spiegel in P ſchneiden würde, ſo iſt δ negativ, und $x = \frac{\delta \cdot \frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}$.

Der 3. Zuſatz.

18. Wenn r unendlich groß, das heißt, wenn die zurückwerfende Fläche eben iſt, ſo wird $x = -\delta$,

wie

wie der Natur der Ebene gemäß iſt. Wenn aber r negativ iſt, das heißt wenn die vordere polirte Fläche des Spiegels erhaben iſt, wie es die 211 Fig. vorſtellt; ſo iſt $x = -\frac{\delta \cdot \frac{1}{2}r}{\delta + \frac{1}{2}r}$ negativ, der einfallende Strahl PM wird nach Mo ſo zurückgeworfen, daß er verlängert hinter dem Spiegel mit der Axe in p zuſammen ſtößt. 211 Fig.

Der 4. Zuſatz.

19. Fängt die erhabene Spiegelfläche den Strahl ſo auf, daß er hinter dem Spiegel mit der Axe zuſammenlaufen würde, ſo iſt auch δ negativ, und es wird $x = \frac{\delta \cdot \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r - \delta}$.

Der 5. Zuſatz.

20. Alle aus einerley Punct P ſehr nahe bey der Axe auffallende Strahlen laufen nach der Zurükwerfung ſehr nahe wieder in einerley Punct der Axe zuſammen, und dieſer Punct iſt in einem ähnlichen Sinn, wie bey der Strahlenbrechung, (12. §. Dioptr.) entweder ein wirkliches phyſiſches, oder ein geometriſches Bild von P.

Die 4 Erklärung.

21. Unter allen Lichtſtrahlen, die ein Punct P in der Axe des ſphäriſchen Spiegels, oder auch ein Punct Q ſeitwärts der Axe auf den Spiegel wirft, heißt derjenige der Hauptſtrahl, der auf die Mitte A des Spiegels fällt.

Der 2. Lehrſatz.

22. Wenn PQ eine grade auf AP ſenkrechte Linie, und PAQ ein ſehr kleiner Winkel iſt; ſo laufen unter den Strahlen, die jeder Punct wie Q in der Linie PQ auf den Spiegel ſendet, 212 Fig.

diejenigen, welche ſehr nahe bey dem Hauptſtrahl auf die Linſe fallen, nach der Zurückwerfung in einerley Punct q des zurückgeworfenen Hauptſtrahls zuſammen: auch iſt alsdenn q eben ſoweit von der Mitte des Spiegels entfernt, als der Vereinigungspunct p der aus dem Punct P der Axe auffallenden Strahlen.

Beweis. Man ziehe QC bis an den Spiegel in D, ſo liegt D ſehr nahe bey A, und alle aus Q auffallende Strahlen vereinigen ſich nach der Zurückwerfung in dem Punct q der Axe QC, wenn Dq = Ap genommen wird. Man mache den Winkel PAR = PAQ, ſo iſt AR der zurückgeworfene Hauptſtrahl, und dieſer muß durch q laufen, weil q beydes im zurückgeworfenen Hauptſtrahl und in der Axe QC liegen muß. Wegen der ſehr kleinen Winkel ACD CAq, iſt auch beynahe Aq = Dq, folglich Aq = Ap.

Die 5. Erklärung.

23: Jeder Punct der auf der Axe AP ſenkrechten graden Linie PQ, die hier auch als ein Kreisbogen angeſehen werden kann, wenn der Winkel PAQ klein iſt, hat ſein Bild in dem vom Spiegel wieder zurückgeworfenen Hauptſtrahl; alle dieſe Bilder liegen in einem kleinen Kreisbogen pq, wenn PQ ein ſolcher Bogen iſt, da dann auch pq als eine grade auf AP ſenkrechte Linie angeſehen werden kann: dieſe Reihe der Bilder macht ein Bild der Linie PQ aus.

Der 1. Zuſatz.

24. Jeder andre Gegenſtand alſo, deſſen ſcheinbare Gröſſe aus der Mitte des Spiegels geſehen nur klein iſt, hat ſein Bild da, wo die von jedem Punct

auf

auf den Spiegel fallenden Strahlen nach der Zurückwerfung ihre Vereinigungspuncte haben. Das Bild iſt dem Gegenſtande ſonſt in allem ähnlich, nur hat es die verkehrte Stellung, wenn es vor dem Spiegel befindlich iſt.

Der 2. Zuſatz.

25. Mit dem Halbmeſſer PQ des Objects gehört der Halbmeſſer pq des Bildes zuſammen, und wegen der Aehnlichkeit der bey P, p, rechtwinklichten Dreyecke APQ, Apq, iſt PQ : pq = AP : Ap.

Die 6. Erklärung.

26. Der Punct in der Axe des ſphäriſchen Hohlſpiegels, worin Strahlen, die nahe bey der Axe mit ihr parallel einfallen, nach der Zurückwerfung wieder zuſammen laufen, heißt der Brennpunct des Spiegels, ſeine Entfernung vom Spiegel die Brennweite, und der kreisförmige Raum, den das Bild der Sonne einnimmt, wenn die Axe des Spiegels gegen den Mittelpunct der Sonne gerichtet iſt, der Brennraum: alles in einem ähnlichen Sinn, wie bey Glaslinſen. (30. §. Dioptr.)

Der 1. Zuſatz.

27. Man ſetze $\delta = \infty$, ſo wird der Ausdruck

$x = \frac{\delta . \frac{1}{2}r}{\delta - \frac{1}{2}r}$ (16. §.) $= \frac{1}{2}r$. Statt deſſen ſchreibe

man f, ſo iſt $f = \frac{1}{2}r$ die Brennweite des ſphäriſchen Spiegels, und dieſe erhält für den erhabenen Spiegel, wenn r negativ iſt, die entgegen geſetzte Lage: mithin hat der erhabene Spiegel nur einen geometriſchen keinen phyſiſchen Brennraum.

Der 2. Zuſatz.

28. Die Vorausſetzung $f = \frac{1}{2}r$ giebt $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$,

wie für Linſengläſer. (36. §. Dioptr.) Demnach finden alle Sätze auch beym ſphäriſchen Spiegel ihre Anwendung, die daraus für Linſengläſer ſind hergeleitet worden, wenn nur bemerkt wird, daß hier die Entfernungen poſitiv genommen ſind, die vor dem Spiegel liegen.

Der 3. Zuſatz.

29. Wird die Stelle des Bildes mit der Stelle des Objects verwechſelt, ſo fällt das Bild dahin, wo vorher das Object ſeine Stelle hatte. Iſt das Object um die Brennweite des Spiegels von demſelben entfernt, ſo giebt es gar kein Bild: alle von jedem Punct auf den Spiegel fallende Strahlen werden bey der Zurückwerfung in die mit dem zurückgeworfenen Hauptſtrahl parallele Lage gebracht, (Man vergleiche den 39 u. 40. §. Dioptr.) Daher kann man ſich des Hohlſpiegels mit Vortheil bedienen, vermittels einer im Brennraum angebrachten Lichtflamme Sachen ſtärker zu erleuchten, als die Flamme für ſich allein ſelbige erleuchten würde.

Der 4. Zuſatz.

30. Ueberhaupt hat der ſphäriſche Hohlſpiegel die Natur einer Sammlungslinſe, der erhabene Spiegel aber die Natur einer Zerſtreuungslinſe: alſo wendet man leicht die im 42. bis 48. §. der Dioptrik bewieſenen Sätze auch hier auf ſphäriſche Spiegel an. Ein Object, deſſen Entfernung vom Hohlſpiegel kleiner als die Brennweite iſt, hat ein vergröſſertes geometriſches Bild hinter dem Spiegel. Der erhabene Spiegel macht allemahl, wenn die Strahlen von einem wirklichen Object kommen, nur ein geometriſches Bild, das hinter demſelben erſcheint, und kleiner iſt, als das Object. Strahlen, die

ſchon

ſchon zuſammenlaufend auffallen, vereiniget der Spiegel in einem wirklichen Bilde unter eben der Bedingung wie die Hohllinſe. (45. §. Dioptr.)

Die 7. Erklärung.

31. Ein Spiegelteleſcop iſt ein ſolches Fernrohr, das ſtatt des Objectivglaſes mit einem Hohlſpiegel verſehen iſt. Wenn gleich auch anders gekrümmte Hohlſpiegel dienen können, ſo werden hier doch nur ſphäriſche Spiegel verſtanden.

Der 1. Zuſatz.

32. Des Hohlſpiegels AB polirte Fläche ſey dem 215
Object zugekehrt, CP ſey des Spiegels Axe, und 216
demſelben gegen über ſey ein kleinerer Hohlſpiegel Fig.
DE ſo geſtellt, daß beyder Axen in einerley graden Linie zuſammen fallen. Dieſer Spiegel DE fängt das von AB zurückſtrahlende Licht auf, und wirft es von neuen gegen denſelben zurück. Um dies Licht durchzulaſſen, muß der Hohlſpiegel AB in der Mitte eine kreisrunde Oefnung haben, ſo kann man hinter demſelben noch ein Ocularglas, oder mehrere ſtellen, wie HI, KL. Die ſo verbundene Reihe von Spiegeln und Gläſern kann alsdenn als Fernrohr dienen.

Der 2. Zuſatz.

33. Es kann auch ein kleiner erhabener Spiegel ſtatt DE, ja auch ein ebener Spiegel dienen.

Die 8. Erklärung.

34. Nachdem der kleine Spiegel im Teleſcop entweder eben, oder hohl, oder erhaben iſt, nachdem hat daſſelbe den Nahmen des Newtonſchen, Gregorianiſchen oder Caſſegrainiſchen Teleſcops erhalten. Die Urſache iſt, weil das erſte vom Herrn Newton zu Stande gebrachte Teleſcop einen ebe-

nen Spiegel hatte, ſtatt deſſen aber Gregorius und Caſſegrain die Anordnung mit dem Hohlſpiegel und erhabenen Spiegel angegeben haben.

Der 1. Zuſatz.

217 Fig. 35. Dem Hohlſpiegel AB, auf welchen das vom Object PQ kommende Licht fällt, und gegen das Bild πk zurückſtrahlet, ſey der ebene Spiegel DE ſo entgegen geſtellt, daß er das zurückſtrahlende Licht noch vor dem Bilde πk auffängt: ſo kommt ſtatt des Bildes πk ein anderes pq zu Stande, und die Entfernung Kp des wirklichen Bildes pq vom ebenen Spiegel DE iſt der Entfernung Kπ des Bildes πk von eben dem Spiegel gleich, (13. §.) auch ſind beyde Bilder gleich groß. Hinter dem Bilde pq kann das Ocular HI die von den Puncten dieſes Bildes wieder auseinander fahrenden Strahlen auffangen, und ins Auge O auf eben die Art bringen, wie das Ocular eines Sternrohrs, wenn Fp der Brennweite des Glaſes gleich iſt.

Der 2. Zuſatz.

36. Was Brennweite und Oefnung des Objectivglaſes beym dioptriſchen Fernrohr waren, das ſind hier Brennweite und Oefnung des Objectivſpiegels: alſo wendet man die allgemeinen Lehren von Fernröhren (62. u. f. §. §. Dioptr.) auch leicht auf Spiegelteleſcope an. Hier beſtimmt der Winkel PCQ = KCG = φ das halbe Geſichtsfeld, und es iſt $\varphi = \frac{pq}{C\pi}$, FOH = $pFq = \frac{pq}{Fp}$, alſo die Vergröſſerungszahl $m = \frac{FOH}{\varphi} = \frac{C\pi}{Fp}$, wie beym Sternrohr. Es kann zwar kein eigentlicher Hauptſtrahl

QC

QC ins Auge kommen, wenn der Spiegel AB in der Mitte durchbort iſt: indeſſen dient doch die Beſtimmung der Lage deſſelben, wie er würde zurück geworfen werden, die Vergröſſerungszahl zu finden, und die Stelle, wo das Auge ſtehen muß, anzugeben.

Der 3. Zuſatz.

37. Der ebene Spiegel könnte auch unter einem Winkel von 45° gegen die Axe des groſſen Spiegels geneigt ſeyn. Alsdenn würde er ſeitwärts der Axe ein Bild zuwege bringen, welches das Auge durch ein in der Röhre eingeſetztes Augenglas von der Seite her betrachten müſte. Das erſte Newtonſche Teleſcop hatte wirklich dieſe wiewohl etwas unbequeme Einrichtung.

Die 2. Erfahrung.

38. Licht, das von einer Spiegelfläche nach dem im 2. §. feſtgeſetzten Geſetze zurück ſtrahlet, leidet keine Farbenzerſtreuung.

Anmerkung.

39. Die Rede iſt von einer ſolchen Zurückſtrahlung womit ganz und gar keine Brechung des Lichts verbunden iſt. Unſre gläſernen Spiegel leiſten daher das nicht, was ein metallener Spiegel leiſtet. Ein Theil des auffallenden Lichts ſtrahlt von der Vorderfläche des Glaſes zurück, der übrige ins Glas hinein dringende Theil wird gebrochen, ſtrahlt hiernächſt von der hintern mit der Folie belegten Fläche zurück, und wird beym Uebergange aus dem Glaſe in die Luſt an der Vorderfläche des Glaſes von neuen gebrochen.

Zuſatz.

40. Das Bild, welches das vom ſphäriſchen Spiegel zurückſtrahlende Licht verurſachet, iſt viel deutlicher, als dasjenige, was von dem in der Glaslinſe gebrochenen Licht zuwege gebracht wird, weil die Zurückſtrahlung von der Farbenzerſtreu-

ung frey iſt. Die ganz nahe beym Hauptſtrahl auffallenden Strahlen haben wirklich einerley Vereinigungspunct: doch laufen die in etwas mehr Entfernung vom Hauptſtrahl auffallenden Strahlen nach der Zurückſtrahlung mit jenen nicht in einerley Vereinigungspunct zuſammen. Es giebt auch hier eine Abweichung wegen der Kugelgeſtalt des Spiegels in einem ähnlichen Sinne, wie bey der Brechung des Lichts in ſphäriſchen Glaslinſen. (89. §. Dioptr.): doch iſt ſie bey Spiegeln, wenn ſonſt alles übrige gleich iſt, nicht ſo beträchtlich, als bey Glaslinſen. Das iſt die Urſache, warum ein Spiegelteleſcop bey einerley Vergröſſerung viel kürzer ausfallen kann, als ein dioptriſches Fernrohr mit dem einfachen Objectivglaſe.

Die 3. Erfahrung.

41. Ein Teleſcop nach Newtons Entwurfe, welches Hadley im Jahr 1723 der Königlichen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften in London überreichte, hatte einen Objectivſpiegel von 62,5 Zoll Brennweite. Nachdem man ſeiner Oeſnung die Breiten von 4,5 Zoll, 5 Zoll, oder 5,5 Zoll gab, ward dazu ein Augenglas gebraucht, das $\frac{1}{4}\frac{1}{0}$ Zoll, oder 0,3 Zoll, oder $\frac{1}{3}$ Zoll Brennweite hatte.

Zuſatz.

42. Wird die Einrichtung mit der mittlern Oeſnung zum Grunde geſetzt, ſo iſt die Vergröſſerungszahl $\frac{62,5}{0,3} = 208,3$ mahl.

Die 2. Aufgabe.

43. Die Vergröſſerungszahl iſt gegeben: man ſoll ein Spiegelteleſcop anordnen, das bey dieſer vorgeſchriebenen Vergröſſerung die be-

betrachteten Objecte eben ſo deutlich und helle, als das Newtonſche darſtellet.

Aufl. 1. Wegen der gleichen Helligkeit müſſen ſich, wie bey Objectivgläſern, die halben oder ganzen Oefnungsdurchmeſſer der Objectivſpiegel wie die Vergröſſerungszahlen verhalten.

2. Wegen der gleichen Deutlichkeit müſſen ſich die Oefnungsdurchmeſſer der Objectivſpiegel, mithin auch die Vergröſſerungszahlen, wie die Cubiczahlen von den Brennweiten der Oculare verhalten.

M. ſ. den dritten Band der Anfangsgründe im VI. Abſchn. der Photom. 321. §. 598. 599. S.

Will man ein Teleſcop haben das 171 mahl vergröſſern ſoll, ſo ſuche man zuerſt den Oefnungsdurchmeſſer $2x$ des Objectivſpiegels, vermittelſt der Proportion $208{,}3 : 171 = 5$ Zoll $: 2x$, ſo findet man $2x = 4{,}104$ Zoll.

Ferner ſetze man an

$$5 \text{ Zoll} : 4{,}104 \text{ Zoll} = 0{,}3^3 : q^3,$$

wenn q die Brennweite des Oculars bezeichnet: ſo erhält man $q^3 = 0{,}0221616$, mithin $q = 0{,}281$ Zoll. Daraus findet man die Brennweite des Objectivſpiegels $0{,}281 \times 171 = 48$ Zoll.

Der 1. Zuſatz.

44. Wenn p, P, für die Objectivſpiegel q, Q, für die Ocularglaͤſer die Brennweiten, und m, M, die Vergröſſerungszahlen bezeichnen; ſo iſt $m : M = \frac{p}{q} : \frac{P}{Q}$, und überdem (vermöge des 43. §. n. 2.) iſt $m : M = q^3 : Q^3$. Daraus folgt $\frac{p}{q}$:

$: \frac{P}{Q} = q^3 : Q^3$, alſo ferner $p : P = q^4 : Q^4$. Das will ſagen: die Brennweiten der Objectivſpiegel müſſen ſich verhalten, wie die Biquadrate von den Brennweiten der Ocularglåſer. Für einen Objectivſpiegel von gegebener Brennweite kann alſo vermittelſt dieſer Proportion die Brennweite des Oculars gefunden werden.

Der 2. Zuſatz.

45. Soll der Objectivſpiegel 3 Fuß Brennweite haben; ſo ſetzt man an 62,5 Zoll : 36 Zoll = $0,3^4 : 9^4$. Das giebt $9^4 = 0,00466560$, davon iſt die Quadratwurzel = 0,068305, und hievon ferner die Quadratwurzel = 0,261 Zoll, als die geſuchte Brennweite des Ocularglaſes.

Der 3 Zuſatz.

46. Wenn die Vergrößerungszahl 200 ſeyn ſollte: ſo würde man die Brennweite des Objectivſpiegels nur von 5 Fuß finden: dagegen müſte ein einfaches Objectivglas wenigſtens 100 Fuß Brennweite haben, um ſo viele Vergrößerung zu erhalten. (91. 92. §. Dioptr.) Das dreyfache achromatiſche Objectiv würde jedoch völlig ſoviel als im Objectivſpiegel leiſten, wenn es völlig richtig nach der Theorie ausgearbeitet wäre. (97. §. Dioptr.)

Die 3. Aufgabe.

47. Dem Caſſegrainiſchen Teleſcop eine ſolche Anordnung zu geben, daß der erhabene Spiegel zur Vergrößerung noch etwas beytrage.

218 Fig. Aufl. Man ſetze die Brennweiten des Objectivſpiegels = p, des erhabenen Spiegels = q, des Ocularglaſes = r. Wenn nun der Objectivſpiegel

AB

AB das Bild eines weit entfernten Gegenſtandes in πk darſtellet; ſo iſt $C\pi = p$. Die Strahlen, welche in den Puncten dieſes Bildes zuſammenlaufen würden, fallen auf den erhabenen Spiegel DE, und bringen vor demſelben in pq ein wirkliches phyſiſches Bild zuwege, wenn die Entfernung $K\pi$ kleiner, als des Spiegels Brennweite iſt. (30. §.) Denn in dem allgemeinen Ausdruck $x = \frac{\delta f}{\delta - f}$ (28. §.) muß man hier $\delta = -K\pi$ ſetzen, und $f = -q$: ſo erhält man $x = Kp = \frac{q \,.\, K\pi}{q - K\pi}$. Demnach liegt p vor dem Spiegel, wenn $K\pi < q$ iſt, und es wird $Kp > K\pi$. Man ſetze $K\pi = b$, $Kp = \beta$, ſo hat man $\beta = \frac{q \,.\, b}{q - b}$.

Hinter dem Bilde pq fahren die Strahlen aus jedem Punct deſſelben wieder auseinander. Wenn alſo Fp der Brennweite r des Ocularglaſes HI gleich iſt, ſo werden die zu jedem Punct gehörigen Strahlen beym Durchgange durch HI in die mit dem Strahl qF parallele Lage gebracht, wie erfordert wird, wenn das Object deutlich geſehen werden ſoll. Der aus Q kommende Hauptſtrahl QC wird nach G geworfen, und es iſt PCG = PCQ. Wenn alsdenn k das Bild von Q iſt, ſo läuft CG in k, und unter dem nach k zuſammenlaufenden Strahlen iſt LK der Hauptſtrahl. Der letztere wird nach q zurückgeworfen, ſo daß LKC = CKq iſt; wenn alſo q das Bild von k iſt, ſo läuft auch der Strahl CG nach der Zurückwerfung durch q.

Nun

Nun iſt $pKq = LKp = \pi Kk = \frac{\pi k}{K\pi} = \frac{\pi k}{b}$, und $\pi Ck = \varphi = \frac{\pi k}{C\pi} = \frac{\pi k}{p}$, folglich $\frac{pKq}{\varphi} = \frac{p}{b}$. Ferner iſt $pFq = \frac{pq}{Fp} = \frac{pq}{r}$, und $pKq = \frac{pq}{Kp} = \frac{pq}{\beta}$, mithin $\frac{pFq}{pKq} = \frac{\beta}{r}$. Daraus folgt $\frac{pFq}{\varphi} = \frac{p}{b} \cdot \frac{\beta}{r}$, und das iſt die Vergröſſerungszahl m. Weil nun $\beta > b$ iſt, ſo wird $m > \frac{p}{r}$, und dies letztere wäre die Vergröſſerung für das Newtonſche Teleſcop mit dem ebenen Spiegel.

Zuſatz.

46. Dies Teleſcop ſtellet, wie das Newtonſche und das gewöhnliche Sternrohr, das Object umgekehrt vor. Wird ſtatt des erhabenen Oculars ein Hohlglas gebraucht, ſo erſcheinen die Objecte aufrecht.

Die 4. Aufgabe.

47. Dem gregorianiſchen Teleſcop eine ſolche Anordnung zu geben, daß es wie das Erdrohr die Objecte aufrecht vorſtellet.

216 Fig. Aufl. Es ſey p des Objectivſpiegels, und q des kleinen Hohlſpiegels Brennweite. Wenn alsdenn der Objectivſpiegel AB von einem entfernten Gegenſtande das wirkliche Bild in pq macht; ſo entferne man davon den kleinen Hohlſpiegel DE um ſeine Brennweite, ſo daß $Fp = q$ ſey, ſo wie $Cp = p$, iſt.

iſt. Alsdenn iſt $PCQ = pCq = \varphi$, und $\frac{pFq}{\varphi} = \frac{Cp}{Fp} = \frac{p}{q}$. Nun werden alle zu einerley Punct des Bildes gehörige Strahlen, nach der Zurückwerfung vom kleinen Spiegel DE mit dem zurückgeworfenen dazu gehörigen Hauptſtrahl parallel. (29. §.) Von q fällt der Hauptſtrahl qF auf den kleinen Spiegel, und wird nach FH zurük geworfen; ſo daß $CFH = CFq$ iſt: alſo wird CG nach GS mit FH parallel zurückgeworfen. Man ziehe auch ML durch die Mitte M des Oculars RS mit FH und GS parallel, ſo iſt LM der zu dieſen Parallelſtrahlen gehörige Hauptſtrahl, das Ocular RS bringt in ſeinem Brennraum das wirkliche Bild πk zuwege, und es iſt der Winkel $\pi Mk = FML = CFH = pFq$. In der Entfernung $\pi N = M\pi$ ſtelle man ein andres Ocular TV, das mit dem vorigen eine gleiche Brennweite hat; ſo bricht ſelbiges die zu einerley Punct k gehörigen Strahlen wieder in die mit dem dazu gehörigen Hauptſtrahl kN parallele Lage VO, und das Object wird aus O deutlich und aufrecht unter dem Winkel $NOV = \pi Nk = \pi Mk = pFq$ geſehen. Uebrigens iſt $\frac{p}{q}$ die Vergröſſerungszahl.

Allgemeine Anmerkung.

48. Wenn gleich die metallenen Spiegel, welche man zu Teleſcopen braucht, von der Farbenzerſtreuung frey ſind, ſo bleibt doch der farbigte Rand, welchen das Augenglas verurſachet, wofern man mit demſelben nicht das zweyte Augenglas oder noch mehrere verbindet. Auſſer der Hebung dieſes farbigten Randes kan auch noch der Vortheil der Vergröſſerung des Geſichtsfeldes erreicht werden, wenn man mehr Oculargläſer geſchickt mit einander

ander verbindet, und ihren ſpäriſchen Flächen eine ſolche Figur giebt, wie es dieſe Bedingungen erfodern. Man ſehe davon mit mehrern den XIX Abſchnitt der Photometrie im 3 Bande der Anfangsgründe.

Die erſten Gründe
der
Aſtronomie.

Die 1. Erklärung.

1. Die Aſtronomie lehrt die Ausmeſſung des Weltgebäudes im Groſſen und die Geſetze nach welchen die Bewegungen der Weltkörper und andre davon abhängende Erſcheinungen erfolgen, welche wir am geſtirnten Himmel wahrnehmen.

Die 1. Erfahrung.

2. Wenn wir den Erdboden aus einem erhabenen Orte, oder auch ſonſt aus einer Stelle überſehen, woſelbſt die Ausſicht nach allen Seiten hin frey iſt; ſo ſcheint derſelbe eine Ebene zu ſeyn, die rings um uns herum in einem Kreiſe eingeſchloſſen iſt, den wir die Geſichtsgränze, oder den Geſichtskreis nennen. (Man vergleiche den 19. §. der Optik.) Ueberdem ſcheint der Himmel ſich wie ein Halbkugelgewölbe über unſerm Haupte auszubreiten, und es hat das Anſehen, als wenn der äuſſerſte Geſichtskreis dieſem Halbkugelgewölbe zur Unterſtützung diente. Alle Sterne, ſelbſt die Sonne und den Mond nicht ausgenommen, erſcheinen

an

an dieſer ſcheinbaren Halbkugel nicht anders, als wenn ſie insgeſammt von der Stelle, aus welcher man ſie beobachtet, gleich weit enefernt wären.

Zuſatz.

3. Bey dem allen könnten doch wohl die Sterne ſehr ungleich weit von dem Beobachter entfernt ſeyn. (20. 21. §. Opt.) So lange indeſſen nur davon die Frage iſt, wie ſich das Weltgebäude den Sinnen darſtellet, kann man ſo reden, als wenn der geſtirnte Himmel, ſoweit er ſichtbar iſt, wirklich eine Halbkugel und der Beobachter im Mittelpunct befindlich wäre, die Sterne aber an ihrer innern hohlen Fläche ihre Stellen hätten.

Die 2. Erfahrung.

4. Auf einer weit ausgebreiteten Ebene ſiehet man die Spitzen entfernter Thürme und Berge, ohne daß man zugleich ihre nidrigern Theile wahrnehmen kann. Dergleichen Thürme und Berge ſcheinen ſich über dem Geſichtskreiſe immer zu erheben, je näher man ihnen kommt, umgekehrt aber deſto tiefer herab zu ſinken, je weiter man ſich davon entfernt.

Der 1. Zuſatz.

5. Daraus folgt, daß die Erdfläche nicht eben ſondern krumm ſeyn müſſe: auch muß die Krümmung der Erdfläche ſo beſchaffen ſeyn, daß ihre hohle Seite unten, die erhabene Seite aber oben liegt. Denn wiedrigenfalls müſte man den Thurm oder Berg immer ganz ſehen, wenn gleich ſeine ſcheinbabare Gröſſe in gröſſerer Entfernung kleiner iſt, als in geringerer Entfernung.

Der 2. Zuſatz.

6. Die Erde iſt alſo vielleicht eine Kugel, oder wenigſtens ein runder kugelähnlicher Körper. Weil jedoch

jedoch der im 4. §. erwehnte Erfolg allererſt in ziemlich-beträchtlichen Entfernungen werklich wird; ſo muß die Erde, wofern ſie wirklich eine Kugel iſt, eine anſehnlich groſſe Kugel ſeyn.

Der 3. Zuſatz.

7. Wenn man annimmt, daß die Erde eine Kugel ſey, und wenn man aus dieſer Vorausſetzung mit andern bekannten Wahrheiten verbunden folgert, wie das Weltgebäude ſich unſern Sinnen darſtellen müſſe; ſo ſtimmet alles, bis auf einige wenige Abweichungen, welche nur bey den ſchärfſten Ausmeſſungen bemerklich werden, mit der Erfahrung überein. Ganz kurz läßt ſich das aber nicht beweiſen: es werden vielmehr im folgenden nach und nach allererſt die Gründe feſtgeſetzt werden können, welche dazu dienen müſſen, die eigentliche Geſtalt und Gröſſe der Erde ausfindig zu machen.

Der 4. Zuſatz.

8. Weil die Richtung der Schwere auf der Erdfläche, ſo weit ſie eben zu ſeyn ſcheint, ſenkrecht iſt, ſo kann jeder Beobachter des geſtirnten Himmels an der Stelle, wo er beobachtet, nicht allein die Richtung der Schwere, als eine grade Linie von bekannter Lage, ſondern auch die darauf ſenkrechte Ebene der Erde, ſoweit ſich ſich nicht merklich krümmt, als eine Ebene von bekannter Lage annehmen. Dieſe Ebene des Horizonts ſcheint ſich nach allen Seiten bis an die geſtirnte Halbkugel des Himmels zu erſtrecken: alſo iſt es für unſre Empfindung eben ſo gut, als wenn eine ſolche Ebene wirklich da wäre.

Die 2. Erklärung.

219 Fig. 9. Es ſey T die Stelle des Beobachters auf der Erdfläche, und TZ eine lothrechte grade Linie aufwärts

wärts bis an die Himmelskugel in Z verlängert: ſo heißt TZ die Scheitellinie des Beobachters und Z ſein Scheitelpunct oder das Zenith. Ferner iſt T der Mittelpunct der ſcheinbaren Himmelskugel, und der Horizont ABCD ein gröſter Kreis, wozu die Scheitellinie TZ als eine Axe gehört: alſo iſt Z ein Pol des Horizonts. (327. §. Geom.) In S ſtehe ein Stern, der in der Richtung TS geſehen wird, ſo iſt die Ebene ZTS vertical, ihre Durchſchnittslinie BF mit dem Horizont läuft durch T, und BTS iſt die Höhe des Sterns über dem Horizont, ZTS ſein Abſtand vom Scheitel. Die Bogen BS, ZS, ſind die Maaße dieſer Winkel, und man kann ſich an der Himmmelskugel auch dieſe Bogen ſtatt der Winkel vorſtellen.

Die 3. Erklärung.

10. Wenn L ein andrer Stern iſt, ſo iſt der Winkel STL die ſcheinbare Entfernung zwiſchen beyden Sternen, und in der Ebene dieſes Winkels liegt der Bogen SL als das Maaß deſſelben. Alle dieſe Bogen gehören zu gröſten Kreiſen der Kugel, und man kann ſo reden, als wenn das wirkliche Bogen an einer Kugelfläche wären, weil ſich alles den Sinnen völlig ſo darſtellet. Man kann alſo auch von der ſcheinbaren Entfernung eines Sterns vom andern, oder von einem andern bekannten Punct an der Himmelskugel ſo reden, als wenn es wirkliche Entfernungen wären. Es iſt nemlich der gröſte Kreisbogen zwiſchen zweyen Puncten auf einer Kugelfläche, als die kürzeſte Linie, die ſich zwiſchen beyden auf der Kugelfläche ziehen läßt, mit der Entfernung des einen dieſer Puncte vom andern einerley.

Die 3. Erfahrung.

11. Der Himmel erſcheint jedem Beobachter, er mag ſich auf der gekrümmten Erdfläche wo er wolle befinden, als eine Halbkugel. Man ſiehet aber nicht an jedem Ort völlig einerley Sterne: auch bleiben ſelbſt an einem und eben demſelben Orte nicht immer einerley Sterne über dem Horizont. Sonne, Mond, und die meiſten übrigen Sterne gehen an einer Seite des Horizonts auf, welche man die **Morgenſeite, Oſtſeite,** nennt, und an der entgegengeſetzten Seite unter, welche die **Abend-ſeite, Weſtſeite** heißt. Sie erreichen in einer Gegend zwiſchen den beyden vorigen ihre gröſte Höhe, und dieſe Gegend des Horizonts heißt die **Mittags-ſeite.** (Süden) Hat man das Geſicht gegen Süden, ſo liegt Oſten zur linken, Weſten zur Rechten, und hinter ſich hat man **Norden,** oder die **Mitternachtsſeite.**

Zuſatz.

12. Der geſtirnte Himmel umgiebt die Erde von allen Seiten, und wenn die Erde nicht undurchſichtig wäre; ſo würde der Himmel wie eine ganze Kugel erſcheinen.

Die 4. Erklärung.

13. Wird die Scheitellinie TZ, unter dem Horizont bis an die Himmelskugel in dem Punct N verlängert; ſo iſt N der untere Pol des Horizonts, welcher mit dem obern Z zuſammen gehört. Auch heißt N der untere Scheitelpunct, oder das **Nadir.** Wenn P ein Stern unter dem Horizont iſt, und die Ebene NTP den Horizont in TF ſchneidet; ſo iſt FTP, oder der Bogen FP die Tiefe des Sterns unter dem Horizont.

Die

Die 5. Erklärung.

14. Jede Ebene durch die Scheitellinie ZN giebt einen gröſten Kreis, deſſen Ebene auf dem Horizont ſenkrecht iſt, (261. §. Geom.) und man nennt dergleichen Kreiſe Verticalkreiſe, oder Scheitelkreiſe. Der Bogen ZB eines Scheitelkreiſes zwiſchen dem Zenith und Horizont iſt allemahl ein Quadrant, und es iſt auch wohl gewöhnlich, daß man blos dieſen Quadranten verſteht, wenn vom Scheitelkreiſe eines Sterns, wie S, die Rede iſt, der ſeine Stelle in dieſem Scheitelkreiſe hat.

Die 4. Erfahrung.

15. In der nordlichen Gegend des Horizonts findet man viele Sterne, die niemahls untergehen. Sie ſteigen indeſſen doch, wie die übrigen Sterne durch Oſten gegen Süden herauf, kommen zum Theil dem Scheitelpunct nahe, und ſinken hiernächſt gegen Weſten wieder herab, erreichen im Norden ihren niedrigſten Stand, und ſteigen gegen Oſten wieder herauf. Ohngefehr 50 Grad hoch über dem Horizont, wenn man in hieſigen Gegenden den Himmel beobachtet, findet man einen ziemlich hell glänzenden Stern, in einer Gegend am Himmel, wo um ihn herum wenig andre kenntliche Sterne ſind: dieſer allein ändert ſeine Stelle nie merklich. Man mag dieſen Stern, der unter dem Nahmen des Nordſterns bekannt iſt, zu einer Jahrszeit wenn man will, und in einer Stunde des Nachts wenn man will beobachten, man findet ihn immer an derſelben Stelle. Die übrigen Sterne, einige wenige ausgenommen, bleiben vom Nordſtern immer gleich weit entfernt: ſie gehen alſo in Kreiſen um ihn herum, und es hat völlig das Anſehen, als

wenn die ganze Himmelskugel mit allen Sternen binnen 24 Stunden eine Umdrehuug um eine Axe machte, wovon der eine über dem Horizont befindliche Pol mit dem Nordſtern am Himmel einerley Stelle hat, oder doch demſelben ſehr nahe liegt.

Die 6. Erklärung.

220 Fig. 16. Die Axe PQ um welche ſich die Himmelskugel zu drehen ſcheint, heißt die **Weltaxe**, und ihre Pole P, Q, die **Weltpole**. Eben daher führt der Nordſtern auch den Nahmen des **Polarſterns**. Alle zur Weltaxe gehörige Parallelkreiſe, wie GSH, BLDE, heiſſen ſchlechthin **Parallelkreiſe**, und jeder Stern, wie S vorſtellet, macht ſeinen täglichen Umlauf in einem ſolchen Parallelkreiſe, der eben darum auch der **Tagekreis** des Sterns heißt. Der Aequator iſt der gröſte unter dieſen Parallelkreiſen, welchen BLDE vorſtellet; ſeine Ebene geht durch den Mittelpunct T der Himmelskugel.

Die 7. Erklärung.

17. Jede Ebene durch die Axe PQ der Himmelskugel gelegt, giebt einen gröſten Kreis, wie PSLQ, deſſen Ebene auf dem Aequator ſenkrecht iſt. Legt man eine ſolche Ebene zugleich durch einen Stern S, ſo iſt der Bogen SL zwiſchen dem Stern und dem Aequator des Sterns Abſtand vom Aequator, welcher hier des Sterns **Abweichung** heißt. Eben darum werden die gröſten Kreiſe, welche PSLQ durch die Weltpole laufen, **Abweichungs-** oder **Declinationskreiſe** genannt. Wegen einer andern weiter unten vorkommenden Urſache heiſſen ſie auch **Stundenkreiſe**.

Die

Die 8. Erklärung.

18. Eine Ebene, welche durch die Scheitellinie ZN, und die Weltaxe PQ gelegt wird, giebt einen gröſten Kreis AZPNQ, der beydes zugleich ein Scheitelkreis, und Abweichungskreis iſt. Man nennt ihn den Mittagskreis, oder Meridian, weil die Sonne zur Mittagszeit in dieſem Kreiſe erſcheint; die Ebene dieſes Kreiſes heißt die Mittagsfläche, ihre Durchſchnittslinie AC mit dem Horizont die Mittagslinie, und der Winkel ZPS unter welchem der Stundenkreis PSL eines Sterns den Meridian ſchneidet, wird der Stundenwinkel des Sterns genannt. Der Winkel CTP iſt nun die Neigung der Weltaxe gegen den Horizont, und der Bogen CP die Höhe des Pols über dem Horizont, welche ſchlechthin die Polhöhe heißt.

Die 9. Erklärung.

19. Die grade Linie TB, worin der Verticalkreis eines Sterns S die Ebene des Horizonts ſchneidet, kann die Azimuthallinie des Sterns heiſſen, ihr Winkel ATB mit der Mittagslinie heißt der Azimuthalwinkel, oder kurz das Azimuth des Sterns, und der Bogen AB des Horizonts iſt das Maaß deſſelben. Das Azimuth iſt weſtlich oder öſtlich, nachdem man die Grade deſſelben von Meridian gegen Weſten oder gegen Oſten zählt. 219 Fig.

Zuſatz.

20. Wenn das Azimuth und die Höhe eines Sterns bekannt iſt; ſo iſt ſeine Stelle gegen den Horizont bekannt.

Die 10. Erklärung.

21. Derjenige Weltpol P heißt der Nordpol, welcher in unſern Gegenden über dem Horizont erha- 220 Fig.

ben iſt, und der entgegengeſetzte Q der Südpol. An derjenigen Seite der Mittagslinie iſt bey uns Norden, woſelbſt die Weltaxe unter einem ſpitzen Winkel dagegen geneigt iſt: an der grade entgegengeſetzten Seite iſt Süden. Eine Azimutthallinie, welche die Mittagslinie ſenkrecht ſchneidet, zeiget den wahren Oſt und Weſt, und ſie kann kurz die erſte Azimutthallinie heiſſen.

Der 1. Zuſatz.

22. Weil die Mittagsfläche beydes auf dem Horizont und Aequator ſenkrecht iſt, (261. §. Geom.) ſo iſt die Durchſchnittslinie DF des Aequators, mit dem Horizont auf der Mittagsfläche ſenkrecht: (264. §. Geom.) alſo macht ſie mit der Mittagslinie rechte Winkel, (246. §. Geom.) und iſt mit der erſten Azimuthallinie einerley. Die Peripherien des Aequators und Horizonts ſchneiden einander alſo im wahren Oſt und Weſt.

Der 2. Zuſatz.

23. Der Horizont eines Beobachters mit ſeiner Scheitellinie und die Weltaxe behalten des täglichen Umlaufs der Himmelskugel ungeachtet einerley Lage: alſo auch der Meridian. Was in der Pheripherie des Aequators liegt, wird zwar mit herum geführt: allein dieſes Umlaufs ungeachtet bleiben doch die Puncte des Horizonts im Oſten und Weſten einerley, worin derſelbe vom Aequator geſchnitten wird.

Die 11. Erklärung.

24. Die beyden Halbkugeln, worin der Aequator die Himmelskugel vertheilt, heiſſen von dem dazu gehörigen Pol die nordliche und ſüdliche: auch heißt die Abweichung eines Sterns nordlich oder ſüdlich, nachdem ſich der Stern in der nordlichen oder ſüdlichen Halbkugel befindet.

Die

Die 12. Erklärung.

25. Die Höhe eines Sterns, wenn er im Mittagskreiſe ſteht, heißt ſeine Mittagshöhe, und der Bogen AB des Mittagskreiſes zwiſchen dem Horizont und Aequator nennt man die Aequatorshöhe. Er iſt das Maaß des Winkels, unter welchem die Ebenen des Aequators und Horizonts einander ſchneiden. (249. §. Geom.) Von dem Stern ſagt man, er culminire wenn er im Meridian ſteht, und die Redensart rührt daher, weil er im Meridian ſeine gröſte Höhe erreicht, wenn er anders nicht zu denen gehört, die gar nicht untergehen. In dieſem letztern Fall kommt er bey jedem Umlauf zweymahl im Meridian, und erreicht zugleich das einemahl ſeine gröſte, das andremahl ſeine kleinſte Höhe. Wenn von der Mittagshöhe ſchlechthin die Rede iſt, ſo verſteht man gewöhnlich die gröſte Mittagshöhe.

Der 1. Zuſatz.

26. Die Mittagshöhe eines Sterns iſt gröſſer oder kleiner als die Aequatorshöhe, nachdem ſeine Abweichung nordlich oder ſüdlich iſt.

Der 2. Zuſatz.

27. Die Aequatorshöhe ATB und Polhöhe CTP ergänzen einander zu 90°. Denn es iſt $ATB + BTP + CTP = 180°$, und $BTP = 90°$, alſo auch $ATB + CTP = 90°$.

Der 3. Zuſatz.

28. Die Aequatorshöhe AB iſt dem Abſtand ZP des Pols vom Zenith gleich.

Der 4. Zuſatz

29. Ein Stern der nordliche Declination hat, geht bey uns gar nicht unter, wenn ſein Abſtand vom Nordpol kleiner als die Polhöhe, oder ſeine

Declination gröſſer als die Aequatorshöhe iſt. Ein Stern, der ſüdliche Declination hat, geht gar nicht auf, wenn ſeine Declination gröſſer, als die Aequatorshöhe iſt.

Die 13. Erklärung.

30. Wenn man die allen Sternen gemeine tägliche Bewegung ausnimmt, ſo haben die meiſten Sterne, ſo lange wir davon Nachrichten haben, ihre Lage gegen einander nicht geändert; eben dieſe Sterne erſcheinen überall in einerley Lage gegen einander, der Beobachter mag ſeine Stelle auf der Erde haben, wo er wolle. Dieſe heiſſen Fixſterne, und es giebt vornemlich fünf andre mit bloſſen Augen ohne Fernrohr ſichtbare Sterne, die eben ſo wie der Mond nicht immer bey einerley Fixſternen ihre Stelle haben, ſondern unter denſelben fortzurücken ſcheinen. Man nennt die letztern Irrſterne oder Planeten. Ihr Licht iſt nicht ſo ſtark glänzend und blinkernd, als das Licht der Fixſterne, es iſt mehr dem Licht des Vollmonds ähnlich. Auſſer dieſen Planeten erſcheinen von Zeit zu Zeit Sterne, die ſich von andern durch einen hellen Schweif unterſcheiden, daher ſie den Nahmen Kometen erhalten haben.

Die 5. Erfahrung.

31. Die Sonne erſcheint wie eine hellglänzende Scheibe, und die Mittagshöhe ihres Mittelpuncts, welche man hier kurz die Mittagshöhe der Sonne nennt, iſt am 20ſten März und 22ſten September der Aequatorshöhe gleich, ſie wächſt vom 20 März bis zum 21 Junius, allemohl um 23° 28′, und nimmt vom 21 Junius bis zum 22ſten September um eben ſoviel wieder ab. Hierauf wird ihre Mittags-

tagshöhe kleiner als die Aequatorshöhe, und nimmt bis zum 21 December noch weiter um 23° 28′ ab, ſie wächſt aber bis zum 20 März wieder um ebenſoviel. Sterne, die am 20ſten März noch im ſüdlichen Meridian ſtehen, wenn die Sonne untergeht, ſind um den 20ſten April, wenn die Sonne alsdenn untergeht, ſchon ziemlich weit gegen Weſten gerückt, im May noch weiter, und ſie gehen im Junius gleich nach der Sonne unter. So geht es von Monath zu Monath bis nach Verlauf eines Jahres von zwölf Monathen die Sterne wieder die vorige Lage gegen die Sonne haben.

Zuſatz.

32. Das alles erfolgt vollkommen ſo, als wenn der Mittelpunct der Sonne binnen Jahresfriſt in einem gröſten Kreiſe von Weſten gegen Oſten um den Himmel liefe, der den Aequator unter einem Winkel von 23° 28′ ſchneidet. Uebrigens weiß man aus der Optik, daß eine Kugel in anſehnlich groſſer Entfernung platt erſcheint, alſo könnte die Sonne wohl eine Kugel, oder wenigſtens ein runder Kugelähnlicher Körper ſeyn. Aus andern Gründe wird es im folgenden erhellen, daß dies nicht bloſſe Vermuthung ſey.

Die 14. Erklärung.

33. Der gröſte Kreis am Himmel, den die Sonne jährlich zu durchlaufen ſcheint, heißt die Ecliptik, und der Nahme iſt daher entſtanden, weil die Sonnen- und Mondſinſterniſſe (ecclipſes) nur alsdenn eintreten, wenn der Mond ebenfalls in dieſer ſcheinbaren Sonnenbahn, oder nahe dabey ſtehet. Dieſe Sonnenbahn, welche der Kreis FSOX in der 222 Fig. vorſtellet, wird wie jeder Kreis in 360 Grade

222 getheilt, und auſſer dieſer Abtheilung in Grade iſt
Fig. hier noch eine andre Abtheilung der Ecliptic in 12 gleiche Bogen übrig, die man Zeichen der Ecliptic nennt. Ein jedes von dieſen Zeichen hat 30 Grade und man fängt die Abtheilung bey demjenigen Durchſchnittspunct des Aequators mit der Ecliptic an, durch welchen die Sonne am erſten Frühlingstage aus der ſüdlichen Halbkugel in die nordliche hinauf tritt. Die Zeichen und Grade werden in der Richtung, wie die Sonne läuft, von Weſten nach Oſten herum gezählt.

Zuſatz.

34. Die Ecliptic FSOX hat, wie jeder gröſte Kreis auf der Kugel, ihre Axe ΠK und Pole.

Die 15. Erklärung.

222 35. Eine Ebene durch die Axe ΠK der Ecliptik
Fig. gelegt giebt einen gröſten Kreis, der die Ecliptic ſenkrecht ſchneidet. Wenn derſelbe wie ΠLR durch den Stern L läuft: ſo iſt der Bogen RL des Sterns Abſtand von der Ecliptic: dieſer heißt die Breite des Sterns, und zwar nordliche oder ſüdliche Breite, nachdem der Stern auf der Nord- oder Südſeite der Eccleptic befindlich iſt. Eben darum nennt man auch die gröſten Kreiſe, welche durch die Pole der Ecliptik laufen, Breitenkreiſe.

Die 16. Erklärung.

36. Eine Ebene durch beyde Axen PQ des Aequators und ΠK der Ecliptik giebt einen gröſten Kreis, der beydes zugleich auf dem Aequator und der Ecliptik ſenkrecht iſt, und zugleich Breitenkreis und Abweichungskreis iſt. Er hat den Nahmen Colur der Sonnenſtände erhalten, weil ſich die Sonne am längſten und kürzeſten Tage in dieſem Abweichungs-

kreiſe

kreiſe befindet. Die Ebene dieſes Kreiſes iſt die Neigungsebene der Ecliptik gegen den Aequator, und der Bogen BF des Colurs zwiſchen dem Aequator und der Ecliptik iſt das Maaß ihres Neigungswinkels, welcher kurz die Schiefe der Ecliptik genannt wird.

Zuſatz.

37. Die 222 Figur ſtellet die Himmelskugel für den Fall vor, wenn die Axe der Ecliptik ΠK im Meridian liegt. Alsdenn fällt der Colur der Sonnenſtände mit dem Meridian zuſammen, und die Durchſchnittspuncte der Ecliptik mit dem Aequator liegen im Horizont.

Die 16. Erklärung.

38. Die Durchſchnittspuncte F und X der Ecliptik mit dem Colur der Sonnenſtände nennt man die **Sonnenſtandspuncte**, **Solſtitialpuncte**, ihre Durchſchnittspuncte mit dem Aequator aber **Nachtgleichspuncte, Aequinoctialpuncte**. Von dieſen iſt derjenige der **Frühlingspunct**, durch den die Sonne aus der ſüdlichen Halbkugel in die nordliche hinauf ſteiget: der andre aber der **Herbſtpunct**. Dieſe beyden Puncte liegen in der Durchſchnittslinie des Aequators und der Ecliptik, und eine Ebene durch die Weltaxe, und die erwehnte Durchſchnittslinie gelegt giebt einen Abweichungskreis P*p*O, welcher den Nahmen **Colur der Nachtgleichen** führt. Beym Umlauf der Himmelskugel beſchreiben die Pole Π, K, der Ecliptik ein Paar Kreiſe ΠM, KD, um die Weltpole, die man **Polarkreiſe** nennt. Ferner beſchreiben auch die Sonnenſtandspuncte ein Paar Parallelkreiſe FGH, 222 Fig.

IgX

IgX, die man Wendekreiſe nennt. Es ſind die Tagekreiſe der Sonne am längſten und kürzeſten Tage.

Zuſatz.

39. Beym Umlauf der Himmelskugel ändert ſich beſtändig die Stelle des Puncts im Horizont, worin derſelbe von der Ecclipti geſchnitten wird. Hatte die Kugel anfangs die Lage, welche die 222 Figur vorſtellt; ſo liegt der eine Aequinoctialpunct bey O im wahren Oſt, und die Solſtitialpuncte F, X, im Meridian. Beym Umlauf der Kugel von Oſten nach Weſten durchläuſt der Pol Π der Ecclip-tik den Halbkreis Π*p*M, der Punct, worin Hori-zont und Ecclipti einander ſchneiden rükt von O nach *g* zu, und fällt in *g*, wenn der Sonnen-ſtandspunct X im Horizont kommt. Hiernächſt rükt dieſer Durchſchnittspunct mit dem Horizont wieder gegen O, und fällt mit O zuſammen; wenn ein halber Umlauf zu Ende iſt. Darauf rükt der Durchſchnittspunct der Ecclipti mit dem Horizont gegen G, er fällt in G, wenn der Sonnenſtands-punct F hieſelbſt anlangt, und rükt hiernächſt aufs neue gegen O zurück.

Die 17. Erklärung.

40. Die Ringkugel oder Armillarſphäre iſt ein Modell, welches die bisher beſchriebenen Kreiſe, die man ſich am geſtirnten Himmel vorſtellen muß, in gehöriger Lage zuſammengefüget im Kleinen dar-ſtellet. Ein feſtes Geſtelle trägt den Horizont, mit dem darauf ſenkrechten Meridian. In dem letztern iſt eine hohle Kugel ſo aufgehangen, daß ſie um eine Axe, welche die Weltaxe vorſtellet, um-laufen kann, und dieſe ſo bewegliche Kugel iſt aus

Rin-

Ringen zuſammen geſetzt, welche den Aequator, die Wendekreiſe, die Polarkreiſe, die Eccliptik, und beyde Coluren vorſtellen.

Die 17. Erklärung.

41. Der Bogen der Ecliptik vom Frühlings- 222
punct bis an den jedesmahligen Ort S der Sonne in 223
Graden gemeſſen, heißt die Länge der Sonne. Fig.
Weil die Sonne allemahl in der Ecliptik bleibt, ſo hat ſie nie eine Breite. (35. §.) Die Stelle eines Sterns L aber wird in Anſehung der Ecliptik durch ſeine Länge und Breite beſtimmt. Wenn ΠLR der Breitenkreis des Sterns, alſo RL ſeine Breite iſt; ſo verſteht man durch die Länge des Sterns den Bogen der Ecliptik vom Frühlingspunct bis an die Stelle R, woſelbſt der Breitenkreis die Ecliptik ſchneidet.

Die 18. Erklärung.

42. Durch die Sonne in S laufe der Abweichungskreis PSV, und ſchneide den Aequator in V; ſo iſt VS die Abweichung der Sonne, und den Bogen des Aequators vom Frühlingspunct bis an den Abweichungskreis der Sonne in Graden gemeſſen nennt man die Rectaſcenſion oder grade Aufſteigung der Sonne. Wenn ferner PLY der Abweichungskreis des Sterns L, alſo YL ſeine Abweichung vom Aequator iſt; ſo heißt der Bogen des Aequators ſeine Rectaſcenſion, welcher vom Frühlingspunct von Weſten gegen Oſten in Graden gemeſſen ſich bis an den Abweichungskreis erſtrekt.

Der 1. Zuſatz.

43. Die 223. Figur ſtellet die Weſtſeite der Himmelskugel vor, wovon die 222. Figur die Oſtſeite abbildet. Der Frühlingspunct liegt bey W

im

im Horizont im wahren Weſten, S iſt die Sonne noch im erſten Quadranten der Ecliptik, WS ihre Länge, WV ihre Rectaſcenſion, VS ihre Declination. Ferner iſt L ein Stern, ΠLR ſein Breitenkreis, PLY ſein Abweichungskreis; alſo WR ſeine Länge, RL ſeine Breite, WY ſeine Rectaſcenſion, YL ſeine Declination.

Der 2. Zuſatz.

44. Sterne deren Rectaſcenſion gleich iſt, ſtehen in einerley Abweichungskreiſe, und kommen zugleich im Meridian. Wenn aber ihre Rectaſcenſion ungleich iſt, ſo folgen ſie einander beym Durchgange durch den Meridian in der Ordnung, wie die Grade der Rectaſcenſion gezählt werden.

Die 6 Erfahrung.

45. Die tägliche Bewegung der Sterne iſt in dem Sinne gleichförmig, daß in gleichen Zeittheilen gleiche Bogen des Aequators, und eben ſo auch gleiche Bogen eines jeden Parallelkreiſes durch den Meridian gehen. Wenigſtens ſtimmt alles, was aus dieſer Vorausſetzung folgt, mit dem, was die Beobachtungen lehren überein.

Die 19. Erklärung.

46. Ein Sterntag iſt die Zeit, worin ein Fixſtern ſeinen Tagekreis durchläuft. Man theilt ihn in 24 gleiche Stunden, die Stunde in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden, eine Secunde in 60 Tertien, u. ſ. w. Dieſe Sternzeit nennt man auch Zeit der erſten Bewegung.

Der

Der 1. Zuſatz.

47. Demnach gehen durch den Meridian

ein Bogen			Sternzeit	
von	15°	in	1	Stunde
	15′	in	1	Minute
	15″	in	1	Secunde
	1°	in	4	Minuten
	1′	in	4	Secunden
	1″	in	4	Tertien

Die Meinung iſt, wenn zwey Fixſterne in Anſehung der Rectaſcenſion um ſo viele Grade, Minuten oder Secunden von einander entfernt ſind; ſo verfließt ſoviele Zeit zwiſchen beyder Durchgängen durch den Mittagskreis. Zugleich ergiebt ſich auch hieraus der Grund von der Benennung der Stundenkreiſe und Stundenwinkel. (17. 18. §.)

Der 2. Zuſatz.

48. Wenn die Rectaſcenſion eines Sterns bekannt iſt, ſo kann die Rectaſcenſion eines jeden andern Sterns gefunden werden, wenn man eine Uhr zur Hand hat, die nach der Sternzeit geſtellet iſt. Man beobachte nur die Zeit, welche zwiſchen den Augenblicken verfließt, worin beyde Sterne nach einander culminiren, und verwandle ſie in Bogen des Aequators; (47. §.) ſo hat man die Differenz ihrer Rectaſcenſionen. Daraus findet man leicht die geſuchte Rectaſcenſion dem 44. §. gemäß.

Der 1. Foderungsſatz.

49. Die Höhe eines Sterns, alſo auch ſeine Mittagshöhe, kann vermittelſt eines dazu dienlichen Winkelinſtruments gemeſſen werden.

Anmer-

Anmerkung.

50. Eine nähere Beſchreibung der Einrichtung und des Gebrauchs der Werkzeuge, womit die Höhen gemeſſen werden können, wäre für dies kurze Handbuch viel zu weitläuftig. Dem angehenden Aſtronomen wird überdem die Wiſſenſchaft leichter faßlich, und eben darum auch angenehmer, wenn ihm anfangs nur kurz gezeigt wird, was die Theorie fodert, wenn gleich die Ausübung in manchen Fällen ſchwer und weitläuftig iſt. Wenn von der Höhe der Sonne oder des Monds die Rede iſt, ſo wird gewöhnlich die Höhe des Mittelpuncts verſtanden.

Der 1. Lehrſatz.

221 Fig. 51. **Wegen der Brechung, die das von einem Stern auf die Erde fallende Licht in der Atmoſphäre leidet; ſcheint der Abſtand des Sterns vom Scheitelpunct kleiner zu ſeyn, als man ihn finden würde, wenn das Licht keine Brechung litte.**

Beweis. Es ſey VRST die Erdfläche, ABDE die äuſſerſte Gränze der Atmoſphäre, T die Stelle des Beobachters auf der Erdfläche. Auf die Atmoſphäre falle aus M ein Strahl M*m* der in grader Linie verlängert die Erde in T treffen würde: ſo erhellet, daß derſelbe ſchon in *m* aus der Lage *m*T gegen *m*C zu gebrochen werde. Weil überdem die Dichtigkeit der Atmoſphäre von der höchſten Gränze gegen die Erdfläche zu immer gröſſer wird; (22. §. Geom.) ſo wird der Strahl gegen die Erde zu allmählig immer mehr in eine krumme Linie *mt* gebogen, und dieſer Strahl kann die Stelle T nicht treffen. Ein andrer Strahl M*n* aber, der in grader Linie verlängert über T wegfahren würde, wird eben ſo in die krumme Linie *n*T gebogen, und kann in T auffallen. Alsdenn iſt ſeine letzte Richtung,

indem

indem er das Auge des Beobachters trift, einerley mit der Richtung der Tangente TN: er wird alſo in dieſer Richtung geſehen, und ſein ſcheinbarer Abſtand vom Scheitel iſt ZTN, welchen man ohne Brechung = ZTM finden würde.

Die 20. Erklärung.

52. Der Winkel MTN um welchen der ſcheinbare Abſtand ZTN eines Sterns vom Zenith wegen der Strahlenbrechung in der Atmoſphäre von ſeinem wirklichen Abſtande ZTM verſchieden iſt, heißt hier kurz die aſtronomiſche Refraction. Aus den Geſetzen der Strahlenbrechung folgt, daß der Winkel MTN am gröſten ſey, wenn der Stern im Horizont 90° vom Zenith entfernt iſt, und man nennt ihn alsdenn kurz die Horizontalrefraction.

Zuſatz.

53. Je näher der Stern dem Zenith iſt, deſto kleiner iſt die Refraction, und im Zenith ſelbſt fällt ſie völlig weg.

Die 21. Erklärung.

54. Der Abſtand ZTM eines Sterns vom Zenith aus dem Punct T auf der Oberfläche der Erde geſehen iſt gröſſer, als man den Abſtand ZCM vom Zenith finden würde, wenn man ihn aus dem Mittelpunct der Erde meſſen könnte, (§. Opt.) und der Winkel CMT, um welchen beyde unterſchieden ſind, heißt hier die Höhenparallaxe, des Sterns. In dem beſondern Fall, wenn der Stern aus der Oberfläche der Erde geſehen in H um 90° vom Zenith entfernt ſcheint; nennt man CHT die Horizontalparallaxe des Sterns.

Zuſatz.

55. Es iſt $\frac{CM}{CT} = \frac{\text{ſin } ZTM}{\text{ſin } CMT}$ und $\frac{CH}{CT} =$

$\frac{\sin tot.}{\sin CHT}$. (28. 29. §. Trigon.) Wenn demnach für einerley Stern CH = CM iſt, ſo hat man $\frac{\sin ZTM}{\sin CMT}$ $= \frac{\sin tot}{\sin CHT}$, alſo auch $\sin tot : \sin ZTM =$ $\sin CHT : \sin CMT$. Aus der Horizontalparal-laxe eines Sterns kann demnach ſeine Höhenparal-laxe für jeden andern Abſtand vom Scheitel, und umgekehrt, wenn dieſe gegeben iſt, jene gefunden werden. Im Horizont iſt übrigens die Parallaxe am gröſten, und im Scheitel verſchwindet ſie ganz.

Der 2. Lehrſatz.

56. **Wofern vielleicht die Erde alle 24 Stunden mit gleichförmiger Bewegung ein-mahl um eine Axe läuft, die durch ihren Mittelpunct geht; ſo müſſen alle Erſcheinun-gen der täglichen allen Sternen gemeinen Be-wegung eben ſo erfolgen, wie ſie bisher den Beobachtungen gemäß ſind beſchrieben wor-den.**

225 Fig. Beweis. Es ſtelle *dpeq* die Erde vor, und *pq* ihre Umlaufsaxe, welche die ſcheinbare Himmels-kugel in P und Q trift: z aber ſey ein Ort auf der Erdfläche, und deſſen Scheitellinie Cz bis an die ſcheinbare Himmelskugel in Z verlängert. Ferner ſey S ein Stern, der ſelbſt nicht in Bewegung iſt, ſo wird eine Ebene durch den Stern und die Erd-axe *pq* gelegt, an der ſcheinbaren Himmelskugel den gröſten Kreis PEQD geben, der den Abweichungs-kreis des Sterns vorſtellt. Wofern nun der Mit-telpunct C der Erde mit der Erdaxe *pq* ruhet oder

we-

wenigſtens für jetzt die etwanige Bewegung deſſelben noch nicht mit in Betrachtung gezogen wird; ſo bleibt auch die Ebene des Abweichungskreiſes PSEQD in Ruhe. Beym Umlauf der Erde aber beſchreibt jeder Punct der Erdfläche, alſo auch z einen zur Axe *pq* gehörigen Parallelkreis. Eine Ebene durch die Erdaxe *pq* und die Scheitellinie Cz, die dem 18. §. gemäß der Meridian des Ort z iſt, und die Erde in einem gröſten Kreiſe ſchneidet, wovon *pze* einen Quadranten vorſtellet, wird beym Umlauf der Erde mit herum geführt; ſie kommt nach und nach in die Lagen *pwd*, *pvm*, *pze*, indem die Stelle z den halben Parallelkreis *wvz* durchläuft. Zugleich kommt die Scheitellinie Cz nach und nach in die Lagen C*w*, C*v*, Cz, und wird mit einer coniſchen Bewegung herumgeführt. Stellt man ſich die Scheitellinie in jeder Lage auch bis an die Himmelskugel in W, V, Z, erweitert vor; ſo liegen dieſe Puncte in einem zur Axe PQ gehörigen Parallelkreiſe, der mit dem Parallelkreiſe *wvz* auf der Erde zuſammengehört.

In dem jetzigen Augenblick ſey die Stelle des Beobachters in *v*, unter dem Scheitelpunct V am Himmel; ſo iſt der gröſte Kreisbogen SV der Abſtand des Sterns S vom Zenith. Beym Umlauf der Erde indem der Beobachter von *w* durch *v* nach z herumgeführt wird, bleiben im Dreyeck VPS die Seiten PV und PS ungeändert: aber der Winkel VPS wird kleiner mit der gegenüberſtehenden Seite VS. Weil nun der Beobachter in *v* ſeine Bewegung nicht merkt; ſo iſt die geſammte Erſcheinung für ihn eben ſo, als wenn die Ebene des Meridians *pvm* mit der Erde in Ruhe wäre, der Abwei-

chungskreis PSEQ aber ſich auf entgegengeſetzte Art in der Richtung *zvw* drehete. Denn der Stern S ſcheint dem Meridian PVM immer näher zu kommen, ohne das ſeine Entfernung von P ſich ändert: alſo ſcheint er um P einen Kreis zu beſchreiben. Zugleich nimmt ſeine Entfernung vom Scheitel ſo lange ab, bis PVM mit PZE zuſammen fällt, da dann der Stern im Meridian erſcheint, und dem Scheitelpunct, der nun in Z fällt, am nächſten iſt. Beym andern halben Umlauf erfolgt alles in umgekehrter Ordnung eben ſo.

Der 1. Zuſatz.

57. Weil die Erſcheinung der täglichen Bewegung aller Sterne einerley iſt, die Erde mag umlaufen, und die Himmelskugel ruhen, oder, es mag die Himmelskugel umlaufen und die Erde ruhen; ſo iſt es hier noch ganz gleichgültig, wie man ſich die Sache vorſtellen will. Wenn alſo im folgenden bald ſo geredet wird, als wenn die Erde umlieſe, bald aber der Ausdruck, nachdem es auf die eine oder die andre Art kürzer ſeyn wird, dem Umlauf der Himmelskugel vorauszuſetzen ſcheint; ſo muß man ſich daran, als an gleichgültige Redensarten gewöhnen, ohne daß damit eben das eine oder das andre ſchon mit entſcheidender Gewißheit angenommen wird.

Der 2. Zuſatz.

223 Fig. 58. Die Erdaxe *pq* iſt mit der Weltaxe 16. §. einerley, ihre Endpuncte *p*, *q*, auf der Erdoberfläche ſind die Erdpole, und in dieſer verlängerten Axe liegen zugleich die Pole P, Q, am Himmel.

Der 3. Zuſatz.

59. Der Abſtand PS des Parallelkreiſes SX vom Pol, worin ein Stern S ſeinen täglichen Umlauf macht,

macht, in Graden gemeſſen, iſt eben ſo groß, als der Abſtand *ps* des damit zuſammengehörigen Parallelkreiſes *sx* auf der Erde von den Erdpolen, ebenfalls in Graden gemeſſen: alſo geht die Ebene des Aequators DMF (16. §.) durch den Mittelpunct der Erde, der mit dem Aequator am Himmel zuſammengehörige Parallelkreis auf der Erde, iſt auch unter den Parallelkreiſen auf der Erdfläche der gröſte, und kann um deßwillen in einem ähnlichen Sinn der **Erdäquator** heiſſen.

Die 21. Erklärung.

60. Den Aequator nennen die Schiffer ſchlechthin die **Linie**, und man verſteht aus dem bisherigen leicht den Sinn der Redensart: ein Ort liege **unter der Linie, oder unter einem Parallelkreiſe um ſo und ſo viele Grade von der Linie entfernt.** Jede Ebene durch die Weltaxe, die am Himmel einen Abweichungskreis PVM giebt, ſchneidet auch die Erde in einem gröſten Kreiſe *pvm*, der durch die Erdpole geht, und auf dem Aequator ſenkrecht iſt: auf der Erde nennt man dieſe Kreiſe **Meridiane**, und ſagt von mehrern Oertern auf der Erde, daß ſie unter einerley Meridian liegen, wenn ſie in der Peripherie eines ſolchen Kreiſes ihre Stelle haben. Die Winkel am Pol, wie *apm*, unter welchen die Meridiane einander ſchneiden, nennt man **Stundenwinkel**, wie an der Himmelskugel.

Zuſatz.

61. Wenn man auf der Erdfläche die Stelle eines Orts als bekannt annimmt, ſo kann der Meridian dieſes Orts als der erſte angenommen werden. Es ſey *padq* dieſer erſte Meridian: ſo wird derſelbe von jedem andern Meridian *pvm* unter ei-

nem Winkel *apm* geſchnitten werden, deſſen Maaß der Bogen *dm* des Aequators zwiſchen beyden Meridianen iſt. Wenn ferner *v* ein Ort auf der Erde und *pvm* der Meridian, *wvz* der Parallelkreis dieſes Orts iſt; ſo faſſen die Bogen *wv* und *dm* gleichviele Grade; der Bogen *mv* iſt die Entfernung des Orts vom Aequator, und *dm* oder *wv* in Graden gemeſſen iſt das Maaß des Winkels zwiſchen dem Meridian des Orts und dem erſten Meridian.

Die 22. Erklärung.

62. Die geographiſche Breite eines Orts *v* auf der Erde iſt ſeine Entfernung *vm* vom Aequator, und die geographiſche Länge deſſelben iſt der Bogen *dm* des Aequators zwiſchen dem Meridian dieſes Ortes und dem erſten Meridian, der zugleich das Maaß des Stundenwinkels zwiſchen beyden Meridianen abgiebt. Beydes, Länge und Breite werden in Graden gemeſſen. Die Grade der Länge zählt man gewöhnlich von Weſten gegen Oſten herum, oder es muß beſtimmt angezeigt werden, wenn man ſie etwa weſtwärts gezählt hätte. Die Breite des Orts nennt man nördlich oder ſüdlich; nachdem derſelbe nordwärts oder ſüdwärts des Aequators liegt.

Die 23. Erklärung.

224 Fig. 63. Eine Ebene, welche die Scheitellinie Cz des Orts z im Mittelpunct C der Erde ſenkrecht ſchneidet, nennt man am beſten den Haupthorizont des Orts, z, weil eigentlich jede auf der Scheitellinie ſenkrechte Ebene für den Ort horizontal liegt. Das giebt alſo nicht allein auf der Erde den gröſten Kreis *afb*, ſondern auch am Himmel den gröſten Kreis AFB beyde mit der Erde concentriſch.

Der

Der 1. Zuſatz.

64. Ein Stern, der in der Ebene des mit dem Ort z zuſammengehörigen Haupthorizonts befindlich iſt, wird auch aus z geſehen 90° vom Scheitel entfernt erſcheinen, wenn ſeine Entfernung vom Mittelpunct der Erde ſo groß iſt, daß er keine merkliche Horizontalparallaxe, mithin überhaupt keine merkliche Höhenparallaxe hat. (54. 55. §.) In Anſehung dieſer Sterne iſt es alſo einerley, ob man ſich die Ebene des Horizonts durch den Mittelpunct oder durch einen Punct auf der Oberfläche der Erde vorſtellet. Die ſcheinbare Lage ſolcher Sterne gegen einander ſelbſt bleibt alſo auch einerley, der Beobachter mag ſeinen Ort auf der Oberfläche der Erde wo er wolle haben. Weil man nun dergleichen bey den Fixſterhen wahrnimmt, (30. §.) ſo folgt daraus, daß die Fixſternen keine merkliche Höhenparallaxe haben. 224 Fig.

Der 2. Zuſatz.

65. Solche Sterne, die ungleichweit von der Erde entfernt ſind, erſcheinen nicht aus jeder Stelle der Oberfläche der Erde in einerley Lage gegen einander, und gegen die Fixſterne, wenn jeder für ſich eine nicht ganz unmerkliche Höhenparallaxe hat, daß dies der Fall bey den Planeten ſey, auch einigermaſſen bey der Sonne, und am allermeiſten bey dem Monde, wird ſich im folgenden zeigen. Viele Erſcheinungen, die von den Bewegungen des Mondes und der Planeten theils gegen einander ſelbſt, theils gegen die Sonne und die Fixſterne abhängen, müſſen ſich dem einen Beobachter ſo, einem andern entfernten anders darſtellen. Dieſerwegen muß man allemahl, wenn die Höhe der Sonne,

des Mondes, oder eines Planeten iſt beobachtet worden, auf die Höhenparallaxe dabey Rückſicht nehmen, und die beobachtete Höhe auf diejenige zu bringen ſuchen, die aus dem Mittelpunct der Erde wäre beobachtet worden. Das iſt alsdenn die Höhe über dem mit der Erde concentriſchen Haupthorizont, und dieſer Haupthorizont wird im folgenden allemahl verſtanden werden, wenn nicht ausdrüklich das Gegentheil angezeigt wird.

Der 3. Zuſatz.

225 Fig. 66. Die Polhöhe *ap* eines Orts *z* auf der Erde iſt alſo einerley mit dem Bogen *ap* zwiſchen dem Erdpol *p* und dem Haupthorizont des Orts *z*; er iſt das Maaß des Winkels unter welchem die Erdaxe *pq* gegen den Haupthorizont geneigt iſt. Eben dieſe Polhöhe *ap* iſt ſo groß, als die geographiſche Breite *ze* deſſelben Orts. Denn es iſt $ap + pz = 90° = ez + pz$, alſo auch $ap = ez$. Demnach wird mit der Polhöhe eines Orts zugleich ſeine geographiſche Breite gefunden.

Der 3. Lehrſatz.

67. **Die Erſcheinungen der jährlichen Bewegung der Sonne um die Erde erfolgen auf einerley Art, die Erde mag in Ruhe ſeyn, und die Sonne im Kreiſe oder einer kreisähnlichen Bahn ſich um die Erde bewegen: oder es mag im Gegentheil vielleicht die Sonne in Ruhe ſeyn, und die Erde binnen Jahresfriſt einen Umlauf um die Sonne vollenden.**

226 Fig. Beweis. Es ſey S der Sonne, und T der Erde Mittelpunct, der leztere aber bewege ſich im Kreiſe, oder einer kreisähnlichen Bahn, die ganz in einerley Ebene liegt, um den Mittelpunct S der Sonne.

Sonne. In dieſer Bahn nehme man die Puncte V, X, S, nach Gefallen an, ziehe SV, SX, SZ, und T*v*, T*x*, T*z*, mit dieſen Linien nach der Ordnung parallel und von einerley Gröſſe: ſo läuft dem §. Opt. gemäß die ſcheinbare Bahn der Sonne durch *v*, *x*, *z*, und ſie wird der Bahn der Erde um die Sonne gleich und ähnlich. Dem Beobachter auf der Erde, welcher die Bewegung der Erde nicht empfindet, muß demnach alles ſo erſcheinen, als wenn die Sonne wirklich in der Bahn S*vxz* ſich um die Erde bewegte.

Der 1. Zuſatz.

68. Weil die relative Bewegung der Sonne gegen die Erde, wenn dieſe vielleicht und nicht die Sonne in Bewegung wäre, dem Bewohner der Erde eben die Erſcheinungen darſtellet, die er beobachten würde, wenn die Erde ruhete, und die Sonne jährlich einen Umlauf um die Erde machte; ſo iſt es wiederum gleichgültig, ob man ſich der einen oder der andern Vorausſetzung gemäß ausdrückt. Hat man aus Beobachtungen, die eigentlichen Abmeſſungen der relativen Bahn der Sonne um die Erde gefunden; ſo ſind das die Abmeſſungen der wirklichen Bahn der Erde um die Sonne, wofern vielleicht die Sonne in Ruhe iſt.

Der 2. Zuſatz.

69. In allen Fällen bleibt die Ebene der Eccliptik, wodurch man hinführo, wie man will, die wirkliche oder relative Bahn der Sonne um die Erde verſtehen kann, eine Ebene, deren Lage in dem nach allen Seiten ausgebreiteten Weltraum als bekannt angenommen werden kann. Hier iſt nur noch zu bemerken, daß dieſe Ebene, weil ſie eigent-

lich die Erde durch ihren Mittelpunct ſchneidet, auch auf der Erdoberfläche einen gröſten Kreis giebt, der füglich die auf die **Erdfläche reducirte Ecliptik** heiſſen könnte. Im Umfange dieſes Kreiſes liegen nur ſolche Oerter, in deren Scheitelpunct die Sonne beym täglichen Umlauf der Erde kommen kann.

Der 3. Zuſatz.

70. Wofern es ſich finden ſollte, daß auch die Sonne von der Höhenparallaxe nicht gänzlich frey iſt, ſo ſiehet man nun um ſo mehr die Nothwendigkeit ein, weßwegen bey beobachteten Sonnenhöhen darauf Rükſicht genommen, und die Höhe der Sonne ſo geſucht werden muß, wie ſie aus dem Mittelpunct der Erde als Höhe über dem Haupthorizont würde beobachtet werden.

Die 22. Erklärung.

71. Die mit den Wendekreiſen am Himmel zuſammengehörigen Parallelkreiſe auf der Erde heiſſen auch hier **Wendekreiſe**, der nördliche in der Halbkugel worin Europa liegt, der ſüdliche in der andern Halbkugel. Es ſind die Parallelkreiſe der Oerter, welche in der auf die Erdfläche reducirten Ecliptik am weiteſten vom Aequator entfernt ſind. Eben ſo nennt man **Polarkreiſe** auf der Erde diejenigen, welche die Pole der auf die Erdfläche reducirten Ecliptik beym täglichen Umlauf der Erde beſchreiben. Die Erdzone zwiſchen den Wendekreiſen heißt die **heiſſe Erdzone**; **gemäßigte Zonen** nennt man in jeder Halbkugel diejenige, welche zwiſchen dem Wendekreiſe und Polarkreiſe liegt. Die beyden Segmente, welche die Polarkreiſe umſchlieſſen, heiſſen **kalte Zonen**, weil man ſie auch

als

als Zonen anſehen kann, wovon der innere kleinere Kreis in einem Punct, nemlich in den Polen ſelbſt, zuſammen geht. Heiß, gemäßigt, und kalt heiſſen ſie von der ſtärkern oder ſchwächern Erwärmung der Sonne, ſo weit ſie theils von der Neigung der Strahlen gegen die Fläche abhägt, welche die Strahlen auffängt, theils auch von der längern oder kürzern Dauer der Wirckung der Sonne.

Die 1. Aufgabe.

72. **Die Polhöhe und Aequatorshöhe, mithin auch die geographiſche Breite. (66. §.) für den Ort der Beobachtung zu finden.**

Aufl. Man beobachte die gröſte und kleinſte Mittagshöhe eines Fixſterns, der nicht untergeht, ſo iſt die halbe Summe der gefundenen Höhen die geſuchte Polhöhe.

Daß der Fixſtern keine merkliche Parallaxe habe, davon kann man zwar wegen der im 64. §. angeführten Gründe ſchon ziemlich verſichert ſeyn: obgleich die erſten Beobachter es nicht ſo ganz ſicher ohne weitere Prüfung vorausſetzen konnten. Die Strahlenbrechung wird aber allemahl auch beym Fixſtern ihre Wirkung haben, und man findet nicht ganz genau die Polhöhe, bevor man von den beobachteten Höhen die von der Strahlenbrechung verurſachte Erhöhung abziehen kann. Wenn man den Polarſtern wählt, ſo iſt ſeine gröſte Höhe wenig von der kleinſten Höhe verſchieden, alſo die Strahlenbrechung für beyde Höhen beynahe gleich: alſo kann man verſichert ſeyn, daß der Fehler bey der aus den noch unverbeſſerten Höhen gefundenen Polhöhe nicht ſehr erheblich ſey.

Wenn

Wenn die Polhöhe gefunden iſt, ſo wird ſelbige von 90° abgezogen, um die Aequatorshöhe zu erhalten. (27. §.)

Zuſatz

220 Fig. 73. Es ſey S ein Firſtern und PSL ſein Stundenkreis: ſo erhellet, daß ſeine Abweichung LS gefunden werde, wenn man ſeine Mittagshöhe beobachtet, und die Aequatorshöhe von der Mittagshöhe des Sterns, oder umgekehrt dieſe von jener abzieht, nachdem der Stern nördliche oder ſüdliche Abweichung hat. (26. §.)

Der 2. Foderungsſatz.

74. **Wenn im ſphäriſchen Dreyeck (329. §. Geom.) von den dreyen Winkeln, und den dreyen Kreisbogen, welche die Seiten des Dreyecks ausmachen, drey Stücke in Graden gegeben ſind, ſo kann man die übrigen drey durch trigonometriſche Rechnung finden.**

Anmerkung.

Die Kürze, worin ich mich unumgänglich nothwendig hier einſchräncken muß, zwinget mich nur kurz zu bemerken, daß im zweyten Theil meines Lehrbegriffes die ſphäriſche Trigonometri vollſtändig vorgetragen ſey, die es eigentlich lehren muß, wie man jener Foderung ein Genüge leiſte. Dem angehenden Aſtronomen iſt es zum erſten Unterricht hinlänglich, wenn er einſehen lernt, wie die Auflöſung der aſtronomiſchen Aufgaben von den ſphäriſch-trigonometriſchen abhängen.

Die 2. Aufgabe.

220 Fig. 75. **Die Abweichung *SL* eines Sterns *S* iſt gegeben, und ſein Stundenwinkel *ZPS*: man ſoll ſeine Höhe *MS* über dem Horizont, und den Azimuthalwinkel *ATM* finden.**

Aufl. Aus der bekannten Polhöhe hat man den Abſtand ZP des Pols vom Zenith, und überdem

im

im ſphäriſchen Dreyeck ZPS den Winkel an P, und PS, als die Ergänzung der Abweichung zu 90°. Aus dieſen dreyen Stücken kann nicht allein ZS, als die Ergänzung der Höhe MS zu 90°, ſondern auch PZS = CTM, als die Ergänzung des Azimuthalwinkels ATM zu 180° gefunden werden. Aus beyden findet man hiernächſt die Höhe und den Azimuthalwinkel ſelbſt.

Zuſatz.

76. Wenn ſtatt des Stundenwinkels die Höhe MS gegeben iſt, ſo hat man im Dreyeck ZPS auſſer den beyden Seiten PZ, PS, auch die dritte Seite ZS, als die Ergänzung der Höhe zu 90°, und kann den Azimuthalwinkel und Stundenwinkel ZPS finden.

Die 3. Aufgabe.

77. Die Strahlenbrechung für jede gegebene Höhe über dem Horizont zu finden.

Aufl. Man beobachte die Mittagshöhe eines Fixſterns, der dem Zenith ſehr nahe kommt, und ſuche daraus dem 73. §. gemäß ſeine Abweichung. Dieſe wird man ohne erheblichen Fehler richtig finden, weil die Refraction ſehr nahe beym Zenith unmerklich iſt. Ferner ſuche man für die gegebene Höhe den Stundenwinkel ZPS (76. §.) und verwandle denſelben, oder welches einerley iſt, den Zeitbogen BL in Sternzeit. (47. §.) Nach einer guten Uhr, die nach der Sternzeit geſtellet ſeyn muß, bemercke man, wenn ſeit dem Augenblick, da der Stern culminirte, ſo viele Zeit, als die Rechnung anzeigt, verfloſſen iſt, und beobachte in dem Augenblik, da dieſe Zeit verſtrichen iſt, die Höhe des Sterns. Dieſe wird man wegen der Strahlenbre-

chung

chung gröſſer finden, als ſie bey der Rechnung angenommen war, und der Ueberſchuß iſt die geſuchte Refraction für dieſe Höhe.

Der 1. Zuſatz.

78. Man kann auf dieſe Art eine Tafel für mehrere Grade der Höhe verfertigen, die man hiernächſt allemahl zur Hand haben muß, um beobachtete Höhen dem 51. §. gemäß zu berichtigen.

Der 2. Zuſatz.

79. Man hat gefunden, daß die Horizontalrefraction zwiſchen 32′ bis 36′ falle, und nicht immer einerley ſey. Wegen der veränderlichen Dichtigkeit und Wärme der Luft iſt auch in andern Höhen die Strahlenbrechung nicht immer einerley. Dieſerwegen hat man geſucht, theoretiſche Unterſuchungen mit den Beobachtungen zu verbinden, und daraus ſind dergleichen Refractionstafeln entſtanden, wie ſie unter andern in der Sammlung aſtronomiſcher Tafeln, unter Aufſicht der Königl. Preuſſ. Acad. der Wiſſenſchaften. Berlin 1776, im 3. Band, 228 u. f. S. mitgetheilt werden. Wer ſich auch nur einigermaſſen in aſtronomiſchen Rechnungen üben will, der muß eine ſolche Sammlung von Tafeln zur Hand haben, und unter mehrern andern iſt dieſe eben angeführte Berlinſche Sammlung beſonders zu empfehlen.

Die 4. Aufgabe.

80. Die Schiefe der Ecliptik zu finden.

Aufl. Wenn die Sonne grade zu Mittage am längſten oder kürzeſten Tage die Solſtitialpuncte erreichte; ſo würde man am längſten Tage die gröſte, am kürzeſten Tage die kleinſte Mittagshöhe der Sonne finden, zu der ſie an dem Orte der Beob-

achtung jemahls gelangen kann. Die halbe Differenz zwiſchen beyden Mittagshöhen des Mittelpuncts der Sonne würde alsdenn die Schiefe der Ecliptik geben. Hat man die Aequatorshöhe ſchon gefunden, ſo kann auch dieſe von der gröſten Mittagshöhe der Sonne, oder die kleinſte Mittagshöhe der Sonne von der Aequatorshöhe abgezogen werden, um die Schiefe der Ecliptik zu finden. Ob nun gleich die hiebey angenommene Vorausſetzung gewöhnlich nicht völlig zutrift, weil die Sonne nicht eben grade zu Mittage die Sonnenſtandspuncte erreicht; ſo haben doch die erſten Beobachter dies Verfahren brauchen, und man hat etwanige kleine Fehler nach und nach verbeſſern müſſen.

Auf die Parallaxe der Sonne, wenn ſie vielleicht nicht ganz unmerklich iſt, muß hiebey Rückſicht genommen werden, welches jedoch die erſten Beobachter nicht ſogleich haben thun können. Hat man die Aequatorshöhe ſchon einigermaſſen richtig gefunden; ſo iſt es am beſten, aus dieſer und der gröſten Mittagshöhe der Sonne die Schiefe der Ecliptik herzuleiten, weil bey gröſſern Höhen nicht allein die Parallaxe, ſondern auch die Refraction weniger Einfluß hat.

Zuſatz.

81. An einem jeden andern Tage des Jahrs kann zu Mittage die Declination VS des Mittelpuncts der Sonne in S gefunden werden, wenn man die Mittagshöhe beobachtet, und mit der Aequatorshöhe vergleicht. Alsdenn hat man im rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck VSW auſſer dem rechten Winkel bey V auch den Winkel bey W als die Schiefe der Ecliptik und die Seite VS. Daraus 223 Fig.

aus können die übrigen beyden Seiten WS und WV, als die Länge der Sonne und ihre Rectaſcenſion (ihres Mittelpuncts nemlich, wie hier allemahl verſtanden wird) gefunden werden.

Die 5. Aufgabe.

82. **Die Rectaſcenſion eines Fixſterns zu finden.**

Aufl. Nach einer guten Uhr, welche die Sternzeit richtig zeigt, beobachte man den Augenblick, da der Stern culminirt, und zugleich die nächſte Culmination des Mittelpuncts der Sonne, die entweder vorhergeht, oder folgt. Die Zwiſchenzeit verwandle man in Grade des Aequators, (47. §.) ſo hat man den Zeitbogen zwiſchen dem Abweichungskreiſe der Sonne, worin ſie zu Mittage war, und zwiſchen dem Abweichungskreiſe des Fixſterns. Aus der Mittagshöhe, welche die Sonne hatte, findet man ihre Declination, daraus ferner ihre Rectaſcenſion die ſie zu Mittage hatte, und dazu addirt man, oder ſubtrahirt, wie es dem 44. §. gemäß iſt, den erwehnten Zeitbogen zwiſchen beyden Abweichungskreiſen.

Zuſatz.

223 Fig. 83. Wenn die Rectaſcenſion und Declination eines Sterns bekannt iſt, ſo kann ſeine Länge und Breite durch Rechnung gefunden werden. Denn im Dreyeck PΠL iſt PΠ der Schiefe der Eccliptik gleich, PL iſt das Complement der Declination, der ſphäriſche Winkel ΠPL iſt $= 180° - LPZ$ und LPZ ergänzt die Rectaſcenſion WY zu 90°. Demnach hat man den Winkel an P mit den Seiten die ihn einſchlieſſen, und kann das übrige finden. Es

iſt

iſt aber ΠL das Complement der Breite, und der Winkel LΠP das Complement der Länge zu 90°.

Die 24. Erklärung.

84. Schon vor Alters hat man gewiſſe Gegenden am Himmel, die mehrere Fixſterne faſſen, mit eigenen Nahmen belegt, und unter allerley Figuren vorgeſtellet, die ſich zum Theil auf wahre Geſchichte, zum Theil auf die Fabeln der alten Dichter beziehen. Das iſt die Urſache, weßwegen man Sternbilder, oder Geſtirne, Aſteriſmen, von einzelnen Fixſternen, wovon viele ebenfalls eigene Nahmen erhalten haben, unterſcheiden muß. Hie und da waren noch einzeln am Himmel zerſtreuete Sterne übrig, welche zu keinen von den Geſtirnen gehörten, denen die Alten eigene Nahmen beygeleget hatten, und dieſe nannten ſie Sporades, zerſtreuete, in keine Figur gebrachte Sterne. Die einzelnen Sterne werden ſonſt nach ihrer ſcheinbaren Gröſſe in Sterne erſter, zweyter, dritter, vierter, fünfter und ſechſter Gröſſe eingetheilt. Auſſer dieſen Sternen zeichnet ſich in heitern Nächten, wenn das Mondenlicht nicht hinderlich iſt, derjenige weiſſe Lichtſtreifen aus, der unter dem Nahmen der Milchſtraſſe bekannt iſt: überdem giebt es hie und da noch Stellen, die wie kleine Lichtwölkchen erſcheinen, und neblichte Sterne heiſſen.

Zuſatz.

85. Aus dem 82. §. erhellet, wie es möglich geweſen ſey, auf einer künſtlichen Himmelskugel die Fixſterne nach ihren Rectaſcenſionen und Declinationen in eben der Lage zu verzeichnen, wie ſie am Himmel erſcheinen. Unter mehrern andern vorgeſchlagenen Hülfsmitteln die Geſtirne kennen zu ler-

nen, behält die künſtliche Himmelskugel allemahl den Vorzug, wenn man ſie bey der nun folgenden Beſchreibung zur Hand haben kann. Hat man ſie nach ihren Stellen am Himmel und ihrer Lage gegen einander ſchon kennen gelernt, ſo dienen auch gute Sterncharten und Sternenverzeichniſſe, um deſto beſſer die einzelnen Sterne kennen zu lernen. Soviel wir Nachricht haben, rührt das älteſte uns bekannte Sternenverzeichniß vom Hipparch her, der es ohngefehr 150 Jahr vor Chriſti Geburt verfertiget hat. Claudius Ptolomäus, der zu Alexandrien in Egypten im zweyten Jahrhundert nach Chriſti Geburt lebte, hat uns das Sternverzeichniß in ſeinem aſtronomiſchen Werke aufbehalten, das eigentlich den Titel führt: Μεγάλη συνταξις τῆς ἀςρονομίας, nun aber, nachdem es im 9ten Jahrhundert in die arabiſche, und aus dieſer im 13 Jahrhundert ins lateiniſche war überſetzt worden, gewöhnlich unter dem Titel: Almageſtum angeführt wird. Neuere Sternverzeichniſſe aus eigenen Beobachtungen hat man vom Tycho de Brahe, Johann Hevel, *Flamſtead*. M. ſ. Aſtronomiae inſtauratae Progymnaſmata Auct. Tycho de Brahe P. I. Von dieſem Buche hat man zwey Ausgaben, die erſte vom Jahr 1602 die andre von 1648. Ioh. Hevelii Prodromus Aſtronomiae cum catalogo fixarum et firmamentum Sobieſcianum Gedani 1690. Das Werk enthält 56 vorzüglich ſchöne Sterncharten. Flamſteedii Hiſtoria coeleſtis Britannica Tomi III. Lond. 1725. Seit dem Jahr 1603 hatte man ſchon eine Sammlung von Sterncharten unter dem Titel Ioh. Bayeri Uranometria omnium aſteriſmorum continens ſchemata nova me-

methodo delineata, und es ſind nach der Zeit meh- rere Auflagen davon gemacht worden. In dieſen Charten ſind die Sterne mit Buchſtaben des grie- chiſchen Alphabeths, und wenn dieſe in einem Ge- ſtirne nicht zureichten, die übrigen mit Buchſtaben aus dem lateiniſchen Alphabeth bezeichnet. Eben die Bezeichnung hat nachher Flamſtead in ſeinen Himmelscharten beybehalten, und ſie iſt von den Aſtronomen allgemein angenommen worden. In Deutſchland ſind Doppelmayers Himmelscharten, die er im Jahr 1742 zu Nürnberg heraus gegeben hat, ziemlich bekannt, und ſie würden zum Ge- brauch noch weit angenehmer ſeyn, wenn zur Be- zeichnung der Sterne eben die Buchſtaben, welche Bayer und Flamſtead gebraucht haben, wären beybehalten worden. Die Sterne werden darin nach Hevels Beobachtungen vorgeſtellet, und die deutſchen Schriftſteller haben ſie bey den Beſchrei- bungen der Anzahl und Gröſſe der zu jedem Geſtir- ne gehörigen einzelnen Sterne gewöhnlich zum Grun- de geleget. Nur an die Doppelmayerſchen Buch- ſtaben muß man ſich nicht gewöhnen, weil die Bay- erſchen überall gebraucht werden. Im Jahr 1679 hat Auguſtin Royer vier Himmelscharten bekannt gemacht, die man um deßwillen kennen muß, weil ſie in Anſehung der neuern Geſtirne, mit den He- veliſchen Charten nicht übereinkommen. Das ſchon angeführte Flamſtädtſche Werk mit den dazu ge- hörigen Charten iſt unter allen das vollſtändigſte.

Nähere Beſchreibung der Geſtirne.

86. Grade im Norden ohngefehr 51 Grad hoch über dem Horizont in Halle findet man den Nord-

ſtern oder Polarſtern. Es iſt ein heller Stern von zweyter Gröſſe der an den oben (15. §.) ſchon angezeigten Merkmahlen leicht erkannt wird. Zunächſt um den Pol muß man ſieben Geſtirne, fünf alte vom Ptolomäus im Almageſt beſchriebene Sternbilder, und zwey neue Geſtirne kennen lernen. Die alten Geſtirne ſollen hier mit den groſſen Römiſchen, die neuen mit den kleinen arabiſchen Ziffern bezeichnet werden. Bey Beſchreibung der Geſtirne ſelbſt werde ich vornemlich nur die Sterne erſter, zweyter und dritter Gröſſe, auch zuweilen die von vierter Gröſſe, und ihre Lage gegen einander als Hülfsmittel anführen, die Geſtirne kennen zu lernen. Uebrigens iſt leicht zu erachten, daß nicht alle Sternenverzeichniſſe die Anzahl aller zu jedem Geſtirn gehörigen einzelnen Geſtirne übereinſtimmig angeben können: neuere zählen mehrere als ältere, ſo wie nach und nach die Stellen mehrerer durch Beobachtungen ſind beſtimmt worden.

I. Der groſſe Bär.

87. Die ältern Nahmen ſind Arctos major, ſeptem Teriones vel Triones, Parrhaſis, Calliſto, Lycaonia, Dobeb. (virg. Georg I. v. 138. Homer. Lib. XVIII. Iliad. v. 487. Vier ſehr kenntliche Sterne ſtehen in einem ziemlich regulären Viereck im Rücken, und drey andre linker Hand in einer etwas gebogenen Linie im Schwanz des Bären. Sechs von dieſen Sternen ſind von zweyter Gröſſe, nur derjenige im Viereck, welcher dem Schwanz am nächſten ſteht, iſt von dritter Gröſſe. Seitwärts ganz nahe über dem mittelſten im Schwanze ſteht der kleine Stern Alcor, der Reuter. Die

Land-

Landleute nennen dieſen Theil vom Geſtirn des Bären den **Wagen** am Himmel. Sonſt gehören noch hieher ſechs kleinere Sterne im Kopf, unter ihnen drey im Halſe; und weiter unten ſechs in den Vorderfüſſen. Unter den leztern ſind drey von dritter Gröſſe. Zur linken unter dem Viereck im Rücken finden ſich noch verſchiedene nur kleine Sterne, die zu den Hinterfüſſen gehören. Die Fabel von der **Calliſto**, daher das Geſtirn den Nahmen erhalten hat, erzählt **Ovid** Lib. II. Metam. v. 401. auch vergleiche man Fab. 6. v. 512.

Die zwey vordern Sterne im Viereck ſtehen mit dem Polarſtern in grader Linie: dieſe Bemerkung iſt ein neues Hülfsmittel, den Polarſtern ſicher zu finden.

II. Der kleine Bär.

88. Arctos minor, Phoenice, Plauſtrum minus ſiehet völlig ſo aus, wie der groſſe Bär, und ſteht dem Polarſtern näher: nur iſt alles kleiner, als im groſſen Bär, und die Stellung iſt ſo, daß der Schwanz dieſes kleinen Bären dahin weiſet, wo der groſſe Bär den Kopf hat. Die beyden vorderſten Sterne im Viereck des Rückens nach dem Kopf zu ſind die helleſten, nebſt dem äuſſerſten im Schwanz, und dieſer letztere iſt ſelbſt der **Polarſtern**, der auch den Nahmen Cynoſura führt, weil der kleine Bär von einigen Alten unter dem Bilde eines Hundes vorgeſtellet wird. Eben dieſer Polarſtern iſt von zweyter Gröſſe, die beyden oberſten im Viereck machen mit dem erſten im Schwanz faſt eine grade Linie, und der zunächſt am Halſe iſt ebenfalls von zweyter Gröſſe, der an den Vorderfüſſen von dritter Gröſſe. Die zwey erſten im Schwanz

kommen auch unter dem Nahmen der Wächter (vigiles) vor, weil ſie oft bey trüben Himmel ſichtbar ſind.

III. Der Drache.

89. Serpens, Anguis, Heſperidum cuſtos, ſchlingt ſich um den kleinen Bär ſchlangenförmig faſt in der Figur eines S. Der Schwanz läuft mitten zwiſchen beyden Bären durch, und die Krümme nach dem Kopf zu liegt unter den Füſſen des kleinen Bären. Zwey Sterne von dritter Gröſſe im Kopf ſind ziemlich kenntlich. Wenn man die Linie zwiſchen den beyden vorderſten Sternen im Viereck des kleinen Bären verlängert; ſo trift ſie auf einen hellen Stern dritter Gröſſe mitten im Drachen, zwiſchen dem Kopf des Drachen und dem kleinen Bär. Ein Stern zweyter Gröſſe ſteht im Schwanz des Drachen. (Virg. Georg. I. v. 244.) Nach dem Lucan iſt dies der Drache, der die goldenen Aepfel im Walde der Heſperidum bewacht hat, und vom Hercules umgebracht, von der Juno aber an den Himmel geſetzt worden.

IV. Cepheus.

90. Wenn man die Linie zwiſchen den beyden vorderſten Sternen im Viereck des groſſen Bären durch den Polarſtern in Gedanken verlängert; ſo trift man an der andern Seite des Polarſterns auf dieſen Cepheus. Im Kopf, der an die Milchſtraſſe ſtößt, ſiehet man ein kleines Dreyeck von 3 Sternen vierter Gröſſe, Leib und Füſſe ſind dem Polarſtern zugekehrt, und am kenntlichſten ſind darin 3 Sterne dritter Gröſſe. Eine Linie vom Kopf nach den Polarſtern gezogen läuft auf zwey kenntliche Sterne vierter Gröſſe zu, zwiſchen jenen dreyen Ster-

Sternen dritter Gröſſe durch, wovon zwey auf der Seite nach dem Drachen zuliegen, der dritte aber auf der andern Seite. Sonſt ſind die übrigen hieher gehörigen Sterne nur wenig kenntlich. Cicero (Tuſculan. Quæſt. L. 5. C. 3. n. 8. p. 424. Ed. Erneſti.) erzählt, der König Cepheus in Aethiopien ſey nach ſeinem Tode mit ſeiner ganzen Familie, (nemlich ſeiner Gemahlin Caßiopäa, ſeiner Tochter Andromeda, und Schwiegerſohn Perſeus, die weiter unten vorkommen.) wegen ſeiner ungemeinen Wiſſenſchaft in der Sternkunde an den Himmel geſetzt worden.

V. Caßiopäa.

91. Dies Geſtirn iſt etwas weiter vom Pol entfernt als Cepheus, und die Bruſt ſtehet ſchon in der Milchſtraße. Eine Linie vom Hintertheil des groſſen Bären zwiſchen dem Viereck und Schwanz durch den Polaſtern trift an der andern Seite dieſes Polarſterns auf die Caßiopäa. Sie wird wie Cepheus in umgekehrter Stellung die Füße gegen den Pol, den Kopf dem Aequator zugekehrt gezeichnet. Drey Sterne dritter Gröſſe ſtehen beynahe in grader Linie, und der äuſſerſte in der Bruſt iſt daran zu erkennen, daß er ſchon in der Milchſtraſſe ſteht.

1. Der Cameloparde.

92. Zwiſchen der Caßiopäa und dem Kopf des groſſen Bären iſt noch ein ziemlich geräumiger Platz übrig, wo nur kleine wenig kenntliche Sterne befindlich ſind, welche die Alten in kein Sternbild gebracht hatten. Bartſchius hat hieher ein neues Sternbild, den Cameloparden geſetzt, ſo daß er mit der Bruſt gegen den Kopf des groſſen Bären,

mit den Hinterfüſſen gegen die Caßiopäa, und die Milchſtraſſe ſtehet, und der Kopf oben dem Pol nahe iſt.

2. Das Rennthier.

Equicervus, über dem Rücken des Cameloparden zwiſchen den Füſſen des Cepheus und der Caßiopäa. Herr le Monnier ſetzte dies kleine Sternbild hieher: es befindet ſich nur auf den neueſten Charten, und enthält nur Sterne 6ſter Gröſſe bis auf einen von 5ter Gröſſe.

Die Hauptſegmente und Hauptzonen der Himmelskugel.

93. Die bisher beſchriebenenen ſieben Geſtirne können füglich circumpolares heiſſen. Sie nehmen um den Nordpol herum einen Raum ein, der ſich an einigen Stellen ziemlich weit über dem Polarkreis
223 ΠM hinaus erſtreckt: denn dieſer Polarkreis läuft
Fig. durch den Kopf des groſſen Bären, und der ganze übrige Theil dieſes Geſtirns liegt ſchon auſſerhalb des Polarkreiſes. Nur der kleine Bär liegt ganz innerhalb deſſelben, und ein groſſer Theil vom Cepheus von den Füſſen bis nahe an die Schultern. Vom Drachen liegt eine Krümme zunächſt dem Kopf innerhalb, die andre auſſerhalb des Polarkreiſes. Auch Caßiopäa liegt beynahe ganz auſſerhalb des Polarkreiſes. Indeſſen iſt es ein groſſes Hülfsmittel, um deſto leichter ſowohl ganze Geſtirne, als auch einzelne Sterne am Himmel zu finden, wenn man dieſen Raum den die Circumpolargeſtirne einnehmen, die nordliche Hauptzone nennt, und ſich übrigens die ganze Himmelskugel ſo eingetheilt vorſtellet, wie ſie die beyden Polarkreiſe ΠM, DK, und die beyden Wendekreiſe HF, IX theilen.

Zu-

zuerſt alſo ein nordliches Segment um den Nord-pol P, und eben ſo ein ſüdliches Segment um den Südpol Q herum. Ferner die nordliche Hauptzone zwiſchen dem Polarkreiſe ΠM und nordlichen Wendekreiſe HF, und eben ſo, die ſüdliche Hauptzone zwiſchen dem ſüdlichen Polarkreiſe DK und Wendekreiſe IX, ohne daß dieſe Kreiſe eben aufs genaueſte die Gränzen abgeben. Mitten um die Kugel herum läuft alsdenn die äquatoriſche Zone zwiſchen beyden Wendekreiſen, die man vom Aequator ſo nennen kann. Die Nahmen der zu einer jeden dieſer Abtheilungen gehörigen Geſtirne behält man alsdenn am beſten in der Ordnung, wie ſie von Weſten gegen Oſten auf einander folgen. So werden die Grade der Rectaſcenſion gezählt, (42. §.) und in eben dieſer Ordnung folgen auch die Geſtirne in der täglichen Bewegung von Oſten gegen Weſten nach einander. Auf den groſſen Bär in der nordlichen Hauptzone folgt nach dieſer Ordnung der kleine Bär mit dem Drachen, darauf Cepheus, alsdenn Caßiopäa, zuletzt das Rennthier und der Cameloparde.

Die nordliche Hauptzone.

94. Hieher gehören acht alte und acht neue Geſtirne, und es iſt am rathſamſten, daß man ſich hier ſowohl, als auch weiter im folgenden zuerſt vornemlich nur die alten Geſtirne bekannt mache.

1. Der Luchs.

Unter den Vorderfüſſen des Cameloparden, und unter dem Kopf mit den Vorderfüſſen des groſſen Bären, ſind wenig helle Sterne befindlich: Hevel brachte ſie in ein Sternbild, das er den Luchs

nannte, weil man ſcharfe Augen haben muß, um dieſe Sterne zu finden. Weiter Oſtwärts unter den Hinterfüſſen des groſſen Bären ſteht:

2. Der kleine Löwe.

Welchen ebenfalls Hevel dahin geſetzet hat. Die drey kenntlichſten dahin gehörigen Sterne ſind von dritter Gröſſe, und ſtehen faſt alle drey in grader Linie. Neun in dieſer Gegend befindliche Sterne hatten die Alten unter dem Nahmen der Sporadum ſchon mitgezählt. Hinter dem groſſen Bär und kleinen Löwen folgt in der täglichen Bewegung.

I. Bootes.

95. Er heißt auch Arcas, Cuſtos Erimanthidos urſæ; Venator urſæ, Arctophylax. Es ſoll dieſer Arcas der Sohn des Jupiters und der Calliſto ſeyn, wovon Ovid nachzuſehen iſt. Triſt. Lib. I. Eleg. III. v. 103. Faſt. III. v. 405. Zu dieſem Geſtirn gehört ein Stern erſter Gröſſe, der Arcturus heißt, und 6 von zweyter Gröſſe; daher iſt dieſer Bootes ſehr kenntlich. Von den Sternen zweyter Gröſſe ſteht einer im Kopf, mit dem äuſſerſten im Schwanz des groſſen Bären und dem hinterſten hellen im Quadrat des groſſen Bären faſt in grader Linie. Ferner ſteht in jeder Schulter ein Stern zweyter Gröſſe, mit jenem im Kopf faſt im gleichſeitigen Dreyeck. Der vierte Stern zweyter Gröſſe ſteht im Gürtel, und nahe bey ihm zwey helle Sterne vierter Gröſſe. Noch ſteht in jedem Fuß ein Stern zweyter Gröſſe, und etwas weniges höher als dieſe beyden der Arcturus. Zwiſchen dem groſſen Bär und Bootes hatten die Alten zwey Sporades bemerkt. Hieher hat Hevel.

3. Die Jagdhunde.

Aſterion und Chara geſetzt, Aſterion ſteht oben, Chara unten, und in der Halsbinde der Chara ein Stern zweyter Gröſſe. Die übrigen ſind kleinere Sterne.

Die drey Heveliſchen Geſtirne, der Luchs, der kleine Löwe, und die Jagdhunde, machen auf Royers Charten. (M. ſ. dem 61. §.) nur ein neues Geſtirn aus, das er den Jordanfluß nennt. Der helle Stern in der Halsbinde der Chara heißt auf den Engliſchen Charten das Herz Carls II.

4. Die Haare der Berenice

unter den Jagdhunden ſoll Conar, ein ägyptiſcher Hofmathematicus zur Zeit des Königes Ptolomäus Philadelphus dies Geſtirn an den Himmel geſetzet haben. Am kenntlichſten iſt das Sternbild da, wo bey der Abbildung die Haare zuſammengebunden vorgeſtellet werden, weil daſelbſt 10 kleine Sterne nahe bey einander ſtehen. Ptolomäus hatte in ſeinem Almageſt dieſes Sternbild nicht mitgezählt: aber Tycho hat es hergeſtellet, und hieher geſetzt.

5. Der Berg Mönalus.

Dieſen ſetzte Hevel an den Himmel unter den Füſſen des Bootes, weil Arcas nach den Fabeln der Poeten auf dem Berge Mönalus geſtanden hat, und rechnete 8 Sporades dazu, davon 6 zur vierten, 2 zur fünften Gröſſe gehören.

II. Die nordliche Krone.

96. (Corona borealis, Corona Ariadnae) Dieſe folgt dem Bootes in der täglichen Bewegung. Es iſt zwar nur ein kleines Geſtirn in der Figur eines Kranzes: doch iſt einer von den dazu gehörigen Sternen ſehr kenntlich und von zweyter Gröſſe. Dieſen

ſen nennt Virgil Gnoſia: Lib. I. Georg. v. 223.) er ſteht mit dem Polarſtern und dem hellen im Quadrat des kleinen Bären in grader Linie. Die Fabel von der Ariadne erzählt Ovid Metam. Lib. 8. Fab. 2. v. 177. und Lib. III. Faſtor. v. 459 ſqq.

III. Hercules.

97. Ein groſſes Geſtirn, bey deſſen Abbildung Hercules in umgekehrter Stellung ſo vorgeſtellet wird, daß er mit dem einen Fuß kniet, daher er auch Engonaſis, Genu flexus, heißt, und mit dem andern auf den Kopf des Drachen tritt. Acht Sterne von dritter und 16 von vierter Gröſſe machen mit vielen andern kleinern dies Geſtirn ſehr kenntlich. Der erſte Stern dritter Gröſſe ſteht unten im Kopf, der zweyte in der linken Schulter, der dritte im rechten Arm, der vierte gleich unter dem rechten Arm, der fünfte in der Hüfte, der ſechſte etwas weiter nach dem Drachen zu, der ſiebente im rechten Knie, der achte im Fuß nahe beym Kopf des Drachen. Auch gehört hieher ein neblichter Stern ganz unten im Fuß noch näher beym Kopf des Drachen. M. ſ. Ovid. Metam. Lib. IX. v. 134 ſqq.

In der rechter Hand hält Hercules

6. den Cerberus, ein neues von Hevel hinzu geſetztes Sternbild, wozu einige Sterne, von vierter und fünfter Gröſſe gerechnet werden. Ältere Charten auch die Engliſchen haben ſtatt deſſen einen Apfelzweig. Nach dem Hercules folgt

IV. Die Leyer des Orpheus.

98. Die Muſen ſollen ſie mit Jupiters Einwilligung an den Himmel geſetzt haben, als Orpheus von den Traciſchen Weibern in Stücken zerriſſen, und ſein Kopf nebſt der Leyer in den Fluß Hebrum ge-

geworfen worden. Unter den dahin gehörigen Sternen iſt einer von erſter Gröſſe, der Lucida Lyrae, auch Fidicula, Wega, heißt. Unter den übrigen zählt man noch 3 von 3ter Gröſſe. Dies Geſtirn ſteht nahe an der Milchſtraſſe, es wird auch wie ein herabfallender Geyer gebildet unter dem Nahmen vultur cadens.

V. Der Schwaan.

99. Ein ſehr kenntliches Geſtirn in der Milchſtraſſe, das gleich nach der Leyer in der täglichen Bewegung folgt. Es gehört dazu ein Stern von zweyter, 7 von dritter Gröſſe, mit vielen andern kleinern. Der Stern zweyter Gröſſe ſteht im Schwanz. Von den Sternen dritter Gröſſe findet man einen in jedem Flügel, und einen im Kopf, welche mit dem im Schwanz beynahe die Geſtalt eines Kreuzes machen, und in der Mitte dieſes Kreuzes ſtehen noch zwey Sterne dritter Gröſſe neben einander. Die übrigen beyden Sterne dritter Gröſſe ſtehen im ſüdlichen Flügel mit der Bruſt in grader Linie. Dieſer Schwaan wird fliegend abgebildet, ſein Kopf erſtreckt ſich bis unter die Leyer, der eine Flügel aufwärts bis an den Drachen gegen Norden, der andre unterwärts gegen Süden: der Schwanz erſtreckt ſich bis an den Kopf des Cepheus. Man hält dieſen Schwaan für denjenigen, worin Orpheus ſoll verwandelt ſeyn, als er von den Bachanten zerriſſen worden.

Gleich unter dem Kopf und Halſe des Schwaans ſteht.

7. Der Fuchs mit der Gans,

(vulpecula cum anſere) und das kleine Sternbild hat wiederum Hevelius hieher geſetzt. Dahin gehört

hört unter andern ein Stern vierter Gröſſe, welcher den Alten nur als einer der Sporadum bekannt war. Auf Royers Charten iſt hier der Tygerfluß gezeichnet, der ſich aber noch weiter gegen Süden recht in der Milchſtraſſe bis an das Geſtirn des Schlangenmannes erſtreckt, wodon im 105. §. die Beſchreibung folgt.

Hinter dem ſüdlichen Flügel und Schwanz des Schwaans unter dem Kopf des Cepheus iſt eine ziemlich geräumige Stelle, wo lauter ganz kleine wenig kenntliche Sterne ſtehen. Hevel hat

8. Die Eidexe, (Lacerta, Stellio,) hieher geſetzt auf Royers Charten aber ſind hier ein Paar Scepter gezeichnet.

VI. Die Andromeda.

100. Des Cepheus und der Caßiopäa Tochter, des Perſeus Gemahlin, der ihr in der täglichen Bewegung gleich folgt. Auch dies groſſe Geſtirn iſt ſehr kenntlich. Auſſer einem neblichten Stern gehören hieher 3 von zweyter Gröſſe, 2 von dritter, 10 von vierter Gröſſe mit vielen andern kleinern. Die drey Sterne zweyter Gröſſe ſtehen faſt in grader Linie, im Kopf, im Gürtel, und im Fuß. Der mittlere im Gürtel heißt bey den Arabern Mirach, der letzte im Fuß aber Alamak. Im Gürtel ſteht auch der neblichte Stern.

VII. Perſeus.

101. Dies Geſtirn ſteht recht in der Milchſtraſſe und wird mit dem Kopf der Meduſa in der Hand abgebildet. Von zweyen hieher gehörigen Sternen zweyter Gröſſe ſteht einer im Kopf der Meduſa, er hat auch den Nahmen Algol, und ſpielt mit einem röthlichen Licht. Der zweyte Stern zweyter Gröſſe

ſteht dem Algol gegen über in der Seite des Perſeus, ſo daß er mit dem Algol, und dem Fuß der Andromeda beynahe ein gleichſeitiges Dreyeck macht.

VIII. Der Fuhrmann.

102. Auriga, Erichtonius, im Homer Erichteus. Dieſes groſſe ſehr ſchöne Geſtirn beſchließt die Reihe der alten Geſtirne in der nordlichen Hauptzone gleich nach dem Perſeus, grade unter dem Cameloparden. Es iſt dem Andenken des Athenienſiſchen Königes Erichtonius gewidmet, der als Erfinder vieler nützlichen Künſte beſchrieben wird, und beſonders der Kunſt, ſich des Wagens mit Zugpferden zu bedienen. Virg. Georg. Lib. III. v. 113. Es enthält unter vielen andern einen Stern erſter Gröſſe, 2 Sterne zweyter Gröſſe, 2 von dritter 6 von vierter Gröſſe. Der Stern erſter Gröſſe heißt Capella und ſitzt dem Fuhrmann auf der linken Schulter: neben ihm auf der andern Schulter ſteht ein Stern zweyter Gröſſe, und der andre Stern zweyter Gröſſe ſteht im Fuß. Im andern Fuß ſteht ein Stern dritter Gröſſe, und der zweyte von dritter Gröſſe ſteht im Kopf. Gleich unter der Capella ſtehen drey Sterne vierter Gröſſe, welche die Böcklein, (hoedi) heiſſen. Der Gürtel und die Füſſe des Fuhrmanns ſtehen in der Milchſtraſſe, die zwiſchen der Capella und den beyden hellen Sternen in den Füſſen hindurch gehet.

Allgemeine Anmerkung.

103. Die Circumpolargeſtirne im nordlichen Segment gehen bey uns nie unter, und man findet ſie zu jeder Jahrszeit und in jeder Stunde der Nacht gewiß am Himmel. Weil man jedoch gewöhnlich wohl die Abendſtunden nach Untergang der Sonne zu den Betrachtungen des geſtirn-

ten Himmels wählen wird: ſo bemerke man hier vorläufig folgendes. Der groſſe Bär befindet ſich in den Abendſtunden im Herbſt unter dem Pol im Norden, in den dreyen Wintermonaten ſeitwärts des Pols im Oſten, in den Frühlingsmonathen oberhalb des Pols nahe beym Zenith, und in den Sommermonathen ſeitwärts des Pols im Weſten. Um die übrigen Circumpolargeſtirne zu finden, darf man ſie nur nach der Ordnung der täglichen Bewegung von Weſten nach Oſten um den Polarſtern herum ſuchen. Der Bär und die übrigen hieher gehörigen Geſtirne bewegen ſich wie alle übrige von Oſten nach Weſten, wenn ſie oberhalb des Pols ſind, von Weſten nach Oſten aber, wenn ſie unterhalb des Pols durchgehen, wie es nicht anders ſeyn kann. Was die zur nordlichen Hauptzone gehörigen Geſtirne betrift, ſo bemerkt man vornemlich die beyden Sterne erſter Gröſſe Capella im Fuhrmann, und die Lucida der Leyer. Die Abweichung der Capella iſt noch etwas gröſſer als 45°, alſo geht ſie bey uns, wo die Aequators-Höhe ohngefehr 39° iſt gar nicht unter. Die Lucida der Leyer hat eine Abweichung von $38\frac{1}{2}$°. Hier in Halle iſt die Aequatorshöhe ziemlich nahe eben ſo groß: alſo geht Lucida Lyra bey uns auch nicht unter, ob ſie gleich grade im Norden im Horizont erſcheint. Der dritte zur nordlichen Hauptzone gehörige Stern erſter Gröſſe, Arcturus im Bootes hat eine Abweichuug nur von $20\frac{1}{2}$°: er geht alſo im Nordweſten unter, kommt nach ohngefehr 8 Stunden im Nordoſten wieder zum Vorſchein, und man findet ihn nicht allemahl über dem Horizont. Weil jedoch Bootes zunächſt nach dem Bär in der täglichen Bewegung folgt; ſo kann man leicht aus dem bloſſen Anblik der Stelle, wo man den Bär findet, beurtheilen wo ohngefehr Arctur ſeine Stelle haben muß.

Die äquatoriſche Zone.

104. Die Eccliptik läuft durch zwölff Geſtirne, dieſe umgeben die Himmelskugel wie eine eigene Zone, die zwiſchen den Wendekreiſen eine ſchräge Lage hat, und unter dem Nahmen des Thierkreiſes nur einen Theil des Raums zwiſchen den Wendekreiſen einnimmt, welcher die äquatoriſche Zone ausmacht.

macht. Die Nahmen der zwölff zum Thierkreiſe gehörigen Geſtirne ſind aus jedem Calender bekannt. Es ſind folgende: 1. Widder, 2. Stier, 3. Zwillinge, 4. Krebs, 5. Löwe, 6. Jungfrau, 7. Wage, 8. Scorpion, 9. Schütze, 10. Steinbock, 11. Waſſermann, 12. Fiſche. Dieſe zwölff Geſtirne heiſſen auch himmliſche Zeichen, oder die Zeichen des Thierkreiſes. Die mit n. 1. bis n. 6. bezeichneten heiſſen die Sommerzeichen, weil um die Zeit, da dieſe Geſtirne ihre Nahmen erhalten haben, die Sonne mit dem erſten Frühlingstage in den Widder, und mit dem erſten Herbſttage in die Wage trat: deßwegen heiſſen auch die übrigen mit n. 7. bis n. 12. bezeichneten die Winterzeichen. Die Abſicht mag wohl anfangs geweſen ſeyn, daß jedes dieſer Geſtirne nach der Länge der Ecliptik gerechnet ohngefehr 30 Grade einnehmen ſollte, damit alsdenn die Sonne in jedem Zeichen ſich ohngefehr einen Monath verweile: allein die 12 Geſtirne des Thierkreiſes ſind ſehr ungleich groß ausgefallen. Indeſſen hat das doch die Eintheilung der Ecliptik in gleiche Bogen von 30° (33. §. veranlaſſet, die auch Zeichen (Dodecatemoria) heiſſen, auch wohl mit den Zeichen des Thierkreiſes nach der Ordnung einerley Nahmen führen. Wenn nun gleich Ecliptik und Aequator einander halbiren, ſo wird doch der Thierkreis nicht vom Aequator halbirt.

Nordwärts des Aequators.

Liegen 12 die Fiſche, 1 der Widder, 2 der Stier, 3 die Zwillinge, 4 der Krebs, 5 der Löwe, 6 die Jungfrau ohngefehr zur Hälfte.

Südwärts des Aequators.

7 die Wage, 8 der Scorpion, 9 der Schütze, 10 der Steinbock, 11 der Waſſermann.

Die äquatoriſche Zone wird alſo am beſten in folgende vier Abtheilungen gebracht. Man unterſcheide den nordlichen Theil des Thierkreiſes vom ſüdlichen Theil. Der nordliche Theil fängt mit den Fiſchen unter der Andromede an, und läuft unter dem Perſeus dem Fuhrmann, dem Luchs, und groſſen Bären fort bis unter das Haupthaar der Berenice und dem Berge Mœnalus unter des Bootes Füſſen, woſelbſt er ſich mit der Jungfrau endiget, die zum Theil ſchon unter dem Aequator liegt. Zum ſüdlichen Theil gehören die übrigen 5 Zodiacalgeſtirne. Oberhalb des ſüdlichen Theils bleibt zwiſchen demſelben und einem Theil der nordlichen Hauptzone, worin die Krone, Hercules, die Leyer, der Schwaan, und Hevelii Eidexe ihre Stelle haben, noch ohngefehr eine halbe Zone am Himmel übrig, die zwar zur äquatoriſchen Zone aber nicht zum Thierkreiſe gehört, und welche füglich die nordliche Halbzone heiſſen kann. Unterhalb des nordlichen Theils vom Thierkreiſe von den Fiſchen bis unter der Jungfrau iſt in der äquatoriſchen Zone eine ähnliche halbe Zone übrig, welche man die ſüdliche Halbzone nennen kann.

Die nordliche Halbzone.

105. Hieher gehören acht Geſtirne von denen, die Ptolemäus beſchrieben hat. Nördliche Geſtirne ſind nach dem Ptolemäus diejenigen, welche nordwärts des Thierkreiſes liegen, und ſüdliche diejenigen, welche ſüdwärts des Thierkreiſes ihre Stellen haben. Ptolemäus zählt 21 nordliche Geſtirne

ſtirne, nemlich 5 Circumpolargeſtirne, (87 – 91. §.) 8 in der nordlichen Hauptzone, (95 – 102. §) und 8 in der nordlichen Halbzone.

I. Der Schlangenträger, und II. die Schlange.

Ophiucus, Serpentarius, ſind Nahmen des Schlangenmannes, der den Aeſculap vorſtellen ſoll. Ovid. Lib. 15. Fab. 50. v. 665. Der Kopf des Ophiucus zeichnet ſich durch einen Stern zweyter Gröſſe aus, gleich unter dem Kopf des Hercules, der übrige Theil des Geſtirns, welches anſehnlich groß iſt, faſſet auſſerdem noch 5 Sterne von dritter Gröſſe auſſer vielen andern kleinern, wodurch es ziemlich kenntlich wird. Jede Schulter hat einen Stern von dritter und einen von vierter Gröſſe.

Die Schlange ſchlingt ſich zwiſchen den Füſſen des Schlangenmannes durch, der Kopf hebt ſich aufwärts beym Hercules unter der Krone, und der Schwanz ſchlingt ſich auf der andern Seite des Schlangenmannes zwiſchen der Milchſtraſſe in die Höhe. Unter den kenntlichſten dazu gehörigen Sternen iſt einer von zweyter, und 7 ſind von dritter Gröſſe. Der helleſte Stern ſteht im Halſe, zwiſchen zweenen andern von 3ter Gröſſe, mit den hellen Sternen im Schwanze des Drachen und der Krone in grader Linie. Auch ſtehen im Halſe noch 2 Sterne von vierter Gröſſe. Auf der andern Seite des Schlangenmannes iſt das Ende des Schwanzes zwiſchen zweyen Armen der Milchſtraſſe an dreyen Sternen 3ter Gröſſe, die übereinander ſtehen ſehr kenntlich.

1. Das Sobiesꝁiſche Schild.

106. Dem Könige von Polen Johann III. und deſſen Familie zu Ehren, ſetzte Hevel unter dieſem

ſem Nahmen ein Geſtirn hieher, in der Milchſtraſſe unter dem Schwanz der Schlange, und rechnete 7 Sterne dahin, ſoviele nemlich als Perſonen in der Sobieskiſchen Familie waren. Es ſind 2 Sterne von 4ter, 4 von 5ter und einer von 6ſter Gröſſe.

III. Der Adler, und

IV. der Pfeil.

107. Weiter gegen Oſten unter der Leyer und dem Schwaan ſteht der Adler in der Milchſtraſſe, den man auch leicht an einem dazu gehörigen Stern erſter Gröſſe (Lucida aquilæ, Altair,) erkennt. Dies Geſtirn heiſt auch vultur volans, man rechnet dahin auſſerdem noch 2 Sterne von 3ter Gröſſe, wovon einer im Halſe, einer im rechten Flügel, zwey im Schwanze ſtehen. Die übrigen ſind kleiner und nicht ſo kenntlich. Der Stern erſter Gröſſe ſteht mit den beyden helleſten in der Leyer in grader Linie.

Der Pfeil iſt ein kleines Geſtirn zwiſchen dem Adler und Schwaan, wozu nur 4 Sterne von vierter, einer von 5ter Gröſſe nebſt noch einigen von 6ſter Gröſſe gehören. Es ſoll einer von den Pfeilen des Hercules ſeyn, mit dem er den Adler getödtet hat, der des Prometheus Leber gefreſſen.

Unter dem Adler wird auf den neuern Himmelskugeln und Sterncharten gewöhnlich unter dem Nahmen

2. Antinous.

ein Geſtirn vorgeſtellet, deſſen zwar beym Ptolomäus im älteſten Sternverzeichniſſe, ſo wie des Hauptbaars der Berenice (95. §.) ſchon erwehnt wird, das Ptolomäus aber unter ſeinen 21 nordlichen Geſtirnen nicht mitgezählt. Ticho hat auch dieſem

Ge-

Geſtirn hier ſeinen Plaz wieder angewieſen, den es wie es ſcheint vormahls ſchon gehabt hat. Am meiſten kenntlich machen es 3 Sterne von 3ter, und 6 von 4ter Gröſſe. Von den 3 helleſten ſtehet einer in jedem Arme, und der dritte im linken Fuß. Es ſoll der Antinous ſeyn, dem der Kayſer Hadrian, als einer neuen Gottheit Altäre hat bauen laſſen. Nach andern ſoll es Ganymedes ſeyn, den der Adler, unter welchem er ſtehet, aus dem Idiſchen Walde entführt, und in den Himmel gebracht hat, daß er den Göttern Nectar einſchencke. (Virg. Lib. I. Aeneid. v. 28, und Lib. V. v. 252.) Hevel hat dem Antinous Pfeil und Bogen gegeben, womit er unter dem Schuz des Adlers (des deutſchen und polniſchen) nach den Schüzen und Steinbock im Thierkreiſe zielt, welches eine Anſpielung auf neuere Begebenheiten iſt.

V. Der Delphin.

108. Triton, Neptuns Sohn, der den Göttern im Kriege mit den Rieſen gedient hatte, ſoll in dieſen Delphin verwandelt und an den Himmel verſezt ſeyn. Das Geſtirn hat ſeine Stelle noch unter dem Schwaan, und iſt nur klein: es gehören aber dazu 5 Sterne von dritter Gröſſe, mit einigen kleinern, die alle ganz nahe beyſammen ſtehen: daher man dies kleine Geſtirn leicht erkennen kann.

VI. Das kleine Pferd, und
VII. der Pegaſus.

109. Von dem kleinen Pferde (Equuleus, Cyllarus) wird auf den Himmelskugeln nur der Kopf gezeichnet, und es ſoll der Cyllarus ſeyn, welchen Mercur dem Caſtor geſchenkt hat. Das Geſtirn iſt klein und faſſet nur 4 Sterne von vierter, 1 von 5ter und noch einige von 6ſter Gröſſe.

Der Pegaſus iſt dagegen ein anſehnlich groſſes Geſtirn, wiewohl es auch nur als der vordere Theil eines geflügelten Pferdes abgebildet wird. Die Stellung iſt umgekehrt, der Kopf unten gleich neben dem kleinen Pferde, die Vorderfüſſe aber erſtrecken ſich hinauf nach Norden bis unter Hevelii Eydexe, und der Hals mit den Flügeln oſtwärts bis unter den Kopf der Andromeda. Unter den vielen dahin gehörigen Sternen ſind drey von zweyter und 3 von dritter Gröſſe. Die drey Sterne zweyter Gröſſe machen ein groſſes Dreyeck aus, zwey davon ſtehen faſt in einerley Abweichungskreiſe und kommen beynahe zugleich im Meridian: der untere am Halſe heißt Marcab, der obere am Fuß Scheat. Der dritte ſteht weiter oſtwärts an der Spitze des Flügels ſehr nahe beym Colur der Nachtgleichen: er führt den Nahmen Algenib. Alle drey machen mit dem hellen Stern im Kopf der Andromeda ein groſſes ziemlich reguläres Viereck aus. Das Geſtirn iſt alſo leicht zu erkennen. Die Fabel vom Pegaſus erzählt Ovid. Lib. III. Faſtor. v. 449 ſqq.

VIII. Der nordliche Triangel.

110. Ein kleines Geſtirn unter dem Fuß der Andromeda. Drey Sterne vierter Gröſſe ſtellen ein gleichſchenklichtes Dreyeck vor, zwey davon ſtehen nahe bey einander, und machen oſtwärts die Grundlinie aus, der an der Spitze liegt weſtwärts. Es werden jedoch noch einige andre kleine Sterne dazu gerechnet.

3. Der kleine Triangel.

beſtehet aus 3 kleinen Sternen ſechſter Gröſſe gleich unter dem vorigen Triangel, und es iſt wiederum ein kleines von Heveln hinzu geſetztes neues Geſtirn.

4. Die

4. Die Fliege.

iſt noch ein kleines neueres Geſtirn gleich neben dem kleinen Triangel, wohin man 4 Sterne rechnet, einen von dritter, 2 von vierter und einen von fünfter Gröſſe. Statt deſſen findet man auf Royers Charten eine Lilie gezeichnet.

Der nordliche Theil vom Thierkreiſe.

111. Dieſer fängt mit den Fiſchen ſchon unter dem Pegaſus und der Andromeda an, und läuft unter dem Perſeus, Fuhrmann, dem Luchs, dem kleinen Löwen, und dem Haupthaar der Berenice bis unter dem Bootes um den halben Himmel herum.

XII. Die Fiſche

zählt man zwar nach Art der Alten als das zwölfte Zodiacalgeſtirn; es iſt aber unter den nordlichen (104. §.) in der Ordnung der täglichen Bewegung das erſte. Es iſt zwar eins der gröſten Geſtirne, und wird wie zwey Fiſche gebildet, die mit einem nachläßig geſchlungenen Bande an den Schwänzen zuſammen gefüget ſind: allein die dazu gehörigen Sterne ſind klein und wenig ins Auge fallend. Der eine Fiſch noch unter dem Pegaſus iſt dem Aequator ganz nahe und heißt der ſüdliche Fiſch. Der andre ſchon ziemlich hoch nach Norden hinauf gleich unter der Andromeda heißt eben darum auch der nordliche Fiſch. Der helleſte Stern iſt nur von 3ter Gröſſe im Bande; hiezu kommen 6 von vierter Gröſſe, die übrigen ſind nur von 5ter und 6ſter Gröſſe.

I. Der Widder.

112. Dieſes Geſtirn, welches unter den Triangeln und der Fliege ſeine Stelle hat, iſt ſchon kenntlicher, als das vorige: es unterſcheiden ſich

vornemlich ein Stern von 2ter Gröſſe im Kopf an dem einen Horn, und einer von 3ter Gröſſe am andern Horn, auch noch zwey andre von 4ter Gröſſe. Um die Zeit, als die Zodiacalgeſtirne ihre Nahmen erhalten haben, iſt die Sonne am erſten Frühlingstage in dies Geſtirn des Widders getreten: daher zählt man es noch als das erſte hieher gehörige Geſtirn.

II. Der Stier.

113. Ein noch gröſſeres Geſtirn als der Widder. Der Kopf mit den Hörnern hat ſeine Stelle oſtwärts, die Hörner grade unter dem Fuhrmann, der übrige Theil, welcher auf den Himmelskugeln nur den halben Leib mit den Vorderfüſſen vorſtellet, unter dem Perſeus. Das Geſtirn ſelbſt iſt groß, und wegen vieler hell glänzender Sterne, wohin ein Stern erſter Gröſſe, einer von 2ter und 6 von 3ter Gröſſe gehören, leicht in die Augen fallend. Der Stern erſter Gröſſe ſteht nahe am Auge, und heißt auch das Stierauge, bey den Arabern Aldebaran, bey den Römern Palilicium. Der Stern zweyter Gröſſe ſteht im obern nordlichen Horn, und iſt zugleich der Fuß des Fuhrmanns: gleich darunter an der Spitze des ſüdlichen Horns ſteht ein heller Stern dritter Gröſſe. Nahe beym Aldebaran ſtehen im Kopfe noch 4 Sterne dritter Gröſſe, und alle 5 ſtellen die Figur eines liegenden lateiniſchen V vor, wovon die Spitze gegen Weſten dem Widder, die Oefnung aber gegen Oſten den Hörnern des Stiers zugekehrt iſt. Sie heiſſen Hyades, die Regenſterne. (Ovid. Faſtor. Lib. V. v. 165.) Oben im Rücken, etwas mehr nach Weſten grade unter dem Fuß des Perſeus ſteht das bekannte Siebengeſtirn, wel-

welches auch die Nahmen Plejades, (von $\pi\lambda\epsilon\omega$, ſchiffen,) Atlantides, (Töchter des Atlantis, die er mit der Plejone erzeugt hat) vergiliae, führen. Der letzte Nahme kommt daher, weil ſie vormahls zu Rom am Ende des Frühlings mit der Sonne zugleich aufgiengen. Der helleſte im Siebengeſtirn heißt auch die Klukhenne. M. ſ. von dieſem Geſtirn Ovid. Faſt. L. V. v. 605, Metam. Lib. I. v. 588.

III Die Zwillinge.

114. Wiederum ein groſſes mit vielen hellen Sternen prangendes Geſtirn, wovon ſich 3 von 2ter, 3 von 3ter, 9 von vierter Gröſſe beſonders unterſcheiden. Es ſoll die Zwillinge Caſtor und Pollux vorſtellen, die Jupiter zur Belohnung ihrer brüderlichen Liebe an den Himmel geſetzt hat. (Ovid. Faſt. Lib. V. v. 699.) In dem Kopf eines jeden ſteht ein Stern zweyter Gröſſe, wovon der weſtliche, welcher in der täglichen Bewegung voran geht, Caſtor, der öſtliche Pollux heißt. Die Füſſe erſtrecken ſich weſtwärts gegen die Stierhörner, und in Caſtors Fuſſe ſteht ein heller Stern dritter Gröſſe, im Fuſſe des Pollux der dritte Stern zweyter Gröſſe.

IV. Der Krebs.

115. Die Benennung rührt vermuthlich daher, weil vormahls die Sonne, wenn ſie vom Widder bis hieher im Thierkreiſe fortgerückt war, nun am längſten Tage ſich wieder gegen Süden wandte. Jetzt tritt die Sonne um die Zeit des längſten Tages allererſt in die Zwillinge. Das Geſtirn des Krebſes hat ſeine Stelle grade unter den Hinterfüſſen des Luchſes: es iſt nicht groß, und enthält nur

wenig kenntliche Sterne, 2 von 3ter, 3 von 4ter Gröſſe; die übrigen ſind alle kleiner: einer davon iſt ein neblichter Stern faſt in der Mitte des Geſtirns. Dieſer neblichte Stern heißt die **Krippe**, (praeſepe) gleich über und unter ihm ſteht ein Stern vierter Gröſſe, und beyde heiſſen Aſelli. (Es ſollen die Eſel ſeyn, die im Kriege der Götter wider die Rieſen durch ihr Geſchrey den Sieg der Götter befördert haben.) Einer von den Sternen dritter Gröſſe ſteht unten in der ſüdlichen Scheere, der andre weiter gegen Weſten am letzten ſüdlichen Fuß.

V. Der Löwe.

116. Wiederum eins der gröſten und ſchönſten Geſtirne mit vielen hellglänzenden Sternen. Unter dieſen ſind zwey Sterne erſter Gröſſe, zwey von zweyter, 6 von 3ter, 11 von 4ter Gröſſe. Die Abbildung iſt ſo, daß der Kopf mit den Vorderfüſſen gegen Weſten dem Krebs zugekehrt iſt, der Schwanz mit den Hinterfüſſen gegen Oſten. Grade oberhalb dieſes Löwen ſteht der groſſe Bär, und zwiſchen beyden der kleine Löwe Hevelii, der auch daher ſeinen Nahmen erhalten hat. Von den Sternen erſter Gröſſe ſteht einer vorn an der Bruſt, und heißt das **Löwenherz**, auch **Regulus**: der andre ſteht im Schwanze, und heiſſet cauda Leonis. Ueber dem Regulus ſteht im Halſe der Stern zweyter Gröſſe, nahe über und unter ihm ſteht ebenfalls im Halſe ein Stern 3ter Gröſſe. Zwey andre von dritter Gröſſe ſtehen im Hintertheil des Leibes, einer über dem andern. Der obere von dieſen beyden der helleſte im Halſe, und die beyden Sterne erſter Gröſſe bilden ein groſſes Viereck beynahe in der Figur ei-

nes

nes Trapezii, wovon die gröſſere Grundlinie die untere iſt zwiſchen den beyden Sternen erſter Gröſſe.

VI. Die Jungfrau.

117. Auch dies Geſtirn iſt eines der gröſten, und es ſtellet eine Jungfrau mit Flügeln vor, welche nach einigen Poeten Aſträa, die Göttin der Gerechtigkeit seyn ſoll: nach andern aber iſt es die Ceres. Der Kopf liegt gegen Weſten am Löwen, die Füſſe gegen Oſten, und das Geſtirn nimmt den ganzen Raum unter dem Haupthaar der Berennice, und dem Bootes ein. Einer von den dazu gehörigen Sternen iſt von erſter Gröſſe, 6 ſind von 3ter, und 6 von 4ter Gröſſe. Im nordlichen Flügel, 12° vom Aequator entfernt, ſteht ein heller Stern dritter Gröſſe, der Vindemiatrix, Protrygeres, heißt. Auf der andern ſüdlichen Seite des Aequators 10° davon entfernt ſteht der Stern erſter Gröſſe, der die Kornähre, (Spica virginis) heißt, welche die Jungfrau in der Hand hält. Zwiſchen dieſen beyden ſtehen 3 Sterne 3ter Gröſſe dem Aequator ganz nahe, faſt in grader Linie von Weſten nach Oſten, und etwas höher noch ein vierter von denen, die zur 3ten Gröſſe gehören. Der ſechſte ſteht oben am ſüdlichen Flügel nahe beym hinterſten Fuß des Löwen.

Der ſüdliche Theil des Thierkreiſes.

118. Dieſer fängt mit der Wage unter dem Berge Moenalus an zunächſt an der Schlange, und läuft unter dem Schlangenmann mit der Schlange, dem Antinous, und beyden Pferden herum wieder bis an die Fiſche unter dem Pegaſus.

VII. Die Wage,

nur ein kleines Geſtirn, wozu 2 Sterne von zweyter Gröſſe, einer von 3ter, und 4 von 4ter Gröſſe gehö-

gehören, die es ziemlich kenntlich machen. Von den beyden hellen Sternen zweyter Gröſſe ſteht einer nordwärts der Ecliptik am Ruhepunct der Wage, der andre in der einen Schale faſt grade in der Ecliptik. Der Stern 3ter Gröſſe ſteht nicht weit davon ſchon ſüdwärts der Ecliptik.

VIII. Der Scorpion.

119. Dies ziemlich groſſe Geſtirn enthält einen Stern von erſter Gröſſe, 3 von zweyter Gröſſe, 7 von 3ter Gröſſe, auch 2 neblichte Sterne. Es hat ſeine Stelle grade unter dem Schlangenmann, ſo daß der Schwanz in der Milchſtraſſe liegt, und wegen der vielen Sterne würde es ſehr kenntlich ſeyn, wenn es nicht immer dem ſüdlichen Horizont ſehr nahe wäre: da dann gemeiniglich die Dünſte den Glanz der Sterne ſchwächen. Der Stern erſter Gröſſe ſteht in der Mitte des Leibes unter dem weſtlichen Fuß des Schlangenmannes, und heißt das Scorpionherz, Antares, beym Sophokles Vespertilio. Von den 3 Sternen zweyter Gröſſe, ſteht der eine in der Stirn, der andre im Schwanz, der dritte im Stachel am Ende des Schwanzes. Die Sterne im Schwanz ſtehen im Bogen, der die hohle Seite oben, die erhabene Seite unten hat: aber die unterſte Krümme erſtreckt ſich ſchon über 40° ſüdwärts des Aequators, und geht bey uns gar nicht auf. Der eine neblichte Stern ſteht im Schwanze, der andre ſeitwärts des Stachels in der Milchſtraſſe.

IX. Der Schütze.

120. Es ſoll den Crotus, einen Sohn der Euphemis, welche die Muſen erzogen haben, vorſtellen, der ſehr ſcharfſinnig, und zugleich ein guter Jäger ge-

geweſen. Dies Geſtirn hat ſeine Stelle unter dem Sobieskiſchen Schilde und dem Antinous, dabey iſt es zwar ziemlich groß, erſtreckt ſich aber wie der Scorpion ſo weit nach Süden, daß es bey uns nicht ganz aufgeht. Drey Sterne von dritter, und 12 von vierter Gröſſe, ſind die helleſten darin. Pfeil und Bogen ſtehen noch in der Milchſtraſſe, der übrige Theil weiter oſtwärts.

X. Der Steinbock.

121. Ein kleines nicht ſehr kenntliches Geſtirn unter dem Pfeil und Bogen des Antinous. Unter den Sternen, die dazu gerechnet werden, ſind 4 von 3ter, 2 von 4ter Gröſſe. Auſſerdem ſind 3 neblichte Sterne merkwürdig, die neben einander im Kopf ſtehen. Grade darüber ſtehen 2 von den Sternen 3ter Gröſſe über einander. Die beyden andern ſtehen neben einander im Schwanz ſchon unter dem kleinen Pferde. Uebrigens iſt dies Geſtirn dem Aequator ſo nahe, daß es ganz über unſern Horizont kommt.

XI. Der Waſſermann.

122. Ein groſſes Geſtirn, das gleich unter dem kleinen Pferde und dem Kopf des Pegaſus ſteht, und ſich tief herunter nach Süden erſtreckt: doch ſind unter den dahin gehörigen wenige hellglänzende Sterne, wenn auſſer 4 Sternen 3ter und 7 von 4ter Gröſſe auch ein Stern erſter Gröſſe ausgenommen wird, der jedoch wegen ſeiner ſüdlichen Abweichung von beynahe 31 Graden uns im Süden nur wenig zu Geſichte kommt. Das Geſtirn ſtellt man als eine männliche Figur vor, die aus einen Kruge Waſſer gießt. Das Waſſer, worin die meiſten Sterne ſtehen; fließt nach Süden herab, und unten wo ſich das

das Waſſer endiget, ſteht der Stern erſter Gröſſe, welchen die Araber Fomahant, Fiſchmaul nennen. Hier gränzt nemlich mit dem Waſſermann ein Geſtirn ſüdwärts des Thierkreiſes, das unten unter dem Nahmen des ſüdlichen Fiſches vorkommen wird: in deſſen Maul ſteht Fomahant, und wird daher von einigen nicht zum Waſſermann gerechnet.

Die ſüdliche Halbzone.

123. Dieſe fängt grade unter den Fiſchen an, läuft unter dem nordlichen Theil des Thierkreiſes herum bis unter der Kornähre der Jungfrau, und es gehören dahin neun alte Geſtirne auſſer 2 neuern. Hier bemerkt man am beſten, daß Ptolemäus im Almageſt 48 Geſtirne zähle, nemlich die oben beſchriebenen 21 Geſtirne nordwärts des Thierkreiſes, 12 Zodiacalgeſtirne, und 15 ſüdliche an der Südſeite des Thierkreiſes.

I. Der Wallfiſch,

ein groſſes Geſtirn unter den Fiſchen bis unter den Kopf des Widders. Drey Sterne von 2ter, 9 von 3ter, 10 von vierter Gröſſe, zeichnen es ſehr deutlich aus. Die von 2ter Gröſſe ſtehen beynahe in grader Linie. Der erſte am meiſten weſtliche im Schwanze mit einer Abweichung von beynahe 20°, die übrigen beyden im Halſe und im Kinnbacken, der erſte noch unter, der andre ſchon über dem Aequator.

II. Der Fluß Eridanus.

124. Auch dies Geſtirn erſtreckt ſich durch einen groſſen Raum unterhalb des Aequators gegen Süden. Die Figur iſt ſo, daß ſich ein Arm vom Wallfiſch oſtwärts bis an das nächſtfolgende Geſtirn, den Orion, erſtreckt: ein andrer Arm läuft von den Füſſen des Wallfiſches gegen Oſten, macht

aber darauf eine Wendung wieder nach Weſten, und läuft zugleich tief nach Süden herab. Unter den hieher gehörigen Sternen iſt einer von erſter Gröſſe, der Acarnar heißt, unten am ſüdlichen Ende mit einer Abweichung von beynahe 60°, der alſo bey uns gar nicht aufgehet. Unter den übrigen ſind 8 von 3ter, 20 von 4ter Gröſſe. Vier von den Sternen 3ter Gröſſe ſtehen im obern Arm neben den Füſſen des Wallfiſches beynahe in grader Linie von Weſten nach Oſten.

III. Orion.

125. Dies groſſe Geſtirn fällt aus mehr als einer Urſache prächtig ins Auge: einmahl enthält es ſelbſt eine ziemliche Anzahl recht hell glänzender Sterne, und zweytens hat es ſeine Stelle in einer Gegend des Himmels, die auch ſonſt die reichſte an hellglänzenden Sternen iſt. Orion ſteht nemlich grade unter den Hörnern des Stiers, ſein Kopf zwiſchen den Füſſen des Stiers und der Zwillinge. Oben über den Hörnern des Stiers ſteht das ſchöne Geſtirn des Fuhrmanns, der Stier ſelbſt auf der Weſtſeite, und die Zwillinge auf der Oſtſeite, prangen insgeſammt mit hellglänzenden Sternen. Dazu kommt noch der Umſtand, daß dieſe Gegend des Himmels in den Wintermonaten über dem Horizont iſt, da dann bey heiterer Froſtluft die Sterne ohnehin ſtarck glänzen. Zum Orion gehören als die helleſten 2 Sterne erſter Gröſſe, 4 von 2ter, 4 von 3ter, 9 von 4ter Gröſſe. Einer von den Sternen erſter Gröſſe in der lincken Schulter heiſſet Bellatrix, er ſteht mit den beyden Stierhörnern in grader Linie: der andre heißt Rigel Orionis, und ſteht im rechten Knie. Von den 4 Sternen

zweyter Gröſſe ſteht einer in der rechten Schulter mit dem Siebengeſtirn und Aldebaran in grader Linie, die übrigen 3 ſtehen gleich neben einander im Gürtel und werden zuſammen auch wohl der Jacobsſtab, von einigen die heil. drey Könige genannt. Alle vier Sterne der 3ten Gröſſe ſtehen gleich darunter in grader Linie, die drey obern im Schwerdt, der untere im lincken Knie. Im Schilde, welches Orion in der rechten Hand hält, ſtehen mehrere Sterne 4ter und 5ter Gröſſe in Form eines Kreisbogens.

IV. Der Haſe.

126. Ein kleines Geſtirn unter dem Orion, worin ſich nur 4 Sterne dritter, und 7 von vierter Gröſſe auszeichnen. Einer von den helleſten ſteht nahe am Halſe, der andre im Fuſſe, nicht weit unter dem vorigen. In jedem Ohr ſtehen 2 kleine Sterne über einander, einer im Kopfe.

An der Oſtſeite vom Orion iſt ein ziemlich geräumiger Plaz unter den Zwillingen, in der Milchſtraſſe, auch noch etwas weiter oſtwärts bis unter dem Krebs, woſelbſt die Alten kein Geſtirn hingeſezt hatten. Hieher hat Bartſchius ein neues Geſtirn geſezt.

1. Das Einhorn.

127. Dazu gehören nur wenig kenntliche Sterne, und die 6 helleſten ſind nur von 4ter Gröſſe. Gleich nach dem Haſen aber folgt in der täglichen Bewegung.

V. Der groſſe Hund, Sirius,

unter den Vorderfüſſen des Einhorns ſoweit nach Süden, daß der ſüdliche Wendekreis mitten hindurch läuft; oben aber über dem Rücken des Einhors ſchon nordwärts des Aequators unter dem Schwanz des Krebſes

VI. Der

VI. Der kleine Hund, Procyon

Von den zum groſſen Hunde gehörigen Sternen iſt einer als der ſchönſte Stern erſter Gröſſe merkwürdig, der Sirius heißt, wovon auch des ganzen Geſtirn den Nahmen führt. Weiter gehören dahin 5 von zweyter Gröſſe, einer im rechten Vorderfuſſe, zwey im Rücken und zwey im Schwanze. Unter den übrigen ſind 1 von 3ter, 5 von 4ter Gröſſe.

Zum kleinen Hunde gehört ebenfalls ein Stern erſter Gröſſe, der wie das ganze Geſtirn Procyon heißt, auch überdem noch 1 Stern, von 3ter Gröſſe: die übrigen ſind nur von 5ter und ſechſter Gröſſe. Der Stern erſter Gröſſe iſt mit den beyden Schultern Orions beynahe in grader Linie.

VII. Die Waſſerſchlange, und über ihrem Schwanze

VIII. Der Becher und

IX. Der Rabe.

128. Alle drey Geſtirne haben einen gemeinſchaftlichen Urſprung von einer Fabel, die Ovid erzählt. Lib. II. Faſt. v. 243. Die Waſſerſchlange ſelbſt liegt noch mit dem Kopfe unter dem Krebſe, und erſtrekt ſich unter dem Löwen und der Jungfrau anſehnlich weit gegen Oſten. Unter den hieher gehörigen Sternen iſt einer von erſter Gröſſe, der doch nur ein mattes Licht hat, auch eben darum von einigen nur als ein Stern zweyter Gröſſe gezählt wird: er heißt das Herz der Waſſerſchlange. Er ſteht mit den beyden vordern im Viereck des Löwen beynahe in grader Linie. Weiter zählt man 2 Sterne von 3ter und 11 von vierter Gröſſe. Einer von den helleſten ſteht in der unterſten ſüdlichen Krümme 30° vom Aequator, der andre im Schwanz unter der Kornähre der Jungfrau, dem Aequator um 8 bis 9° näher.

Der Becher zwiſchen der Schlange und den Hinterfüſſen des Löwen, enthält nur 11 Sterne, 9 von 4ter, 2 von 6ſter Gröſſe.

Zum Raben zwiſchen der Jungfrau und dem Schwanz der Waſſerſchlange, rechnet man 7 Sterne, 4 von 3ter Gröſſe, 1 von 4ter, 2 von 5ter Gröſſe. Zwiſchen dem Herzen der Waſſerſchlange und dem Löwen hat Hevel 12 kleine Sterne 5ter und 6ſter Gröſſe in ein Geſtirn gebracht, das er

2. Den aſtronomiſchen Sextanten

nennt. Es ſoll das Andenken ſeines eigenen Sextaten erhalten, womit er 21 Jahre die Fixſterne beobachtet hatte, als am 26 September die heftige Feuersbrunſt in Danzig ausbrach, und dieſer Sextante mit dem Wohnhauſe Hevelii und andern Werkzeugen auch Büchern und Handſchriften von ſehr groſſen Werth ein Raub der Flamme ward.

Die ſüdliche Hauptzone.

129. Auſſer den bisher beſchriebenen IX ſüdlichen Geſtirnen bemercke man nach dem Ptolemäus noch folgende ſechs Geſtirne nach der Ordnung der täglichen Bewegung.

X. Das Schiff Argo

unter den Hinterfüſſen des Einhorns gleich oſtwärts des Sirius, und weiter gegen Oſten unter der erſten Hälfte der Waſſerſchlange. Im Ruder dieſes Schiffes iſt der Stern erſter Gröſſe Canopus merkwürdig, er geht aber bey uns nicht auf, weil er zu weit vom Aequator nach Süden hin entfernt iſt. Sechs dahin gehörige Sterne zweyter Gröſſe gehen ebenfalls bey uns nicht auf. Bayer hat darin 57 Sterne bezeichnet. H. de la Caille, von deſſen Beobachtungen bald weiter Nachricht ertheilt wird, zählt 162.

XI. Der Centaur,

unter dem Schwanze der Waſſerſchlange, enthält viele hellglänzende Sterne, und unter denſelben einen oder nach andern Verzeichniſſen zwey Sterne von erſter Gröſſe: allein die helleſten bleiben unter unſerm Horizont.

XII. Der Wolff

am Spieſſe des Centaurs. Unter 31 dahin gehörigen Sternen ſind 4 von 3ter Gröſſe, die auch nicht über unſern Horizont herauf kommen.

XIII. Der Altar,

ein kleines Geſtirn etwas höher gegen den Aequator zu, mit 17 Sternen, nach de la Caille, worunter 3 von dritter Gröſſe ſind.

XIV. Die ſüdliche Krone,

noch etwas höher gleich neben den Vorderfüſſen des Schützen, ebenfalls nur klein. Unter 11 dahin gehörigen Sternen übertrift keiner die 5te Gröſſe.

XV. Der ſüdliche Fiſch,

gleich unter dem Waſſer des Waſſermannes. Auſſer dem Fomahant, (122. §.) nur 14 Sterne 5ter und 6ſter Gröſſe.

130. Seit etwa 200 bis 250 Jahren haben geſchickte Seefahrer auf den Reiſen nach ſüdlichen Gegenden noch folgende neue Geſtirne an die Himmelskugel gebracht.

1. Der Indianer unter den Hinterfüſſen des Schützen, 2. der Kranich unter dem ſüdlichen Fiſch, 3. die Amerikaniſche Gans und 4 der Phönix unter dem Schwanz des Wallfiſches, neben und über der unterſten Gränze des Eridanfluſſes, wo Acarnar ſteht. 4. Der Schwerdtfiſch, Dorado, nahe am Schiff Argo, 6. der fliegende

Fiſch unter dem Schiff Argo, 7. der ſüdliche Triangel unter dem Altar, 8. der Pfau gleich neben dem Indianer.

Südliche Circumpolargeſtirne

9. die männliche Waſſerſchlange, unter dem Phönix und der Gans: grade gegen über auf der andern Seite des Pols 10. der Cameleon, 11. die Fliege, 12. der Paradiesvogel.

131. Zu dieſen ſüdlichen Geſtirnen iſt noch eine Menge andrer gekommen. Vom H. Halley hat man ein Verzeichniß ſüdlicher Sterne aus Beobachtungen, die er im Jahr 1677 auf der Inſel St. Helene anſtellte: er brachte einige Sterne an der Oſtſeite des Schiffes Argo in ein Sternbild, und nannte es die Eiche Carls II. Auguſtin Royer ſetzt in ſeinen Himmelscharten die Taube des Noah gleich unter den Haſen, das Kreuz unter den Centaur in der Milchſtraße, welches die Engelländer the Croſiers oder Croziers nennen. Ferner nannte er einen Haufen neblichter Sterne nahe beym Polarkreiſe neben dem Schwerdfiſch die groſſe Wolke, einen andern kleinen Hauffen ſolcher Nebelſterne neben dem Schwanz der männlichen Waſſerſchlange ohngefehr 14° vom Pol die kleine Wolke. Von dieſen beyden Wolken iſt noch eine dunkelſchwarz ſcheinende Stelle zu unterſcheiden, die ſich in dem öſtlichen Theil des Kreuzes befindet, und nach allen Seiten im Durchſchnitt faſt 3 Grade beträgt. H. de la Caille, (Memoires de l'Acad. de Paris A. 1755 pag. 199 der fr. 296. der holl. A.) und nach ihm H. de la Lande, (Aſtronomie Tom. I. §. 842, pag. 331.) ſagen, die erwehnte dunkle Stelle werde von der leb-

haf-

haften Weiſſe der Milchſtraſſe in dieſer Gegend verurſachet, welche jene dunkle Stelle von allen Seiten umgiebt. Unſer Herr Profeſſor Forſter aber, welcher auf ſeinen Reiſen dieſe merkwürdige Stelle am Himmel ſelbſt geſehen hat, hält die vom H. de la Caille angegegebene Urſache nicht für völlig befriedigend. Die Stelle iſt ſo ſehr ſchwarz, daß daher die Engelländer ihr den Nahmen the Coalbag, der Kohlenſack, gegeben haben. In unſers H. Prof. Freylingshauſen neuerer Geſchichte der Mißionsanſtalten zur Bek. der Heid. in Oſtindien, 18 Stück 1779, iſt ein Brief eines Herrn Gerlach an H. Prof. Kratzenſtein in Copenhagen, aus Tranckeobar vom 30ſten Januar 1778, abgedruckt, und in demſelben wird auf der 727 S. zweyer dunkler Capflecken erwehnt, die von dem übrigen Himmel ſo merklich abſtechen ſollen, daß man ſie beym erſten Anblick für ſchwarze Wolken anſehen möchte; der eine ſoll ſeine Stelle zunächſt untern den Aeſten der Carlseiche, der andre im Kreuze haben. Die groſſe und kleine Wolke werden hier die weiſſen Capflecken genannt.

Nach der Herren de la Caille und de la Lande Beſchreibung würde man hier nur einen ſolchen ſchwarzen Flecken vermuthen. Vermöge einer von unſerm Herrn Profeſſor Forſter mir darüber gegebenen Erläuterung ſiehet man würklich zwey ſolche ſchwarze Flecken, (the great and the little Coalbag.) Der eine in der Carlseiche iſt anſehnlich gröſſer und viel dunkler, als der andere, welcher ſich zwiſchen den Sternen des Kreuzes befindet: daher pflegt man nur auf den groſſen Fleck vorzüglich acht zu geben.

Als

Als H. de la Caille in den Jahren 1751 — 1754 auf dem Vorgebürge der guten Hofnung aſtronomiſche Beobachtungen anſtellte, ſetzte er noch 14 Geſtirne an die ſüdliche Halbkugel jenſeits des ſüdlichen Wendekreiſes. Er ſelbſt giebt die erſten Nachrichten davon in den Memoires de l'Acad. de Paris A. 1752, pag. 539 der Pariſer und p. 821 der holl. Ausgabe, in dem Aufſatz. Table des Aſcenſions droites et des declinaiſons apparents des etoiles auſtrales renfermées dans le tropique de capricorne, obſervées au Cap de bonne eſperance, dans l' intervalle du 6 Aout 1751 au 18 Juillet 1752, avec Remarques ſur ce Catalogue. Von dieſen Geſtirnen ſtehen 12 zwiſchen dem Wendekreiſe und Polarkreiſe nach der graden Aufſteigung in folgender Ordnung. Ueber dem Schiff Argo 1. die Bouſſole, weiter nach Oſten unter der Waſſerſchlange 2. die Luftpumpe, vor dem Centaur und Wolff in der Milchſtraſſe nahe am Polarkreiſe 3. das Cirkelinſtrument, etwas höher gegen den Wendekreis 4. das Lineal und Winkelhaken. Ferner zwiſchen dem Altar und der Krone 5. das Teleſcop, oſtwärts des Schützen 6. das Microſcop, oſtwärts des ſüdlichen Fiſches über dem Kranich und Phönix 7. die Bildhauerwerkſtatt, und in der unterſten Krümme des Eridanfluſſes 8. der Chymiſche Ofen. Weiter nahe am Polarcirkel beym Kopf der männlichen Waſſerſchlange 9. die Pendulubr, und oſtwärts gleich daneben, 10. das aſtronomiſche Netz, (M. ſ. unten den 133. §.) höher gegen den Wendecirkel zwiſchen dem Eridan und der Taube 11. die Grabſtichel, nahe am Schiff Argo über dem Schwerdfiſch 12 die Mahlerſtaffeley

mit

mit dem Farbenbrett. Innerhalb des Polarkreiſes ſtehet 13 der Tafelberg unter der groſſen Wolke, und 14 der Seeoctant am nächſten beym Südpol.

132. Statt der oben im 85. §. angeführten gröſſern zum Theil koſtbaren Werke dienen den Liebhaber der Sternkunde auch kleine Handbücher, und ſolche Sterncharten, die nach den Regeln perſpectiviſcher Zeichnungen jede Halbkugel, die nordliche für ſich, und eben ſo die ſüdliche für ſich auf einer Charte vorſtellen. Im Jahr 1764 hat H. Robert Raugondy zu Paris zwey ſolche in Kupfer geſtochene Planiſphären bekannt gemacht, welche auf der ſüdlichen Halbkugel ſchon alle neu hinzugekommene Sternbilder enthalten. Auch hat man zwey Paar ſolche Planiſphären von Senex in London. Auf dem einen Paar ſind die Halbkugeln nordwärts und ſüdwärts des Aequators auf dem andern Paar nord- und ſüdwärts der Ecliptik vorgeſtellet. Nach Art der Raugondiſchen hat Herr Profeſſor Funk in Leipzig vor kurzen zwey Planiſphären ſtechen und zugleich ein kleines Handbuch unter dem Titel drucken laſſen: Anweiſung zur Kenntniß der Geſtirne auf zwey Planiglobien, und zween Sternenkegeln nach Bayern und Raugondy. Leipzig 1777. Herrn Bodens Anleitung zur Kenntniß des geſtirnten Himmels iſt zum erſtenmahl in Hamburg 1772 zum zweytenmahl in Berlin 1777 herausgegeben. Aeltere Handbücher ſind: M. Chriſt. Gottl. Semlers, Aſtrognoſia nova, oder ausführliche Beſchreibung des ganzen Fixſtern und Planetenhimmels, mit 35 Figuren der Sternbilder Halle 1742. Wiede-

burg Einleitung zur Aſtrognoſie nach den Homanniſchen Himmelscharten. Jena 1745.

Die 25. Erklärung.

133. Das aſtronomiſche Fadennetz beſtehet aus einigen ſehr zarten Fäden, die im Sternrohr an der Stelle, wohin das vom Objectivglaſe verurſachte Bild fällt, mit den Gläſern parallel ſo ausgeſpannt werden, daß ſie hiernächſt dienen können, die Lage zweyer Fixſterne, oder ſonſt zweyer kenntlichen Puncte am Himmel, gegen einander durch Beobachtung

227 Fig. zu finden. Wenn es zweene Fäden AB und DE ſind, die ſich im Mittelpunct C des Geſichtsfeldes ſenkrecht ſchneiden; ſo giebt man dem Sternrohr die Lage, daß der eine zu beobachtende Punct am Himmel in ſeiner täglichen Bewegung beſtändig den einen Faden AB berühre: alsdenn ſtellt dieſer Faden einen kleinen Theil vom Parallelkreiſe, der andre DE einen Theil des Stunden- oder Abweichungskreiſes vor. Um deßwillen heißt auch AB der **Parallelfaden**, DE der **Stundenfaden**. Auſſer den auf einander ſenkrechten Fäden AB, DE, dienen auch noch ein Paar ſchiefe Fäden, wie FG und HI, welche die vorigen in C unter Winkeln von 45° ſchneiden. Oder

228 Fig. man legt auch vier ſchiefe Fäden ſo, wie es die 228 Figur vorſtellet, in die Lage DF, DG, EF, EG, ſo daß $CF = CG = \frac{1}{2} CD$ genommen, und das Viereck DFEG eine Raute wird.

Der 1. Zuſatz.

134. Die Zeit zwiſchen den Durchgängen zweener Fixſterne durch den Stundenfaden DE in Bogen des Aequators verwandelt giebt den Unterſcheid der Rectaſcenſion beyder Sterne. Hat man dem Fernrohr die Stellung gegeben, daß ein Stern deſ-

ſen

ſen Declination und Rectaſcenſion bekannt iſt, an dem Faden AB hinſtreicht, wenn ein andrer im Fernrohr den Weg KL zu nehmen ſcheint: ſo bemerke man die Zeit zwiſchen den Augenblicken, wenn der letztere den Stundenfaden DE in M, und den ſchiefen Faden HI in L zu berühren ſcheint. Dieſe Zeit in Grade verwandelt giebt die Grade für den Bogen des Parallelkreiſes, welchen ML vorſtellet. Wenn nun in der 224 Fig. der kleine Bogen Zζ des Parallelkreiſes WζZ denjenigen vorſtellet, welchen ML im Fernrohr deckt; ſo hat man vermöge des beſchriebenen Verfahrens die Grade des Winkels ZKζ.

227 Fig. 224 Fig.

Daraus findet man $ZC\zeta = \frac{KZ}{CZ} \cdot ZK\zeta$, (§. Opt.)

und es iſt $\frac{KZ}{CZ}$ = dem Coſinus der Declination des Parallelkreiſes WZ, wenn der ganze Sinus = 1 geſetzt wird. Weil nun im Fernrohr MCL = CLM = 45° alſo ML = CM iſt; (72. §. Geom.) ſo findet man ſolchergeſtalt den Bogen CM in Graden, als die Differenz der Declination beyder Sterne. Dieſe iſt, der Vorausſetzung gemäß, ſehr klein: alſo kann man ohne merklichen Fehler bey der Rechnung den Coſinus der Declination des am Faden AB hinſtreichenden Sterns brauchen. 227 Fig.

Der 2. Zuſatz.

135. Hat das Netz die Geſtalt der Raute, ſo ſtelle IK den Weg vor, welchen der Stern, deſſen Stelle am Himmel noch nicht bekannt iſt, im Fernrohr zu nehmen ſcheint, wenn der andre den Weg FG nimmt. Hier iſt cD = 2CF = FG, alſo HD = 2HI = IK. Aus der Zeit der Bewegung des 228 Fig.

einen Sterns von F bis G findet man nach der im vor. §. gegebenen Regel FG = CD in Graden des Declinationskreiſes, und eben ſo auch IK = DH: mithin ferner CH = CD − CH, als die Differenz der Declination.

Die 26. Erklärung.

136. Das Micrometer iſt an ſich eine ähnliche Anordnung an der Stelle des Bildes im Sternrohr wobey man zur Abſicht hat, kleine Bogen gröſter Kreiſe am Himmel, dergleichen unter andern die ſcheinbaren Durchmeſſer der Planeten ſind unmit-
227 telbar zu meſſen. Auſſer den beyden auf einander
Fig. ſenkrechten Fäden AB, DE, wird ein dritter KL in die mit AB parallele Lage gebracht, und alles ſo eingerichtet, daß man vermittelſt einer feinen Schraube die Entfernung zwiſchen beyden Fäden nach Gefallen verändern kann, ohne die parallele Lage zu verrücken. So kann man jedesmahl wiſſen, um wie viele Schraubengänge die Fäden von einander entfernt ſind. Man ſucht alsdenn nur für einen Fall in einer bekannten Entfernung CM der Fäden den mit dem kleinen Bogen CM zuſammengehörigen Winkel: ſo giebt die Regel Detri in jedem andern Fall, wenn auf CM mehr oder weniger Schraubengänge kommen, den dazu gehörigen Winkel.

Zuſatz.

137. Mehrerer Bequemlichkeit halber kann man ſich ein für allemahl eine Tabelle darüber berechnen, aus welchen man die Werthe der Schraubenrevolutionen, in Secunden des gröſten Kreiſes der Himmelskugel ausgedrückt, jedesmahl nur abſchreiben darf. Das Micrometer dient alsdenn auch um deſto kürzer, kleine Differenzen der Declinationen zweyer Sterne zu meſſen.

Die

Die 27. Erklärung.

138. Die Ellipſe iſt eine krumme Linie AMDBE, welche zweene Puncte F und G, die man Brenn-puncte der Ellipſe nennt, in einer Ebene ſo umgiebt, daß die Summe der Entfernungen MF und MG eines jeden Puncts M in der Peripherie von den Brennpuncten von beſtändiger Gröſſe iſt. Die grade Linie AB durch beyde Brennpuncte bis an die Ellipſe gezogen heißt die Zwergaxe, die Mitte C dieſer Zwergaxe der Mittelpunct der Ellipſe, und eine andre durch C auf AB ſenkrecht geſetzte bis an die Ellipſe in D und E verlängerte grade Linie DE wird die zugeordnete Axe genannt. 229 Fig.

Der 1. Zuſatz.

139. Die Brennpuncte ſind gleichweit vom Mittelpunct C entfernt. Denn es iſt $FM + GM = FA + GA = FG + 2GA$, und eben ſo $FM + GM = FG + 2FB$. Daraus folgt $GA = FB$, alſo auch $CG = CF$.

Der 2. Zuſatz.

140. Die Summe der Entfernungen $FM + GM$ iſt der Zwergaxe AB gleich. Denn man findet $FM + GM = FG + 2GA = 2(CG + GA) = 2CA = AB$.

Anmerkung.

141. Wenn TV die Ellipſe in M berührt, ſo ſind die Winkel FMT, GMV gleich groß, welches die höhere Geometrie beweiſet. Strahlen alſo, die aus einem leuchtenden Punct in F ausgingen, würden vom innern Umfange der Ellipſe nach den Punct G zurück geworfen werden. Daher kommt es, daß F und G Brennpuncte heiſſen.

Die 7. Erfahrung.

142. Die eigene Bewegung der Sonne in der Ecliptik iſt nicht in dem Sinne gleichförmig, daß ſich

ſich in gleichen Zeiten ihre Länge (41. §.) um gleich viele Grade änderte. Mitten im Sommer bald nach dem längſten Tage, legt die Sonne in der Ecliptik täglich einen Bogen von 57 Min. 12 Sec. zurück, und von dieſer Zeit an nimmt die Geſchwindigkeit dieſer täglichen Bewegung nach und nach zu, bis ſie bald nach dem kürzeſten Tage täglich einen Bogen von 1° 1′ 12″ zurück legt. Hiernächſt nimmt die Geſchwindigkeit der Bewegung in umgekehrter Ordnung wieder ab. Daher kommt es, daß die Zeit von der Frühlingsnachtgleiche am 20ſten März bis zur Herbſtnachtgleiche am 22ſten September um ſieben bis acht Tage länger iſt, als die Zeit vom 22ſten Sept. bis wieder zum 20ſten März. Den ſcheinbaren Durchmeſſer der Sonne findet man am kleinſten, wenn ihre Bewegung am langſamſten iſt, er beträgt alsdenn 31 Min. 33,8 Sec. So lange die Geſchwindigkeit der Bewegung wächſt, ſo lange wächſt auch der ſcheinbare Durchmeſſer, bis er zuletzt bey der ſchnelleſten Bewegung 32 Min. 38,6 Sec. (M. ſ. die Berlinſchen Aſtron. Tafeln, 1 Band 263. S.) beträgt. In der Folge nimmt auch der ſcheinbare Durchmeſſer in umgekehrter Ordnung wieder ab. Uebrigens iſt die Länge der Sonne zu der Zeit, wenn ihr ſcheinbarer Durchmeſſer am gröſten iſt, allemahl um 180° von derjenigen unterſchieden, die man zu der Zeit beobachtet, wenn ſie den kleinſten ſcheinbaren Durchmeſſer hat.

Der 1. Zuſatz.

143. Die Sonnenbahn kann kein Kreis um die Erde als ihren Mittelpunct ſeyn, weil ſonſt der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne immer gleich

groß befunden werden müſte. Wenn indeſſen bey jeder Beobachtung, woraus man die Länge der Sonne durch Rechnung findet, zugleich ihr ſcheinbarer Durchmeſſer gemeſſen wird; ſo läßt ſich die ganze Sonnenbahn nach einem willkührlich gewählten Maaßſtabe zeichnen, weil man aus dem 15. §. Opt. weiß, daß ſich die ſcheinbaren Durchmeſſer der Sonne in umgekehrter Ordnung wie die jedermahligen Entfernungen der Sonne von der Erde verhalten.

Der 2. Zuſatz.

144. Die krumme Linie AMDBEA ſtelle die Sonnenbahn nur vorläufig, im ohngefehren Entwurf vor, und F ſey die Stelle der Erde. Ferner ſey A die Stelle der Sonne in ihrer gröſten Entfernung von der Erde, ſo muß eben dieſe grade Linie rückwärts nach B verlängert durch die Stelle der Sonne laufen, wo ſie ſich in ihrer kleinſten Entfernung von der Erde befindet. Man nehme alſo das Verhältniß FA : FB = dem Verhältniß des gröſten Sonnendurchmeſſers zum kleinſten, ſo iſt B die Stelle der Sonne in ihrer kleinſten Entfernung von der Erde. 229 Fig.

Die 28. Erklärung.

145. Die Stelle A der Sonne in ihrer gröſten Entfernung von der Erde heißt das Apogäum, oder die **Erdferne**, und die gegen über liegende Stelle B der Sonne in ihrer kleinſten Entfernung von der Erde nennt man das Perigäum, oder die **Erdnähe**. Beyde Puncte gemeinſchaftlich heiſſen die Apſiden, und die grade Linie AB die Linie der Abſiden. Die ſcheinbare Entfernung AFM der 229 Fig.

Sonne

Sonne in jeder Stelle M ihrer Bahn von der Erdferne nennt man die Anomalie der Sonne.

Der 1. Zuſatz.

146. Wenn die grade Linie FH in den Anfangspunct des Widders läuft, ſo iſt HFA die Länge der Erdferne, ſo wie HFM die Länge der Sonne. Um alſo die Anomalie der Sonne zu haben, muß man die Länge der Erdferne von der Länge der Sonne abziehen.

Der 2. Zuſatz.

147. Um ſo viele Puncte in der Sonnenbahn als man will zu finden, zeichne man den Winkel AFM ſo groß, als die Anomalie der Sonne, wie man ſie dem 146. §. gemäß aus einer Beobachtung findet, wobey zugleich der ſcheinbare Durchmeſſer der Sonne gemeſſen iſt. Ferner nehme man das Verhältniß FA : FM = dem Verhältniß des Sonnendurchmeſſers, welcher vermöge der Beobachtung mit der Anomalie der Sonne AFM zuſammen gehört, zu dem in A geſehenen Sonnendurchmeſſer: ſo liegt M in der Sonnenbahn.

Der 3. Zuſatz.

148. Sucht man auf dieſe Art ſo viele Puncte in der Sonnenbahn, als man nöthig hat, um dieſe Bahn durch ſelbige gehörig durchzuführen; ſo findet man, daß die Sonnenbahn eine Ellipſe, und die Erde in einem ihrer Brennpuncte befindlich ſey. Vermöge der im 142. §. angeführten Beobachtungen iſt AF : BF = 32′ 38,6″ : 31′ 33,8″ = 1958,6 : 1893,8, alſo AB : AF = 3852,4 : 1958,6. Man nehme CA = CB = 1, alſo AB = 2, ſo giebt die Regel Detri AF = 1,01682, mithin CF = AF – AC = 0,01682 = CG. Aus den Puncten

cten F und G als Brennpuncten kann nun dem 138. §. gemäß eine Ellipſe ſo beſchrieben werden, daß FM + GM allemahl = AB bleibt. Die höhere Geometri lehrt, wie für jeden Winkel AFM die Entfernung FM gefunden werden könne, und das iſt alsdenn zugleich allemahl diejenige, welche es vermöge des für dieſe Anomalie beobachteten ſcheinbaren Durchmeſſers der Sonne ſeyn muß.

Die 29. Erklärung.

149. Die Entfernung CF = CG der Brennpuncte vom Mittelpunct heißt die Excentricität der elliptiſchen Sonnenbahn. Weil ferner die halbe Zwergaxe CA zwiſchen der größten Entfernung FA und der kleinſten GA die mittlere arithmetiſche Proportionallinie iſt; ſo ſagt man, die Sonne ſey im mittlern Abſtande von der Erde, wenn ihre Entfernung der halben Zwergaxe ihrer elliptiſchen Bahn gleich iſt.

Der 1. Zuſatz.

150. Die Entfernung der Endpuncte D, E, der zugeordneten Axe von den Brennpuncten F, G, iſt der mittlern gleich. Denn es iſt FD + GD = 2AC, und FD = GD, (60. §. Geom.) alſo 2FD = 2AC, und ferner FD = AC = GD.

Der 2. Zuſatz.

151. Dieſemnach findet man die halbe zugeordnete Axe $CD = \surd(FD^2 + CF^2)$: (226. §. Geom.) und wenn ſich die Sonne in den Endpuncten dieſer zugeordneten Axe oder in ihrer mittlern Entfernung befindet, ſo iſt ihr ſcheinbarer Durchmeſſer = 32′2″.

Die 30. Erklärung.

152. Wenn man annimmt, daß die Sonne in Ruhe ſey, und die Erde jährlich einen Umlauf um

die

die Sonne mache; ſo iſt die (wirkliche oder vielleicht nur ſcheinbare) Erdbahn, AMDBE eine Ellipſe, die der bisher betrachteten Sonnenbahn gleich und ähnlich iſt, und die Sonne befindet ſich im Brennpunct F. Die übrigen Benennungen behält man alsdenn in einem ähnlichen Sinne für die Erdbahn bey, nur nennt man A das Aphelium, oder die Sonnenferne, und B das Perihelium, oder die Sonnennähe. Die Anomalie der Erde iſt alsdenn die Entfernung der Erde von der Sonnenferne in Graden gemeſſen, ſo wie ſie aus der Sonne geſehen wird.

Zuſatz.

153. Könnte man auf irgend eine Art die Sonnenparallaxe finden, wenn man zugleich für eben den Zeitpunct den ſcheinbaren Durchmeſſer der Sonne beobachtet hätte, ſo würde man die dermahlige Entfernung der Sonne von der Erde in halben Erddurchmeſſern finden können. Aus Vergleichung des zu gleicher Zeit beobachteten ſcheinbaren Durchmeſſers der Sonne mit ihrem mittlern ſcheinbaren Durchmeſſer (151. §.) könnte hiernächſt die mittlere Entfernung gefunden werden. Wird dieſe mittlere Entfernung der Erde von der Sonne = 1 geſetzt, ſo iſt nach H. de la Lande

Die gröſte Entfernung	1,016802
alſo die Excentricität	0,016802
und die kleinſte Entfernung	0,983198.

Die 28. Erklärung.

154. Zwey Sterne am Himmel, wenn fürjetzt unter dem allgemeinen Nahmen der Sterne auch Sonne und Mond begriffen werden, ſind mit einander in Zuſammenkunft, wenn ihre Länge gleich iſt, und

im Gegenſchein, wenn die Länge des einen von der Länge des andern um 180° verſchieden iſt. Beyde Fälle drücken die Aſtronomen auch mit dem einzigen Worte Sizygien aus. Auſſerdem ſagt man auch, der eine Stern ſtehe mit dem andern im Geviertſchein, oder Sextilſchein, nachdem der Unterſcheid ihrer Länge 90° oder 60° beträgt. Die verſchiedenenen Stellungen der Sterne, die eine eigene Bewegung haben gegen einander und gegen die Fixſterne nennt man auch überhaupt Aſpecten.

Die 8. Erfahrung.

155. Unter den fünf Planeten (30. §.) giebt es zweene, die immer in der Nähe der Sonne bleiben. Der eine, welcher Mercur heißt, hat zwar ein ziemlich ſtark glänzendes Licht, iſt aber doch ſehr klein, und dabey der Sonne immer ſo nahe, daß er um deßwillen in unſern Gegenden wenig geſehen werden kann. Er entfernt ſich nicht über 28° von der Sonne. Der andre heißt Venus, und hat vermuthlich dieſen Nahmen erhalten, weil er unter den Planeten gewöhnlich nicht allein die anſehnlichſte ſcheinbare Gröſſe hat, ſondern auch am ſchönſten glänzt. Er entfernt ſich höchſtens 47° von der Sonne. Er iſt Abendſtern, ſo lange ſeine Länge die Länge der Sonne ſoviel übertrift, daß er nach Untergang der Sonne am Horizont noch geſehen werden kann. Dagegen wird er Morgenſtern, wenn ſeine Länge kleiner als die Länge der Sonne wird. Beyder Planeten ſcheinbarer Durchmeſſer wächſt, wenn ſie ſich anfangs von Weſten gegen Oſten von der Sonne entfernen, und fährt fort zuzunehmen, wenn ſie gegen die Sonne wieder zurück kehren, bis ſie von neuen mit ihr in Zuſam-

menkunft ſind. Wenn ſie hiernächſt hinter der Sonne in Anſehung der Länge zurück bleiben, in welchem Fall Venus Morgenſtern iſt; ſo nimmt der ſcheinbare Durchmeſſer wieder ab bis zur folgenden Zuſammenkunft mit der Sonne. Noch iſt merkwürdig, daß Venus, wenn man ſie durch ein anſehnlich vergröſſerndes Fernrohr betrachtet, eben ſolche veränderliche Lichtgeſtalten wie der Mond zeigt: ihr heller Theil iſt wie beym Monde allemahl der Sonne zugekehrt. Endlich findet man auch dieſe Planeten gewöhnlich nicht in der Ecclíptik, ſondern ſeitwärts derſelben mit nördlicher oder ſüdlicher Breite, die jedoch nie über 7 Grade beträgt. Daher erſcheinen ſie auch nie in andern als in den Zodiacalgeſtirnen.

Der 1. Zuſatz.

156. Venus und Mercur gehen in Bahnen um die Sonne, welche nicht ſo groß, als die Erdbahn ſind, wofern es ſich beſtättigen ſollte, daß die Sonne ruhet, und die Erde jährlich einen Umlauf um die Sonne macht. Beyde Planeten ſind daher der Sonne näher, als die Erde, und ſie heiſſen um deßwillen die untern Planeten.

Der 2. Zuſatz.

157. Venus und Mercur kommen alſo bey jedem Umlauf um die Sonne einmahl dieſſeits der Sonne, und nach einem halben Umlauf wieder jenſeits der Sonne mit ihr in Zuſammenkunft. Jene nennt man die untere, und dieſe die obere Zuſammenkunft mit der Sonne.

Der 3. Zuſatz.

158. Weil Venus wie der Mond ab und zu nimmt, ſo folgt daraus, daß dieſer Planet für ſich dun-

dunkel ſey, und nur ſein Licht von der Sonne habe. Die beſten Fernröhre zeigen auch etwas ähnliches beym Mercur.

Der 4. Zuſatz.

159. Die Bahnen der Planeten Venus und Mercur liegen nicht mit der Erdbahn in einerley Ebene: denn ſonſt müſten ſie allemahl in der Ecliptik erſcheinen. Wenn ihre Bahnen mit der Ecliptik in einerley Ebene zuſammen fielen, ſo müſte jeder von dieſen Planeten bey jeder untern Conjunction wie ein runder ſchwarzer Flecken in der Sonne geſehen werden.

Die 9. Erfahrung.

160. Mercur iſt indeſſen wirklich ſchon mehreremahl, und Venus im Jahr 1639 am 24 November, im Jahr 1761 am 6 Junii, und im Jahr 1769 am 3 Junii auf die eben beſchriebene Art in der Sonne geſehen worden. Irren konnte man ſich bey dieſen Beobachtungen nicht, und vielleicht etwas anders für den Planeten halten: den ſie haben jedesmahl ihren Weg vor der Sonne vorbey völlig nach den Geſetzen genommen, die man vorher aus andern Beobachtungen gefolgert hatte

Zuſatz.

161. Venus und Mercur ſind alſo gewiß dunkle undurchſichtige Körper. Sie erſcheinen allemahl beſonders durch Fernröhre wie runde Scheiben, und ob dies gleich allein ihre Kugelgeſtalt nicht beweißt, ſo kommen doch noch mehr andre Gründe hinzu, weßwegen man ſie für Kugeln, oder wenigſtens kugel ähnliche Körper halten muß.

Die 10. Erfahrung.

162. Die übrigen drey Planeten kommen in jeden Aſpect mit der Sonne: ſie ſind jährlich einmahl

im Gegenſchein und einmahl in Zuſammenkunft mit der Sonne. Ihr ſcheinbarer Durchmeſſer iſt am kleinſten, wenn ſie mit der Sonne in Zuſammenkunft ſind, wächſet von der Zuſammenkunft bis zum Gegenſchein, und nimmt hiernächſt in umgekehrter Ordnung wieder ab. Einer von ihnen, der Mars heißt, glänzt mit einem röthlichen Licht und ſein ſcheinbarer Durchmeſſer iſt unter allen dreyen der ſtärkſten Veränderung unterworfen. Ein andrer hat vermuthlich wegen ſeiner anſehnlichen Gröſſe, und wegen ſeines ſchönen Glanzes, womit er der Venus nahe kommt, den Nahmen Jupiter erhalten. Der dritte heißt Saturn, ſein Lichte iſt blaſſer, als Jupiters Licht, auch unterſcheidet man ihn durch ein mittelmäßig gutes Fernrohr ſehr leicht von einem jeden der übrigen Planeten. Er zeigt alsdenn mancherley veränderliche Geſtalten, die ſich am beſten erklären laſſen, wenn man annimmt, er ſey mit einem flachen ebenfalls leuchtenden Ringe umgeben, der aber an keiner Stelle mit dem Planeten ſelbſt zuſammenhängt. Mars zeigt durch Fernröhre veränderliche Lichtgeſtalten, wie der Mond, Venus und Mercur. Uebrigens erſcheinen dieſe Planeten nur ſelten in der Ecliptik: ſie haben vielmehr gewöhnlich einige nördliche oder ſüdliche Breite, jedoch höchſtens nur ohngefehr von $2\frac{1}{2}$ Graden. Daher findet man ſie eben ſo wie die untern Planeten nie in andern als in den Zodiacalgeſtirnen.

Der 1. Zuſatz.

163. Mars, Jupiter und Saturn bewegen ſich in Bahnen um die Sonne, die gröſſer als die Erdbahn ſind: ſie können um deßwillen kurz die obern Planeten heiſſen.

Der 2. Zuſatz.

164. Mars muß wie die untern Planeten ein dunkler Körper ſeyn. Vom Jupiter und Saturn wird ſich eben das aus noch andern Gründen im folgenden beweiſen laſſen, woraus zugleich folgen wird, daß die Geſtalt der obern Planeten wenigſtens der Kugelgeſtalt nahe knmme, wofern ſie nicht vielleicht völlig kugelrund ſind.

Die 11. Erfahrung.

165. Die Kometen erſcheinen zum Theil wie die Planeten nur im Thierkreiſe mit einer eigenen Bewegung von Weſten nach Oſten, zum Theil nehmen ſie ihre Wege auch durch andre Geſtirne die nicht zum Thierkreiſe gehören, zum Theil bewegen ſie ſich wider die Ordnung der Geſtirne im Thierkreiſe von Oſten gegen Weſten um den Himmel herum. Einige haben nur ein blaſſes Licht und ſcheinen wie in einem Nebel eingehüllet: andre ſind ſehr glänzend mit hellen Schweifen erſchienen. Gemeiniglich iſt ein ſolcher Komet nur einige Monate ſichtbar, und man hat von den Kometen, die in den vorigen Jahrhunderten erſchienen ſind, nur wenig brauchbare Beobachtungen, obgleich Lubienitz in ſeinem bekannten Werke: Theatrum Cometicum, Amſtel. 1667, und Hevel in ſeiner Cometographia, Lib. XII. Gedani 1668, Verzeichniſſe von mehr denn 400 Kometen geliefert haben, die in den Geſchichtbüchern angemerkt ſind. Im erſten Bande der Berliner Sammlung Aſtronomiſcher Tafeln vom Jahr 1776 iſt dies Kometverzeichniß ins Kurze gezogen mitgetheilt. Die Alten haben aber oft Feuerkugeln und andre Lufterſcheinungen für Kometen angeſehen. Jetzt weiß man gewiß, daß die Kome-

meten beſtändige Weltkörper ſind, und ſich im Weltraum nach ähnlichen Geſetzen um die Sonne bewegen, wie die Planeten. Wenn alſo im folgenden von Planeten überhaupt die Rede iſt, ſo werden die Kometen Kürze halber unter dieſem Nahmen mit begriffen werden.

Die 29 Erklärung.

230 231 Fig. 166. Es ſey S die Sonne, FGT die Erdbahn in der Ebene der Ecliptik, die bis an die Fixſternenkugel erweitert den gröſten Kreis ANMO giebt. Ferner ſey HPKL die Bahn eines Planeten, oder Kometen, und man nehme bis auf weitere Prüfung an, daß jede Planeten- oder Kometen-Bahn mit der Sonne in einerley Ebene liege; ſo wird ihre Durchſchnittslinie mit der Ebene der Ecliptik durch die Sonne laufen. (Wenn hier Kürze halber nur Sonne, Erde, Planet genannt werden, ſo muß man allemahl ihre Mittelpuncte verſtehen.) Dieſemnach wird der Planet bey jedem Umlauf um die Sonne zweymahl in die Ebene der Ecliptik kommen; einmahl bey H, indem er aus der ſüdlichen Halbkugel in die nördliche hinauf ſteigt, das andremahl bey K, wo er aus der nordlichen Halbkugel wieder in die ſüdliche hinüber geht. Beyde Puncte heiſſen die Knoten der Planetenbahn, und zwar H der aufſteigende, K der niederſteigende Knoten, die man, wie in der beygefügten Figur mit den Zeichen ☊ und ☋ zu bemerken pflegte. Beyde Knoten liegen alſo mit der Sonne in der graden Linie, worin die Ebenen der Ecliptik und Planetenbahn einander ſchneiden, und ſie heißt kurz die Knotenlinie.

Zuſatz.

Zuſatz.

167. Die Lage der Planeten- oder Kometenbahn iſt bekannt, wenn die Lage der Knotenlinie in der Ebene der Ecliptik, und der Neigungswinkel der Planetenbahn gegen die Ebene der Ecliptik bekannt iſt.

Die 30. Erklärung.

168. Die Länge und Breite eines Planeten, ſo wie man ſie aus dem Mittelpunct der Sonne beobachten würde, heißt ſeine heliocentriſche Länge und Breite, und man unterſcheidet davon die geocentriſche Länge und Breite, ſo wie ſie aus dem Mittelpunct der Erde würde geſehen werden.

Zuſatz.

269. Der Planet ſey in ſeiner Bahn in P, die Erde in T, und aus P ſey PR auf die Ebene der Ecliptik ſenkrecht gezogen. Man ziehe SP, SR, TP, TR, und nehme überdem an, daß die graden Linien, SA, TA, in dem Anfangspunct des Widders an der Fixſternenkugel zuſammenlaufen. Wenn nun in der Ecliptik die Zeichen und Grade von Weſten nach Oſten von A durch N und M herum gezählt werden; ſo iſt AST die heliocentriſche Länge der Erde, und ATD + 180° die geocentriſche Länge der Sonne, ESA iſt der letztern Ergänzung zu 360°: Ferner iſt AST + TSR die heliocentriſche Länge, RSP die heliocentriſche Breite, ATD + DTR die geocentriſche Länge, RTP die geocentriſche Breite des Planeten.

Die 31. Erklärung.

170. Die Ebene der Planetenbahn ſey nach allen Seiten bis an die Fixſternenkugel erweitert, ſo giebt ſich der gröſte Kreis NWOX; In dieſes

Kreiſes Ebene liegt SP, und trift verlängert die Fixſternenkugel in einem Punct p des Kreiſes NWOX. Durch p legen man einen Breitenkreis, wovon pr einen Bogen vorſtellet, der auf der Eccliptik ANMO ſenkrecht iſt; ſo iſt der Bogen ANMr der Ecclipti̇k das Maaß der heliocentriſchen Länge des Planeten in der Ecclipti̇k. In der an die Fixſternenkugel projicirten Planetenbahn nehme man den Bogen Nα = NA, und wähle α für den Anfangspunct, um die Grade der Länge des Planeten in ſeiner Bahn aus der Sonne geſehen von demſelben nach der Ordnung der Zeichen fortzuzählen: ſo iſt der Winkel αSN + NSP die Länge des Planeten in ſeiner Bahn, und das Maaß dieſes Winkels iſt der Bogen αNWp.

Die 32. Erklärung.

171. Der Punct N iſt der an die Fixſternenkugel projicirte Knoten, und AN, oder αN die Länge dieſes Knotens. Beyde Knoten ſind um 180° von einander entfernt. Die aus der Sonne geſehene Entfernung NSp des Planeten vom aufſteigenden Knoten in ſeiner Bahn, oder der Bogen NWp als das Maaß dieſes Winkels heißt das Argument der Breite, weil die heliocentriſche Breite rSp, deren Maaß der Bogen pr iſt, davon abhängt.

Die 33. Erklärung.

172. Im Dreyeck RTS nennt man STR den Elongationswinkel, TSR den Commutationswinkel: jener iſt der Unterſcheid der geocentriſchen Längen der Sonne und des Planeten, dieſer der Unterſcheid der heliocentriſchen Längen der Erde und des Planeten. Der dritte Winkel SRT iſt die von der Verſchiedenheit der Beobachtungsörter herrührende

Pa-

Parallaxe, welche hier die Parallaxe der Erdbahn heiſſet.

Die 7. Aufgabe.

173. **Die Lage der Knotenlinie der Bahn eines Planeten zu finden.**

Aufl. Man muß den Planeten zweymahl in einerley Knoten H beobachten, wenn ſich die Erde das einemahl in F, das andremahl in T befindet: ſo iſt vermöge der Vorausſetzung der Winkel FST mit den anliegenden Seiten SF : ST bekannt, weil die Theorie der jährlichen Bewegung der Erde als bekannt vorausgeſetzt wird, alſo kann man FT mit den Winkeln SFT, STF, finden. Aus den Beobachtungen ſelbſt ſind die Winkel STH, SFH bekannt, alſo findet man TFH = SFH — SFT, und FTH = STH — STF. Aus dieſen Winkeln und der dazwiſchen liegenden Seite FF findet man FH und hat nun im Dreyeck SFH die Seiten SF, FH, mit dem dazwiſchen liegenden Winkel SFH, woraus der Winkel FSH gefunden wird. Hiemit iſt zugleich die Lage der Knotenlinie gefunden, und man findet die heliocentriſche Länge des in H liegenden Knotens = ASF + FSH.

Der 4. Lehrſatz.

174. **Wenn eine Ebene *AB* eine andere *CD* in *EF* ſchneidet, und aus einem Punct *H* der einen Ebene *CD* auf die andre *AB* die grade Linie *HM* ſenkrecht, von *M* aber *MG* auf *EF* ſenkrecht, und hiernächſt *GH* gezogen wird; ſo iſt *MGH* der Neigungswinkel.** 58 Fig.

Beweis. Weil HM auf AB ſenkrecht iſt, ſo iſt auch die Ebene HGM auf AB ſenkrecht: (261. §. Geom.) Demnach iſt ferner EF auf der Ebene HGM ſenk-

recht (263. §. Geom.) und FGH ein rechter Winkel, (246. §. Geom.) mithin MGH der Neigungswinkel (249. §. Geom.)

Die 8. Aufgabe.

175. **Den Neigungswinkel der Planetenbahn gegen die Ecliptik zu finden.**

Aufl. Es ſey PR auf der Ebene der Ecliptik und RZ auf der Knotenlinie ſenkrecht, ſo iſt RZP der geſuchte Neigungswinkel (174. §.) Weil nun vermöge der vorigen Aufgabe (173. §.) die Lage der Knotenlinie bekannt iſt, ſo kann man die geocentriſche Länge und Breite RGP des Planeten zu der Zeit beobachten, wenn ſich die Erde bey G in der Knotenlinie befindet: ſo hat man SGR als den Elongationswinkel, und die Trigonometrie giebt folgende Proportionen

$$RP : RG = \text{tang}\,RGP : \text{ſin. tot.}$$
$$RG : RZ = \text{ſin. tot} : \text{ſin}\,RGZ$$
$$RZ : RP = \text{ſin. tot} : \text{tang}\,RZP.$$

Daraus folgt (198. §. Geom.)

$$1 : 1 = \text{ſin. tot} \times \text{tg.}\,RGP : \text{ſin}\,RGZ\,.\,\text{tg.}\,RZP;$$

$$\text{mithin tang}\,RZP = \frac{\text{ſin. tot} \times \text{tang}\,RGP}{\text{ſin}\,RGZ}.$$

Zuſatz.

176. Gewöhnlich hat es ſeine eigenen Schwierigkeiten, wenn die Lage der Knotenlinie der Bahn eines Kometen und ihre Neigung gegen die Ecliptik gefunden werden ſoll, weil er nur in einem kleinen Theil ſeiner Bahn ſichtbar iſt, und die Umſtände alsdenn zu ſolchen Beobachtungen gemeiniglich eben nicht vortheilhaft ſind.

Der 5. Lehrſatz.

177. **Der Sinus des Elongationswinkels verhält ſich zum Sinus des Commutationswin-**

winkels, wie die Tangente der geocentriſchen Breite des Planeten zur Tangente der heliocentriſchen Breite.

Beweis. Es iſt SR : RP = ſin tot : tang RSP, und RP : TR = tang RTP : ſin tot. (28. §. Trig.) Daraus folgt SR : TR = tang RTP : tang RSP. (198. §. Geom.) Ferner iſt SR : TR = ſin STR : ſin TSR, (29. §. Trig.) alſo auch ſin STR : ſin TSR = tang RTP : tang RSP.

Die 9. Aufgabe.

178. Die Theorie von der Bewegung der Erde um die Sonne iſt ſchon bekannt, und man hat die geocentriſche Länge und Breite eines Planeten, deſſen Bahn der Lage nach auch ſchon bekannt iſt, beobachtet: man ſoll die heliocentriſche Länge und Breite des Planeten nebſt ſeinem Abſtande von der Sonne und der Erde für eben den Zeitpunct finden.

Aufl. Nachdem die Figur wie im 169. §. gezeichnet worden, verlängere man RT bis an die Knotenlinie in B und ziehe BP, ſo liegt BP in der Ebene der Planetenbahn, ſo wie BR in der Ecliptik, und die Ebene RBP, worin auch TP liegt, iſt auf der Ecliptik ſenkrecht, weil RP darauf ſenkrecht iſt. (261. §. Geom.) In dieſer Ebene ziehe man TQ auf BR ſenkrecht, ſo iſt auch TQ auf der Ebene der Ecliptik ſenkrecht. (263. §. Geom.) Ferner ziehe man TC auf die Knotenlinie ſenkrecht, und hiernächſt CQ, ſo iſt TCQ der Neigungswinkel der Planetenbahn gegen die Ecliptik. (174. §.)

1.) Im Dreyeck STB iſt die Seite ST mit beyden anliegenden Winkeln bekannt, weil ASH aus dem 173. §. bekannt iſt, alſo BST = AST – ASH und

STB

STB = 180° — STR gefunden wird; daraus findet man den Winkel SBT mit den anliegenden Seiten SB, TB.

2.) Im Dreyeck BCT, das bey C rechtwinklicht iſt, hat man nun den Winkel CBT und die Seite BT, daraus wird CT gefunden.

3.) Im Dreyeck CTQ iſt auſſer dem rechten Winkel bey T nun die Seite CT und der Winkel TCQ aus dem 175. §. bekannt: alſo findet man TQ.

4.) Im Dreyeck BTQ iſt alſo ferner der rechte Winkel bey T mit den anliegenden Seiten TQ, TB, bekannt: daraus ſuche man den Winkel TBQ und die Seite BQ.

5.) Weiter iſt im Dreyeck BTP die Seite BT bekannt und die anliegendenden Winkel TBP = TBQ, BTP = 180° — RTP: daraus ſuche man TP.

6.) Im Dreyeck RTP iſt ferner bey R ein rechter Winkel, RTP iſt gemeſſen, und TP eben gefunden: alſo kann man TR ſuchen.

7.) Im Dreyeck STR iſt alsdenn der Elongationswinkel an T mit den anliegenden Seiten ST, RT bekannt: alſo ſuche man den Commutationswinkel TSR und die verkürzte Diſtanz SR.

8.) Aus dem Elongations- und Commutationswinkel mit der geocentriſchen Breite findet man die heliocentriſche Breite dem 177. §. gemäß.

9.) Im ſphäriſchen Dreyeck N*pr* iſt nun auſſer dem rechten Winkel bey *r* jede von den anliegenden Seiten, nemlich die Länge N*r* und die Breite *rp* aus der Sonne geſehen, bekannt: daraus kann N*p* gefunden werden, mithin auch die Länge des Planeten in ſeiner Bahn αNW*p*.

10.) Im Dreyeck RSP wird hiernächſt aus der verkürzten Diſtanz SR und den anliegen Winkeln auch SP, als die Entfernung des Planeten von der Sonne gefunden.

Der 1. Zuſatz.

179. Wird die heliocentriſche Länge des Planeten in ſeiner Bahn mit ſeiner Entfernung von der Sonne gegeben wenn die Lage ſeiner Bahn gegen die Eccliptik ſchon bekannt iſt; ſo findet man in umgekehrter Orduung die geocentriſche Länge und Breite auf folgende Art:

1.) Von der Länge des Planeten in ſeiner Bahn ziehe man die Länge des aufſteigenden Knotens ab, ſo iſt der Reſt das Argument der Breite NW*p*.

2.) Im rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck N*pr* iſt alsdenn auſſer der eben genannten Seite und dem rechten Winkel an *r* auch der Neigungswinkel an N bekannt, (175. §.) alſo kann man N*r* und *rp* finden: da dann AN + N*r* die heliocentriſche Länge, und *rp* die heliocentriſche Breite iſt.

3.) Nunmehr iſt im rechtwinklichten Dreyeck SPR auſſer dem rechten Winkel an R die Seite SP mit dem Winkel an S bekannt: alſo ſuche man die verkürzte Diſtanz SR.

4.) Weil die Länge der Erde AST und ihre Entfernung ST von der Sonne als bekannt angenommen wird, ſo findet man den Commutationswinkel TSR, wenn die Länge der Erde von der heliocentriſchen Länge des Planeten abgezogen wird.

5.) Aus dem Commutationswinkel TSR mit den anliegenden Seiten ST, SR, ſuche man den Elongationswinkel STR, ſo hat man auch DTR = 180° − STR, und die geocentriſche Länge ATD + DTR.

6.) Aus

6.) Aus dem Commutations- und Elongationswinkel mit der heliocentriſchen Breite findet man dem 177. §. gemäß die geocentriſche Breite.

Der 2. Zuſatz.

180. Stellet man für einen Planeten von Zeit zu Zeit eine zulängliche Menge von Beobachtungen an, und berechnet man für jede dieſer Beobachtungen die Länge des Planeten in ſeiner Bahn mit ſeiner Entfernung von der Sonne; ſo kann man die ganze Bahn des Planeten ſo zeichnen, daß die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde als der Maaßſtab dient.

Die 12. Erfahrung.

181. Bey dieſem Verfahren hat man gefunden, daß alle Planetenbahnen Ellipſen ſind, wovon ein Brennpunct im Mittelpunct der Sonne liegt. Mercurs Bahn iſt die kleinſte, und hiernächſt folgen in der Ordnung der Gröſſe die Bahnen der Venus, der Erde, des Mars, Jupiters und Saturns. Uebrigens hat man vermittelſt der Fernröhre noch folgende Entdeckungen gemacht. In der Sonne nimmt man oft ſchwarze Flecken war, deren Figur und Gröſſe ſehr verſchieden und veränderlich iſt. Bey vielen hat man bemerkt, daß ſie am öſtlichen Sonnenrande zum Vorſchein kommen, ſich gegen den weſtlichen Rand zu fortbewegen, ohngefehr nach 12 bis 13 Tagen ſeit ihrer erſten Erſcheinung am weſtlichen Rande verſchwinden, und nach 28 Tagen am öſtlichen Rande wieder zum Vorſchein kommen. Die Wege, welche ſie auf der Sonne nehmen erſcheinen völlig ſo, wie es ſeyn muß, wenn die Sonne eine Kugel iſt, die ſich in 25. T. 14. St. 8. M. oder in Anſehung der Erde in 27. T.

12. St. 20. M. um eine Axe drehet, welche gegen die Ecliptik unter einem Winkel von 82° 30′ geneigt iſt, ſo daß der Sonnenäquator und die Ecliptik einander unter einem Winkel von 7° 30′ ſchneiden. In den Planeten Venus, Mars und Jupiter ſiehet man mit Hülfe ſtark vergröſſernder Fernröhre ebenfalls Flecken, die ihre Stelle auf der ſcheinbaren Scheibe des Planeten ändern, im Jupiter beſonders ſiehet man Streifen von veränderlicher Geſtalt, auch ſind dergleichen im Mars und Saturn geſehen worden. Die periodiſche Wiederkunft der Flecken, und die Regelmäßigkeit ihrer Bahnen hat auf die Schlußfolge geleitet, daß die Planeten Kugeln ſind, die, wie die Sonne, ſich um ihre eigene Axe drehen, nemlich Jupiter in 9. St. 57. Min. Mars in 24. St. 40. M. Venus in 23. St. 20. Min. Mercur iſt der Sonne zu nahe, und Saturn zu weit entfernt, als daß man bisher dergleichen Flecken auf dieſen Planeten hätte entdecken, und aus Beobachtung derſelben auf ihre Umlaufszeit ſchlieſſen können.

Der 1. Zuſatz.

182. Dieſen Erfahrungen gemäß kann man die Erde als den ſechſten Planeten in der Ordnung mitzählen. Wäre ſie in Ruhe, ſo müſte man nicht allein annehmen, daß die Sonne einen elliptiſchen Umlauf um die Erde machte, ſondern auch überdem, daß die Planeten indem ſie ihre obbeſchriebenen Bahnen um die Sonne durchlaufen, zugleich mit der Sonne um die Erde herum geführt werden. Wenn es indeſſen auch bewieſen wäre, daß dieſe Vorſtellung der Natur gemäß ſey; ſo könnte man doch bey Berechnung der Planetenbahnen die Vorſtel-

ſtellung vom Umlauf der Erde um die ruhende Sonne beybehalten, welche vom Copernicus ihren Nahmen hat, auf deſſen Veranlaſſung ſie vornemlich bekannt und nunmehro auch allgemein beliebt geworden iſt. Denn aus der Sonne geſehen würde einem Beobachter, der ſeine Bewegung nicht merkte, die Erde um die Sonne zu laufen ſcheinen.

Der 2. Zuſatz.

183. Nimmt man mit dem Copernicus nicht allein den jährlichen Umlauf der Erde um die Sonne, ſondern auch die tägliche Umlaufsbewung der Erde um ihre eigene Axe an, (56. §.) und dies wegen der übrigen Aehnlichkeit mit den Planeten, wovon gewiß einige einen ſolchen Umlauf um ihre eigene Axe machen; ſo laſſen ſich alle Erſcheinungen am geſtirnten Himmel, ſoweit ſie von Bewegungen der Weltkörper gegen einander abhängen, am ungezwungenſten erklären. Nach dem Ptolomäus im Almageſt war man an die Vorſtellung gewöhnt, daß die Erde im Mittelpunct des ganzen Weltbaues unbeweglich in Ruhe ſey, und war um deßwillen genöthiget, ſehr verwickelte ſchraubenförmige Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten zwiſchen den Wendekreiſen anzunehmen. Ueberdem ſchien die Copernikaniſche Vorſtellung einigen übel verſtandenen Stellen in der heiligen Schrift entgegen zu ſeyn; daher kam es, daß ſie nicht gleich anfangs allgemeinen Beyfall fand, Tycho de Brahe, der ſpäter als Copernicus lebte, und ſich ſonſt durch ſeine überaus wichtigen Beobachtungen noch wirklich mehr Verdienſte um die Aſtronomie als Copernicus erworben hat, gab dem letztern in Anſehung ſeiner Vorſtellung von der Weltordnung noch nicht völlig Beyfall, weil er immer

mer noch glaubte, daß ſie der heil. Schrift zuwider ſey. Die eigentliche Geſtalt der Planetenbahnen kannte aber noch Tycho ſo wenig als Copernicus ſie gekannt hatte: es war vielmehr **Keplern**, der noch mit **Tycho de Brahe** zugleich lebte, vorbehalten, dieſe wichtige Entdeckung zu machen, und dies vornemlich mit Hülfe der mühſamſten Rechnungen über viele Beobachtungen des Planeten Mars, welche Tycho angeſtellet hatte.

Die 34. Erklärung.

184. Wenn AMDBE die elliptiſche Planetenbahn vorſtellet; ſo können die Nahmen **Sonnenferne, Sonnennähe, Apſidenlinie, Excentricität, mittlere Entfernung**, bey den Planeten und ihren Bahnen eben die Bedeutungen behalten, wie ſie im 152. §. für die Erde und ihre Bahn ſind feſt geſetzt worden. Wenn ferner im folgenden überhaupt die Rede von den Geſetzen iſt, nach welchen die **Planeten** ihre Umläufe um die Sonne machen, ſo wird die Erde ebenfalls unter dem Nahmen der Planeten mit begriffen werden. Uebrigens wird man es nun ſchon gewohnt ſeyn, daß man zuweilen Kürze halber auch ſo reden kann, als wenn die Erdbahn die Sonnenbahn, und die Sonne ein Planet wäre. 229 Fig.

Die 13. Erfahrung.

185. **Kepler** hat aus den eben erwehnten Beobachtungen noch folgende zwey merkwürdige Geſetze geſchloſſen, deren Richtigkeit alle neuere Beobachtungen aufs vollkommenſte beſtättiget haben. 229 Fig.

1. Die Zeit, welche während der Bewegung durch jeden elliptiſchen Bogen AM, von der Sonnenferne angerechnet, verfließt, verhält ſich zur

ganzen Umlaufszeit, wie die Fläche des elliptiſchen Ausſchnittes AKMF zwiſchen dem Bogen AM und den aus der Sonne nach ſeinen Endpuncten laufenden Geſichtsſtralen, zur Fläche der ganzen Ellipſe. Wenn man FM den Radius Vector nennt, ſo läßt ſich daſſelbe Geſetz auch ſo ausdrücken: der Radius Vector ſchneidet in gleichen Zeiten gleiche elliptiſche Sectoren von der Bahn des Planeten ab.

2. Die Quadratzahlen von den Umlaufszeiten der Planeten in ihren Bahnen verhalten ſich gegen einander wie die Cubiczahlen ihrer mittlern Entfernungen von der Sonne.

Die 14. Erfahrung.

186. Die Kometenbahnen ſind ebenfalls Ellipſen, und die Sonne befindet ſich in einem ihrer Brennpuncte: nur weichen die Kometenbahnen ſehr vielmehr als die Planetenbahnen von der Figur des Kreiſes ab. Ihre Excentricität iſt ſo ſehr groß, daß das Stück einer Kometenbahn, welches der Sonnennähe zu beyden Seiten nahe iſt, einer Parabel nahe kommt. (28. §. Artill.) Die höhere Geometrie lehrt, daß die Parabel als eine Ellipſe anzuſehen ſey, deren Zwergaxe unendlich groß iſt. Uebrigens gelten die Kepleriſchen Geſetze (185. §.) auch für die Bewegung der Kometen in ihren Bahnen. Die Kometen ſind uns nur ſichtbar, wenn ſie dieſes einer Parabel nahe kommende Stück ihrer Bahn in der Sonnennähe durchlaufen. Gewöhnlich nimmt ihr Schweif, der übrigens allemahl nach der Seite liegt, die der Sonne entgegengeſetzt iſt, an Gröſſe ſo lange zu, bis der Komet, die Sonnennähe erreicht hat, hiernächſt aber wird der Schweif wieder kleiner. Uebrigens kommt die ſcheinbare Gröſſe des

Schwei-

Schweifes mit auf die Lage der Erde, der Sonne und des Kometen gegen einander an.

Die 35. Erklärung.

187. Man unterſcheidet die wahre Bewegung des Planeten in ſeiner Bahn von der mittlern Bewegung, die man ſich zur Erleichterung der Rechnung ſo vorſtellt, als wenn die Winkelbewegung des Planeten um die Sonne gleichförmig wäre, oder der Radius Vector in gleichen Zeiten gleiche Winkel an der Sonne beſchriebe. In Rückſicht auf dieſe Vorſtellung wird der Ausdruck mittlere Anomalie gebraucht, denjenigen Winkel AFN zu bezeichnen, um welchen der Planet von der Sonnenferne nach Verlauf einer gewiſſen Zeit entfernt ſeyn würde, wenn er der mittlern Bewegung folgte. Der Winkel NFM, um welchem beyde Anomalien, die wahre AFM und mittlere AFN, verſchieden ſind, heißt die Gleichung des Mittelpuncts. (Aequatio centri, Proſtaphaereſis.) Uebrigens unterſcheidet man auch in einem ähnlichen Sinn die mittlere Länge des Planeten von ſeiner wahren Länge.

Zuſatz.

188. Wenn die Lage der Abſidenlinie, oder die heliocentriſche Länge der Sonnenferne des Planeten bekannt iſt, und wenn man ihn in einem gewiſſen bekannten Zeitpunct in der Sonnenferne beobachtet hat; ſo kann man für jede andre künftige oder vorige Zeit die heliocentriſche Länge des Planeten in ſeiner Bahn angeben. Die Auflöſung dieſer Aufgabe kommt nur darauf an, daß man, weil die mittlere Anomalie für die gegebene Zeit durch eine leichte Regel Detri gefunden wird, die damit zuſammengehöri-

hörige wahre Anomalie finde. Die Aufgabe iſt bloß geometriſch. Es iſt nemlich der Elliptiſche Sector AFMK dadurch gegeben, daß man ſein Verhältniß zur Fläche der ganzen Ellipſe weiß: man ſoll daraus den Winkel zwiſchen ſeinen gradlinichten Seiten finden. Was auf ſolche Art jedesmahl erſtlich mühſam durch Rechnung gefunden werden müſte, das hat man ein für allemahl zum voraus für den ganzen Umlauf des Planeten berechnet, und in Tafeln gebracht, deren Einrichtung und Gebrauch man jedoch alsdenn allererſt recht vollſtändig kennen lernen kann, wenn man die mancherley Jahrrechnungen und die Einrichtung der Calender kennt, wovon der weitere Unterricht unten folgt. Man vergleiche indeſſen vorläufig die Berliniſche Sammlung aſtronom. Tafeln wegen der Sonne im 1 B. 226. und 296 S. Wegen der Planeten im 2. B. 130 und 256. S.

Die 36. Erklärung.

189. Die Zeit zwiſchen dem Augenblick, wenn um Mittag der Mittelpunct der Sonne culminirt, bis zu dem Augenblick, da am nächſten Mittage der Mittelpunct der Sonne abermahl im Meridian erſcheint, heißt ein Sonnentag. Man theilt ihn auf ähnliche Art, wie den Sternentag im 24 gleiche Sonnenſtunden, die Stunden noch weiter eben ſo in Minuten, Secunden, u. ſ. w. wie es auch im gemeinen Leben zulänglich bekannt iſt.

Der 1. Zuſatz.

190. Jeder Sonnentag iſt gröſſer als ein Sternentag. Geſetzt die Sonne komme am heutigen Mittage mit dem Aldebaran. Zugleich im Meridian, ſo wird ſie am nächſten Mittage, wenn Aldeba-

debaran wieder von Oſten her in dem Meridian anlangt, nicht mehr mit ihm in einerley Abweichungskreiſe befindlich, ſondern weiter nach Oſten fortgerückt ſeyn: demnach wird noch etwas mehr Zeit als ein Sternentag verflieſſen, bevor der Sonnentag zu Ende geht.

Der 2. Zuſatz.

191. Die Sonnentage ſind von ungleicher Länge, weil ſich die Rectaſcenſion der Sonne nicht völlig gleichförmig ändert. Die Bewegung der Sonne in der Ecliptik iſt ſchon an ſich ungleichförmig, und wenn ſie auch ſo gleichförmig wäre, daß die Länge der Sonne in der Ecliptik täglich um einen gleichen Ueberſchuß gröſſer würde, ſo würde doch die Aenderung ihrer Rectaſcenſion auf dem Aequator gemeſſen nicht alle Tage einerley ſeyn.

Die 14. Erfahrung.

192. Aus Vergleichung älterer Beobachtungen der Stellen der Fixſterne mit neuern hat man gefunden, daß ihre Länge von Zeit zu Zeit immer gröſſer werde, ſo daß die jährliche Aenderung 50,3″ beträgt. Dies könnte wohl nur eine ſcheinbare Bewegung ſeyn, wenn vielleicht die Durchſchnittspuncte der Ecliptik mit dem Aequator nicht an einer Stelle blieben, ſondern jährlich um 50,3″ der Ordnung der Zeichen entgegen rückten. Es ſey das eine oder das andre, der Erfolg wird doch allemahl eben ſo ſeyn, als wenn ein ſolches **Zurückweichen der Nachtgleichspuncte** wirklich ſtatt hätte: um deßwillen kann man die eben erwehnte Veränderung in der Länge der Fixſterne das **Vorrücken der Nachtgleichen** nennen, ohne eben über die ei-

gentliche Urſache der Erſcheinung ſchon etwas gewiſſes feſtzuſetzen.

Zuſatz.

193. Dieſe Aenderung in der Länge ziehet auch eine Aenderung in der graden Aufſteigung und Abweichung der Fixſterne nach ſich; auch können die Stellen der Fixſterne eben um deßwillen in einem Sternverzeichniſſe nur für einen gewiſſen Zeitpunct angezeigt werden, und man muß ſie daraus für jede andre Zeit durch eine beſonders angeſtellte Rechnung finden.

Die 15. Erfahrung.

194. Die Abſidenlinie der Sonnenbahn ändert ebenfalls von Zeit zu Zeit ihre Lage ſo, daß die Erdferne nach der Ordnung der Zeichen vorwärts rückt. Man hat gefunden, daß die Aenderung in der Länge der Erdferne jährlich 1′ 5½″ betrage.

Die 37. Erklärung.

195. Die Umlaufszeit der Sonne in der Ecliptik heißt überhaupt ein Sonnenjahr: man hat aber den eben erzählten Erfahrungen gemäß drey verſchiedene Jahre zu bemerken. Die Zeit des Umlaufs der Sonne vom Frühlingspunct angerechnet, bis ſie das nächſte mahl ebendaſelbſt anlangt, heißt das tropiſche Sonnenjahr. Es wird im gemeinen Leben gebraucht, weil die Jahrszeiten davon abhängen. Das ſideriſche Jahr, oder Sternjahr iſt die Zeit des Umlaufs der Sonne von einem Fixſtern angerechnet, bis ſie das nächſte mahl bey eben demſelben Fixſtern anlangt. Das anomaliſtiſche Jahr iſt die Zeit des Umlaufs der Sonne in ihrer elliptiſchen Bahn von der Erdferne angerechnet, bis ſie an eben dieſer Stelle wieder ankommt.

Die

Die 16. Erfahrung.

196. Aus den beſten Beobachtungen hat man die eigentliche Länge des tropiſchens Jahres

365 Tage 5 St. 48 Min. $45\frac{1}{2}$ Sec.

gefunden. Weil die Länge der Fixſterne alle Jahre 50,3″ und die Länge der Erdferne alle Jahre 1′ $5\frac{1}{2}$″ gröſſer wird; ſo iſt das Sternjahr um 20′ 26″ und das anomaliſtiſche Jahr um 26′ 35″ länger, als das tropiſche. Demnach findet man für das Sternjahr 365 T. 6 St. 9 Min. 11 Sec.

Der 1. Zuſatz.

197. Man ſetze nach der Regel Detri an:

in 365 T. 6 St. 9 Min. 11 Sec.

ändert ſich die grade Aufſteigung der Sonne in Anſehung eines Fixſterns um 360°, um wieviel alſo in 1 Tage? ſo findet man 59′ 8,2″. Um ſoviel würde alſo die grade Aufſteigung täglich gröſſer werden, wenn der Umlauf der Sonne in Anſehung der graden Aufſteigung gleichförmig wäre. Eben ſoviel beträgt auch die mittlere Bewegung der Sonne in Anſehung ihrer Länge.

Der 2. Zuſatz.

198. Wenn die Bewegung der Sonne in Anſehung ihrer Rectaſcenſion gleichförmig wäre; ſo würde während eines Sonnentages auſſer dem ganzen Aequator noch ein Bogen von 59′ 8,2″ durch den Mittagskreis gehen. Weil nun

1 Min. im Bogen 4 Secunden Sternzeit
und 1 Sec. im Bogen 4 Tertien Sternzeit

giebt, ſo findet man, daß

24 St. 3 Min. 56 Sec. 32,8 Tert. Sternzeit

bey der angenommenen Vorausſetzung einen Sonnentag ausmachen würden.

Die 38. Erklärung.

199. Der mittlere Sonnentag iſt die Zeit, welche zwiſchen zweenen zunächſt auf einander folgenden obern Durchgängen des Mittelpuncts der Sonne durch den Mittagskreis verflieſſen würde, wenn ihre Bewegung in Anſehung der graden Aufſteigung gleichförmig wäre. Man theilt ihn, wie den wahren Sonnentag, (189. §.) in 24 gleiche Stunden, jede Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, u. ſ. f. mittlere Sonnenzeit.

Der 1. Zuſatz.

200. Man ſetze nach der Regel Detri an: 360° 59′ 8,2″ im Bogen des Aequators geben 24 Stunden mittlere Sonnenzeit; wieviel alſo 360°? Die Antwort iſt 23 St. 56 Min. 4,1 Sec. mittlere Sonnenzeit. Ziehet man dieſe Zahl von 24 St. mittl. Sonnenzeit ab, ſo bleiben 3 Min. 55,9 Sec. mittlere Sonnenzeit für den Unterſcheid eines mittlern Sonnentages vom Sternentage.

Der 2. Zuſatz.

201. Man kann Bogen des Aequators in mittlere Sonnenzeit verwandeln, wenn man 15° 2′ 27,8417″ im Bogen gegen 1 Stunde mittlere Sonnenzeit rechnet, wie gefunden wird, wenn man 360° 59′ 8,2″ mit 24 dividirt. Es gehen nemlich durch den Mittagskreis

ein Bogen von		mittl. Sonnenzeit
15° 2′ 28″	in	1 Stunde,
15′ 2″ 28‴	in	1 Minute,
15″ 2‴ 28⁗	in	1 Secunde,
1° 0′ 0″	in	3 Min. $59\frac{1}{3}$ Sec.
0° 1′ 0″	in	3 Sec. $59\frac{1}{3}$ Tert.
0° 0′ 1″	in	3 Tert. $59\frac{1}{3}$ Quart.

Der

Der 3. Zuſatz.

202. Um von dieſen Rechnungen keine fehlſame Anwendung zu machen, muß man wohl bemerken, daß ſie eigentlich nur dienen, Stundenwinkel der Fixſterne in Zeit zu verwandeln. Auf jeden Grad eines ſolchen Stundenwinkels kommen 4 Minuten Sternzeit, (47. §.) die mit 3 Min. 59$\frac{1}{3}$ Sec. mittl. Sonnenzeit einerley ſind. Auf jeden Grad eines Stundenwinkels der Sonne aber kommen 4 Minuten Sonnenzeit, weil 360° tägliche Bewegung der Sonne mit 360° 59′ 8,2″ täglicher Bewegung eines Fixſterns in einerley Zeit, nemlich in 24 Stunden Sonnenzeit, oder 24 St. 3 Min. 56$\frac{1}{2}$ Sec. Sternzeit, erfolgen.

Die 39. Erklärung.

203. Der wahre Mittag iſt der Zeitpunct, an welchem der Mittelpunct der Sonne im Meridian iſt: der mittlere Mittag aber derjenige Zeitpunct, an welchem der im Aequator mit gleichförmiger Bewegung gegen Oſten fortrückende mittlere Ort der Sonne im Meridian kommt. Der Unterſcheid der Zeit zwiſchen den beyden Mittagen heißt die Gleichung der Zeit.

Der 1. Zuſatz.

204. Es ſey BAD der Aequator EAF die Ecliptik, A der Frühlingspunct, V der wahre und M der mittlere Ort der Sonne in der Ecliptik, PV*w* der Abweichungskreis der Sonne, alſo A*w* ihre wahre Rectaſcenſion. Man nehme auf dem Aequator die Bogen A*v* = AV und A*m* = AM, ſo iſt *mw* das Maaß des Stundenwinkels, um welchen die in V befindliche Sonne vom Meridian entfernt iſt, 232 Fig.

wenn ihr mittlerer Ort *m* im Aequator culminirt. Man muß alſo für dieſen Stundenwinkel der Sonne die mittlere Sonnenzeit ſuchen, 15° für eine Stunde gerechnet, ſo hat man die Zeitvergleichung.

Der 2. Zuſatz.

205. In allen Fällen iſt mv die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne, und vw der Unterſcheid zwiſchen der wahren Länge und wirklichen Rectaſcenſion der Sonne. Für den Fall, welchen die Figur vorſtellet, hat man $mw = mv - vw$: in andern Fällen, wenn $Aw > Av$ iſt, hat man $mw = mv + vw$.

Der 3. Zuſatz.

206. Man muß es nicht als eine eigenthümliche Eigenſchaft der Zeit der erſten Bewegung (47. §.) anſehen, daß 15° im Bogen gegen eine Stunde Zeit zu rechnen ſind, und eben ſo wenig als eine eigenthümliche Eigenſchaft der mittlern Sonnenzeit, daß 15° 2′ 28″ im Bogen gegen eine Stunde Zeit gerechnet werden: denn Stundenwinkel der Sonne und Sonnenzeit gehören eben ſo zuſammen, wie Stundenwinkel eines Fixſtern und Sternzeit oder Zeit der erſten Bewegung. Herr de la Lande (Aſtronomie Tom. I. Liv. IV. §. 976 – 979.) verbeſſert daher mit Recht einen kleinen Fehler in des H. de la Caille Sonnentafeln, der die darinn mitgetheilte Tafel für die Zeitgleichung betrift: derſelbe iſt durch die einigermaſſen zweydeutige Art veranlaſſet worden, wie man ſich oft ausdrückt, wenn von Verwandelung der Bogen des Aequators in Zeit die Rede iſt.

Der 4. Zuſatz.

107. In der 225 Figur ſtelle S die Sonne und PSQW ihren Abweichungskreis, *peqd* die Erde, *z*, und *x* ein Paar Oerter auf der Erde *pze*, *pxm*, ihre Meridiane vor; ſo iſt *zpx* oder *epm* der Stundenwinkel zwiſchen beyden. Bey der täglichen Umlaufsbewegung der Erde von Weſten gegen Oſten in der Richtung *wvz* kommt jeder Meridian der Erde wie *pze*, *pxm*, einmahl in den Abweichungskreis PZE der Sonne, der ſelbſt nicht völlig unbeweglich iſt, wie er es ſeyn würde, wenn S ein Fixſtern wäre. Zwiſchen zweenen zunächſt auf einander folgenden Zeitpuncten, in welchen der Meridian *pze* der Erde mit dem Abweichungskreiſe PZE der Sonne zuſammen fällt, drehet ſich der Abweichungskreis der Sonne PZE ſelbſt um einen Winkel von 59′ 8,2″ weiter gegen Oſten, und zwiſchen beyden Zeitpuncten verflieſſen 24 Stunden Sonnenzeit. Während dieſer 24 Stunden ſind alſo nicht mehr als 360° des Erdäquators durch den Abweichungskreis PZE der Sonne gegangen, obgleich 360° 59′ 8,2″ durchgegangen wären, wenn S ein Fixſtern wäre. Faſſet nun der Winkel *zpx*, oder der Bogen *em* des Erdäquators 15°, ſo kommt *pxm* um eine Stunde Sonnenzeit ſpäter in den Abweichungskreis der Sonne als *pze*, und der Ort *x* hat eine Stunde ſpäter Mittag als der Ort *z*. Ueberhaupt verhält ſich die Zwiſchenzeit zwiſchen den Augenblicken, da beyde Oerter Mittag haben, zu 24 Stunden Sonnenzeit, wie der Winkel *zpx*, oder ſein Maaß *em* auf dem Erdäquator, zu 360°.

Der 5. Zuſatz.

208. Weil nicht alle wahre Sonnentage gleich groß ſind; ſo können auch nicht alle wahre Sonnen-

ſtunden gleich groß ſeyn. Im gemeinen Leben richtet man ſich zwar nach der wahren Sonnenzeit, unſre Uhren können aber bey ihrem gleichförmigen Gange nur mittlere Sonnenſtunden zeigen. Auch der Aſtronom kann bey ſeinen Rechnungen nur mittlere Sonnenzeit brauchen. Wenn demnach vielleicht Beobachtungen nach der wahren Sonnenzeit gemacht ſind, ſo muß man allemahl dieſe wahre Zeit auf mittlere Sonnenzeit bringen.

Die 40. Erklärung.

209. Bey der Jahrrechnung im gemeinen Leben kann man nur ganze Tage brauchen, die Stunden, Minuten, und kleinere Zeittheile werden ſo lange nicht gerechnet, bis ſie ganze Tage ausmachen: um deßwillen muß man das eigentliche aſtronomiſche oder natürliche tropiſche Sonnenjahr (195. §.) vom bürgerlichen Jahr unterſcheiden. Julius Cäſar hat auf Anrathen des Soſigenes eine Jahrrechnung eingeführt, nach welcher 365 Tage 6 Stunden auf ein bürgerliches Jahr gerechnet werden, welches daher das Julianiſche Jahr genannt wird. Allemahl wenn 3 Jahre von 365 Tagen verfloſſen ſind, zählt man im vierten Jahr, welches ein Schaltjahr heißt, eine Tag mehr. Ein gemeines Julianiſches Jahr hält alſo 365 Tage, das Schaltjahr 366 Tage.

Die 17. Erfahrung.

210. Die Abſidenlinie und Knotenlinie der Planetenbahnen ändern von Zeit zu Zeit ihre Lage. Wegen des Vorrückens der Nachtgleichen (192. §.) müſte die heliocentriſche Länge der Sonnenferne, ſo wie die Länge des aufſteigenden Knotens jährlich um 50,3″ alſo in 100 Jahren um 1°23′50″ gröſſer wer-

werden: wenn alſo die Beobachtungen nur eine ſolche Veränderung lehrten; ſo wäre eigentlich die Lage der erwehnten Linie unveränderlich. Noch iſt es nicht völlig durch Beobachtungen entſchieden, wie weit dieſe Veränderung gehet. Nach Herrn de la Lande, iſt in 100 Julianiſchen Jahren

	Beweg. d. Sonnenf.			Bew. d. Knot.			Neig. d. Bahn		
♄	2°	23′	20″	0°	50′	0″	2°	30′	20″
♃	1	43	20	1	30	0	1	19	10
♂	1	51	40	1	6	20	1	51	0
♀	4	10	0	0	51	40	3	23	20
☿	1	57	40	1	15	0	7	0	0

Die 41. Erklärung.

211. Auſſer der ſideriſchen und tropiſchen Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne muß man noch die ſynodiſche Umlaufszeit unterſcheiden, wodurch die Zeit von einer Zuſammenkunft mit der Sonne bis zur nächſtfolgenden verſtanden wird.

Der 1. Zuſatz.

212. Dieſe Umlaufszeiten ſind

	ſideriſche				tropiſche				ſinodiſche			
	T.	S.	M.	S.	T.	St.	M.	S.	T.	St.	M.	S.
♄	10761	14	36	42	10749	7	21	50	378	2	8	8
♃	4332	8	51	26	4330	8	58	27	398	21	15	45
♂	686	23	30	43	686	22	18	27	779	22	28	26
♀	224	16	41	32	224	16	41	32	583	22	7	6
☿	87	23	15	37	87	23	14	26	115	21	3	22

Der 2. Zuſatz.

213. Die mittlern gröſten und kleinſten Entfernungen der Planeten von der Sonne, wenn man die Entfernung der Sonne von der Erde = 1 annimmt, ſind nach H. de la Lande folgende:

mit-

	mittlere	gröſte	kleinſte	Excentric
♄	9,53937	10,07147	9,00727	0,53210
♃	5,20098	5,45375	4,94821	0,25277
♂	1,52369	1,66587	1,38151	0,14218
♀	0,72333	0,72843	0,71318	0,00510
☿	0,38710	0,46670	0,30750	0,07960

Vergleicht man die Cubiczahlen dieſer mittlern Entfernungen mit den Quadratzahlen der Umlaufszeiten, ſo wird man Keplers Regel (185. §.) beſtätigt finden.

Der 3. Zuſatz.

214. Die Bahn Mercurs und hiernächſt auch die Bahn des Planeten Mars weichen am meiſten vom Kreiſe ab. Die Venusbahn kommt dem Kreiſe am nächſten, und hiernächſt die Erdbahn. Man überſiehet das am deutlichſten, wenn man die Excentricität der Bahn eines jeden Planeten in Theilen ſeines mittlern Abſtandes ſucht: alsdenn findet man folgende Zahlen

♄	0,055779	♁	0,016802
♃	0,04860	♀	0,00713
♂	0,09331	☿	0,20563.

Die 18. Erfahrung.

215. Der Mond, wenn er ſich in den erſten Tagen nach dem neuen Licht am Abendhorizont bald nach Sonnen-Untergang wieder ſehen läßt, erſcheint wie eine Sichel, wovon die erhabene Seite der Sonne zugekehrt iſt. Man ſiehet ihn an jedem folgenden Abende weiter gegen Oſten fortgerückt, und zugleich die helle Sichel breiter als am vorigen Abende, bis er ſich etwa am 8ten Tage nach dem Neumond im Geviertſchein mit der Sonne als eine halbe helle Scheibe zeigt. Die gradlinichte Gränze

krümmt.

krümmt ſich nun in den folgenden Tagen weiter aus⸗ wärts, bis der Mond am 15ten Tage nach dem Neumonde im vollen Lichte und zugleich im Gegen⸗ ſchein mit der Sonne, als eine ganze erleuchtete Scheibe geſehen wird. Nicht allein bis dahin fin⸗ det man den Mond allemahl in einem Zodiacalge⸗ ſtirn, ſondern er bleibt auch ferner nach dem vollen Lichte im Thierkreiſe, nur nicht immer in der Ec⸗ cliptik: er hat vielmehr bald nordliche bald ſüdliche Breite, die jedoch nie über $5\frac{1}{2}$ Grade beträgt. An der Seite, wo anfangs die Sichel erſchien, die nun anfängt ſich von der Sonne wegzuwenden, nimmt der Mond wieder ab, und die vorigen Er⸗ ſcheinungen der Lichtgeſtalten treten in umgekehrter Ordnung wieder ein, indem der Mond durch die andre Hälfte des Thierkreiſes rückt, und auf ſolche Art, ſich der Sonne wieder nähert: bis endlich 30 Tage nach dem neuen Lichte der Mond wieder bey der Sonne iſt.

Der 1. Zuſatz.

216. Der Mond bewegt ſich in einer ſolchen Bahn binnen Monathsfriſt um die Erde, die von der Erde aus geſehen ein gröſter Kreis an der Fix⸗ ſternenkugel zu ſeyn ſcheint, deſſen Ebene die Ebe⸗ ne der Eccliptik ſchneidet. Weil aber der ſcheinba⸗ re Durchmeſſer des Mondes bald gröſſer bald klei⸗ ner befunden wird; ſo kann ſeine Entfernung von der Erde nicht immer einerley und ſeine Bahn kein Kreis ſeyn. Aus Beobachtungen über die grade Aufſteigung und Abweichung des Mondes kann mann ſeine jedesmahlige Länge und Breite durch Rechnung finden, man kann zugleich aus Ver⸗ gleichung ſeines jedesmahligen ſcheinbaren Durch⸗

meſſers

meſſers die Verhältniſſe ſeiner Entfernungen vom Mittelpunct der Erde herleiten, und hiernächſt die ganze Bahn des Mondes auf einer Ebene nach einem willkührlich gewählten verjüngten Maaßſtabe auf ähnliche Art, wie oben (143. u. f. §.) die Bahn der Sonne um die Erde zeichnen.

Der 2. Zuſatz.

217. Verfolgt man den Mond vornemlich zu der Zeit mit öftern Beobachtungen, wenn er zwar noch einige aber beſtändig abnehmende ſüdliche Breite hat, ſo lange bis ſeine Breite anfängt, nordlich zu werden; ſo kann man die Lage ſeiner Knotenlinie finden. Denn die Länge des aufſteigenden Knotens iſt einerley mit der Länge des Mondes für den Fall, wenn ſeine Breite die vorher ſüdlich war, 0 wird. Die Länge des niederſteigenden Knotens iſt um 180° gröſſer.

Der 3. Zuſatz.

217. Verfolgt man eben ſo den Mond zu der Zeit mit öftern Beobachtungen, wenn ſeine Entfernung vom Knoten mehrentheis 90° beträgt, ſo lange bis die mit der wachſenden Länge zugleich wachſende Breite wieder abzunehmen anfängt; ſo kann man ſeine gröſte Breite finden, da dann ſeine Entfernung vom Knoten zugleich 90° betragen muß. Die gröſte Breite iſt alsdenn zugleich das Maaß der Neigung der Ebene ſeiner Bahn gegen die Ebene der Ecliptik.

Die 19. Erfahrung.

218. Bey den Bemühungen, die Lage und alle Abmeſſungen der Mondbahn zu finden, nahm man bald war, daß das alles beſtändigen ſehr beträchtlichen Aenderungen unterworfen ſey. Die Länge der

Erd-

Erdferne fand man von Zeit zu Zeit immer gröſſer, und muſte daraus die Folge ziehen, daß die Erdferne des Mondes jährlich um 40° 39′ 52″ vorwärts rücke, und in 8 Jahren 309 T. 8 St. 37 Min. 30 S. einen ganzen Umlauf mache. Ferner fand man, daß die gröſte Gleichung des Mittelpuncts und die Eccentricität der Mondbahn nicht immer einerley ſey. Auch die Lage der Mondbahn gegen die Ebene der Ecliptik ändert ſich beſtändig. Die Knoten rücken der Ordnung der Zeichen jährlich um 19° 19′ 43″ entgegen, ſie machen in 18 Jahren 224 T. 4 St. 45′ einen ganzen Umlauf, und die Neigung der Bahn ändert ſich von 4° 58′ 30″ bis 5° 17′ 30″. Den ſcheinbaren Durchmeſſer des Mondes hat man 33′ 34″ gefunden, wenn der Mond beydes zugleich in der Erdnähe, und im Gegenſchein mit der Sonne iſt; in der Erdferne und Zuſammenkunft mit der Sonne aber 29′ 25″. Das arithmethiſche Mittel iſt 31′ 29″. (de la Lande Aſtron. T. II. pag. 251. §. 1505. und Abregé d'Aſtron. §. 570, pag. 233.) In der mittlern Entfernung des Mondes von der Erde iſt der ſcheinbare Durchmeſſer 31′ 9″.

Die 42. Erklärung.

219. Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde heißt überhaupt ein Monath: man muß aber fünf verſchiedene Monathe unterſcheiden. Der Umlauf in Anſehung des Frühlingspuncts wovon man die Grade der Länge zu zählen anfängt, bis dieſe 360° beträgt, heißt der periodiſche und der Umlauf in Anſehung der Fixſterne der ſideriſche Monath. Der Umlauf vom einer Zuſammenkunft

mit der Sonnen bis wieder zum Neumond in der nächſten Zuſammenkunft wird der ſynodiſche Monath genannt, und der Umlauf des Mondes in ſeiner Bahn vom aufſteigenden Knoten, bis er das nächſtemahl wieder daſelbſt anlangt heißt der Draconitiſche oder Knotenmonath. (Der Nahme kommt daher, weil der aufſteigende und niederſteigende Knoten des Mondes auch Drachenkopf und Drachenſchwanz heiſſen.) Endlich iſt noch der anomaliſtiſche Monath die Zeit des Umlaufs von der Erdferne, bis zur nächſten Ankunft des Mondes in ſeiner Erdferne.

Zuſatz.

220. Aus vielfältigen Beobachtungen und dabey angebrachten Verbeſſerungen hat man für die gegenwärtige Zeit folgende Umlaufszeiten gefunden:

der periodiſche Monath	27 T.	7 St.	43 M.	5 S.
der ſideriſche — —	27 —	7 —	43 —	12 —
der ſynodiſche — —	29 —	12 —	44 —	3 —
der anomaliſtiſche —	27 —	13 —	18 —	35 —
der Knotenmonath —	27 —	5 —	6 —	56 —

Die 20. Erfahrung.

221. Man ſiehet ſchon mit bloſſen Augen einige Flecken im Monde, mit Hülfe eines guten Fernrohrs aber noch weit mehrere, theils kleinere theils gröſſere. Man ſiehet zugleich durch das Fernrohr auch alsdenn, wenn der Mond nur wie eine helle Sichel erſcheint, eine volle Scheibe wovon der übrige Theil nur ein ſehr ſchwaches Licht hat. Die Flecken behalten unter ſich immer einerley Lage, und man ſiehet auf der Erde gröſtentheils immer einerley Flecken: nur ſcheinen ſie ſich alle zuſammen zuweilen dem einen Rande zu nähern und zugleich von dem andern

zu

zu entfernen. Am erſten Rande verſchwinden alsdenn einige Flecken die ihm ſehr nahe waren, und ſtatt ihrer kommen ihnen gegen über andre hervor, ſo daß er das Anſehen hat, als wenn er um ſeinen Mittelpunct ein wenig hin und wieder zurück ſchwancke.

Die 21. Erfahrung.

222. Die äuſſere Peripherie des Monds ſcheint zwar kreisförmig: aber der innere Bogen, da wo der helle und dunkele Theil an einander gränzen, hat ſehr viele Ungleichheiten. Selbſt in dem dunkeln Theile ſiehet man nahe bey der hellen Sichel kleine helle Stellen, und in dem hellen Theile Flecken, die nicht immer einerley Stelle haben, ſondern allemahl ihre Stelle verändern, ſo wie der Mond ſelbſt ſeine Stelle gegen die Sonne verändert. Mit Hülfe ſolcher Fernröhre, die ſehr ſtark vergröſſern, kann man ganz eigentlich erkennen, daß die veränderlichen Flecken als Schatten von höhern Gegenden auf dem Monde herrühren, die man in Anſehung der übrigen für Berge halten muß.

Der 1. Zuſatz.

223. Der Mond iſt eine undurchſichtige dunkle für ſich nicht leuchtende Kugel, die ſehr viele Aehnlichkeit mit unſrer Erde hat, und ihre Erleuchtung nur von der Sonne erhält. Die beſtändige Aenderung ſeiner Lichtgeſtalten rührt daher, weil nur die eine der Sonne zugekehrte Hälfte der Mondkugel erleuchtet iſt, und dieſe nur alsdenn von der Erde aus ganz geſehen werden kann, wenn der Mond im Gegenſchein mit der Sonne iſt. Weil man auf der Erde gröſtentheils immer einerley Flecken in ei-

nerley Lage gegeneinander ſiehet, ſo folget daraus, daß der Mond während ſeines monathlichen Umlaufs, um die Erde auch einen Umlauf um ſeine eigene Axe mache. Dieſer Umlauf iſt ſoviel man bisher hat finden können gleichförmig. Weil dagegen der monathliche Umlauf ungleichförmig iſt, ſo läßt ſich daraus erklären, daß das Schwanken des Mondes nur ſcheinbar ſey, und daß es zum Theil auch in dem täglichen Umlauf der Erde ſeinen Grund habe, wodurch der Beobachter in einem Kreiſe mit herum geführet wird.

Der 2. Zuſatz.

224. Es ſey T der Erde, L des Mondes Mittelpunct, und man ziehe aus beyden die graden Linien TS, LS, nach den Mittelpunct der Sonne: ſo liegt das Dreyeck TSL in der Ebene der Mondbahn, die den Mond in einem gröſten Kreiſe AFBG ſchneidet. Durch L lege man eine Ebene ACB auf LS und eine andre DCE auf LT ſenkrecht, ſo ſind beyde auf der Ebene der Mondbahn ſenkrecht, (261. §. G.) mithin auch ihre Durchſchnittslinie LC. (264. §. G.) Beyde geben gröſtr Kreiſe der Mondkugel, die unter dem Winkel ALD gegen einander geneigt ſind, wovon der Bogen AD das Maaß iſt. Der gröſte Kreis ACB iſt die Gränze zwiſchen der von der Sonne erleuchteten und der dunklen Halbkugel, DCE aber die Gränze der Halbkugel DCEGA, welche von der Erde aus geſehen werden kann: alſo ſiehet man auf der Erde nur das Stück von der Mondkugelfläche erleuchtet, was zwiſchen den Halbkreiſen CDH und CAH liegt. Von dieſen erſcheint CDH als die äuſſere Gränze wie ein Kreisbogen gekrümmt, DAH

aber

aber nach den Geſetzen der Perſpectiv wie eine Ellipſe, die in eine grade Linie übergeht, wenn LA mit LT zuſammen fällt, und die Ebene dieſes Kreiſes durchs Auge des Beobachters auf der Erde geht.

Der 5. Lehrſatz.

225. Der Neigungswinkel *ALD* beyder Kreiſe gegen einander, zwiſchen welchen der erleuchtete Mondbruch liegt, iſt die Summe der ſcheinbaren Entfernungen zwiſchen Sonne und Mond aus der Erde, und zwiſchen Erde und Mond aus der Sonne geſehen.

Beweis. Man verlängere LD bis M, und ziehe LN mit TS parallel: ſo iſt MTL + TLM + MLN = 2R, und TLM = R, alſo MTL + MLN = R. Aber auch ALD + MLN − NLS = R, alſo MTL = ALD − NLS, und man findet ALD = MTL + NLS: der Winkel NLS aber iſt dem gleich, unter welchem TS und LS in der Sonne zuſammen laufen.

Zuſatz.

226. Wenn man mit dem Elongationswinkel STL des Mondes von der Sonne bey einer Beobachtung zugleich den Winkel ALD vermittelſt eines Micrometers genau genug meſſen könnte; ſo hätte man im Dreyeck TLS auch den Winkel an S = ALD − STL. (225. §.) Wäre überdem für eben den Zeitpunct die Entfernung TL des Monds von der Erde bekannt; ſo könnte daraus ST als die Entfernung der Erde von der Sonne gefunden werden. Es hat aber die Sache in der Ausübung zuviele Schwierigkeit, als daß man ſich davon ein

richtiges Reſultat verſprechen könnte. RiccIolus (Almageſt. Nov. Tom. I. Lib. III. Cap. VII. Art. 12.) erzählt eine Beobachtung wobey zu einer Zeit, als das erſte Mondsvirtel eintrat, der Winkel STL = 89° 45′ gefunden worden. Es war alſo ALD = 90° und der Winkel an S = 15′. Daraus würde man TS : TL = ſin tot : ſin. 15′ finden, mithin TS : TL = 10000000 : 43633, und TS = 229,2. TL. Wenigſtens iſt daraus zu ſchlieſſen, daß die Entfernung der Sonne von der Erde auch noch in Vergleichung mit der Entfernung des Mondes von der Erde anſehnlich groß ſey: alſo noch um ſo mehr in Vergleichung mit dem Halbmeſſer der Erde. Demnach kann ihre Horizontalparallaxe nur ſehr klein ausfallen.

Die 21. Erfahrung.

227. Die Begebenheit, welche wir eine Sonnenfinſterniß nennen, wobey es das Anſehen hat, als wenn eine ſchwarze Scheibe von Weſten gegen Oſten vor der Sonne vorüber gienge, erfolgt nie anders als grade um die Zeit des Neumonds, wenn der Mond mit der Sonne in Zuſammenkunft iſt. Die ähnliche Begebenheit aber, welche wir eine Mondfinſterniß nennen, erfolgt nur um die Zeit des Vollmonds, wenn der Mond grade im Gegenſchein mit der Sonne iſt. Bey dieſer leztern Begebenheit wird der Mond auf eine ähnliche Art dem Anſehen nach von einer ſchwarzen Scheibe verdunkelt, die aber nun von Oſten gegen Weſten vorüber zu rücken ſcheint.

Der 1. Zuſatz.

228. Wenn der Mond zur Zeit ſeiner Zuſammenkunft mit der Sonne dem Knoten nahe iſt, oder

ſelbſt

ſelbſt durch den Knoten geht, mithin gar keine oder nur ſehr geringe Breite hat; ſo muß er vor der Sonne vorüber gehen, als eine dunkle undurchſichtige Kugel der Erde die Sonne ganz oder zum Theil verdecken, und die Erſcheinung der Sonnenfinſterniß verurſachen. Es muß dies allemahl erfolgen, wenn Sonne und Mond einander ſo nahe kommen, daß die Entfernung ihrer Mittelpuncte kleiner wird, als die Summe ihrer ſcheinbaren Halbmeſſer. Dieſer Vorſtellung gemäß kann man die eigentliche Zeit, wenn eine Sonnenfinſterniß eintreten muß, ihre Dauer und Gröſſe zum voraus berechnen, und die Erfahrung hat nun ſchon recht ſehr oft gelehrt, daß alles ſo erfolge, wie es nach den Vorausſetzungen, die bey der Rechnung angenommen ſind, erfolgen muß: alſo bleibt nicht der allergeringſte Zweifel übrig, daß die Sonnenfinſterniſſe nicht von der angeführten Urſache herrühren ſollten.

Der 2. Zuſatz

229. Die gleichfalls undurchſichtige Erdkugel wirft einen kegelförmigen Schatten der Sonne gegenüber, deſſen Länge ohngefehr 215 Halbmeſſer der Erde beträgt. (48. §. Opt.) Wenn alſo der Mond im Gegenſchein mit der Sonne zugleich einem Knoten ſeiner Bahn nahe, oder vielleicht ſelbſt im Knoten befindlich iſt; überdem auch ſeine Entfernung von der Erde alsdenn weniger als 215 Halbmeſſer der Erde beträgt; ſo muß er ganz oder zum Theil in den Erdſchatten kommen, und von demſelben verdunkelt werden. Die ſcheinbare Mondſcheibe wird alsdenn den Erdſchattenkegel ſenkrecht ſchneiden, der auf die Mondſcheibe projicirte Erdſchatten wird kreisför-

mig erſcheinen, und ſolchergeſtalt die Erſcheinung der Mondfinſterniß in ſolchen Fällen allemahl verurſachen, wenn die Entfernung zwiſchen dem Mittelpunct des Monds und der Axe des Erdſchattens kleiner wird, als die Summe der ſcheinbaren Halbmeſſer des Monds und des ſenkrechten Schnitts des Erdſchattens in einer ſolchen Entfernung von der Erde, die der Entfernung des Mondes gleich iſt. Wofern dieſe Vorſtellung ihre Richtigkeit hat, ſo muß man auch im Stande ſeyn, die eigentliche Zeit, Dauer und Gröſſe einer Mondfinſterniß zum voraus zu berechnen. Die bisher noch allemahl beobachtete Uebereinſtimmung des Erfolgs mit den Reſultaten der Rechnung läſſet an der Richtigkeit dieſer Vorſtellung im geringſten nicht zweifeln.

Der 3. Zuſatz.

230. Weil die Entfernung des Mondes von der Erde ganz gewiß mehr denn 220mahl kleiner, als die Entfernung der Sonne von der Erde iſt; (226. §.) ſo muß die Parallaxe des Mondes in gleicher Höhe mit der Sonne wenigſtens 220mahl gröſſer, als die Sonnenparallaxe ſeyn. (§.) Alſo wird die Erſcheinung der Dauer und Gröſſe einer Sonnenfinſterniß nicht für alle Oerter auf der Erde einerley ſeyn, welche die Sonne zugleich über dem Horizont haben. Ja es kann ſeyn, daß für einige dieſer Oerter wirklich ein Stück von der Sonne bedeckt wird, wenn andre dasmahl gar keine Sonnenfinſterniß ſehen.

Der 4. Zuſatz.

231. Mit der Mondfinſterniß hat es eine ganz andre Bewandniß. Der Mond wird wirklich ver-

fin-

finſtert. Alle Beobachter, welche den Mond zugleich über dem Horizont haben, ſehen in einerley Zeitpunct den Anfang und das Ende der Finſterniß, den Eintritt eines jeden Mondsflecken in den Erdſchatten und ſeinen Austritt, den Anfang und das Ende der vielleicht erfolgenden gänzlichen Verfinſterung.

Die 22. Erfahrung.

232. Bald nach Erfindung der Fernröhre entdeckten **Galiläus** und **Simon Marius** vier kleine Sternchen ganz nahe beym Jupiter, die allemahl mit dem Jupiter ſelbſt beynahe in grader Linie erſcheinen, übrigens aber ihre Stellen unter einander ſelbſt ſowohl als in Anſehung Jupiters beſtändig ändern. Jeder von ihnen iſt dem Jupiter bald zur Rechten bald zur Linken, und man muſte bald aus allen Umſtänden ſchlieſſen, daß es keine Fixſterne, ſondern für ſich undurchſichtige dunkle Weltkörper ſind, die ihr Licht, wie Jupiter ſelbſt von der Sonne haben, die aber übrigens ähnliche Umläufe um den Jupiter, wie der Mond um die Erde machen, und den Jupiter bey ſeinem Umlauf um die Sonne eben ſo begleiten, wie der Mond mit der Erde um die Sonne geführt wird. Sie haben daher den Nahmen der **Jupitersmonde** erhalten, und man zählt ſie nach der Ordnung der Gröſſe ihrer Bahnen, oder der Entfernung, in der ſie um den Jupiter umlaufen. Man nennt ſie auch **Trabanten**, oder **Nebenplaneten**, die zum Jupiter als **Hauptplaneten** gehören.

Die 23. Erfahrung.

233. Nur mit Hülfe ſehr guter Fernröhre, die anſehnlich vergröſſern, hat man auch beym Saturn

fünf dergleichen kleine Sternchen entdeckt, die man nach allen dabey bisher wahrgenommenen Umſtänden ebenfalls für dunkle undurchſichtige Weltkörper halten muß, wovon jeder in einer eigenen Bahn um den Saturn läuft, jedoch ſo, daß alle insgeſammt mit dem Saturn um die Sonne geführt werden. Man nennt ſie **Saturnus-Monde**, auch **Trabanten oder Nebenplaneten Saturns**, als des **Hauptplaneten**, und zählt ſie ebenfalls nach der Ordnung der Gröſſe ihrer Bahnen, oder ihrer Entfernungen vom Saturn. Den vierten welcher der klärſte iſt, hat Huygen im Jahr 1655 entdeckt. Nach der Zeit entdeckte der ältere Caßini nach und nach die vier übrigen.

Der 1. Zuſatz.

234. Dieſem Sprachgebrauch gemäß iſt auch die Erde ein Hauptplanet, wozu der Mond als Nebenplanet gehört. Mercur, Venus, und Mars, ſind als Hauptplaneten anzuſehen, weil ſie nach ähnlichen Geſetzen, wie die Erde, Jupiter und Saturn, ihren Umlauf um die Sonne machen. Daher zählt man im Sonnenſyſtem ſechs Hauptplaneten und zehn Nebenplaneten. Einige Aſtronomen haben zwar geglaubt, auch einen Venusmond mit Hülfe eines Fernrohrs geſehen zu haben: allein es iſt bisher nicht entſchieden, ob Venus einen ſolchen Begleiter habe, oder nicht.

Der 2. Zuſatz.

235. Wofern die Nebenplaneten für ſich dunkle undurchſichtige Kugeln ſind; ſo müſſen ſie zuweilen ihren Schatten auf den Hauptplaneten werfen, wenn ſie ſich zwiſchen demſelben und der Sonne befinden;

ſie müſſen auch wohl von dem Schatten des Hauptplaneten ſelbſt verfinſtert werden, wenn ſie hinter dem Hauptplaneten herum kommen, und der Hauptplanet ſich zwiſchen dem Trabanten und der Sonne befindet. Alsdenn wird es nur darauf ankommen, daß die Erde zu eben der Zeit in ihrer Bahn ſich an einer dazu vortheilhaften Stelle befinde, ſo muß man dergleichen Erſcheinungen auch von der Erde aus wahrnehmen können. Man hat wirklich ſolche Erſcheinungen beſonders bey den Jupitersmonden, und vornemlich ihre **Verfinſterungen** nun ſchon ſehr oft beobachtet.

Der 3. Zuſatz.

236. Aus dem bisherigen Vortrage wird man leicht abnehmen, daß es möglich ſeyn müſſe, aus fleißigen Beobachtungen der Jupiters- und Saturnus-Monde die Lage, Geſtalt und Gröſſe ihrer Bahnen herzuleiten, auch ihre Umlaufszeiten, und die übrigen Geſetze, nach welchen ſie in ihren Bahnen fortrücken: die Sache iſt aber noch mehrern Schwierigkeiten unterworfen, als beym Monde, der die Erde begleitet, weil man genöthiget iſt, aus den Beobachtungen, die nur auf der Erde angeſtellet werden können, durch Schlüſſe heraus zu bringen, wie die Bewegung des Trabanten aus dem Hauptplaneten würde geſehen werden. Beym Saturn kommt noch dazu, daß die gröſten und beſten Fernröhre nöthig ſind, um nur die Trabanten zu erkennen, mit welchen ſich nicht wohl die zum Meſſen dienlichen Inſtrumente verbinden laſſen. Bey den Jupitersmonden iſt man indeſſen doch ſoweit gekommen, daß man ihre **Verfinſterungen**, ohne ſehr zu fehlen, zum voraus berechnen kann.

Die 24. Erfahrung.

237. Die fleißigen Beobachtungen dieſer Finſterniſſe mit andern Hülfsmitteln verbunden haben auf die merkwürdige Entdeckung geleitet, daß die Fortpflanzung des Lichts nicht plötzlich erfolge, daß vielmehr das Licht 8′ 7″ Zeit brauche, einen Weg zurück zu legen, welcher dem Halbmeſſer der Erdbahn gleich iſt. Man konnte die Finſterniſſe der Jupitersmonde ſonſt ſchon ziemlich richtig vorher ſagen, fand aber dennoch, daß ſie nahe bey der Zuſammenkunft Jupiters mit der Sonne ſpäter anfiengen, und ſich ſpäter endigten, als der Rechnung gemäß zu erwarten war. Wenn ſich dagegen Jupiter im Gegenſchein mit der Sonne befand, ſo erfolgte grade das Gegentheil. Der Weg von den Jupitersmonden bis zur Erde iſt bey der Zuſammenkunft Jupiters mit der Sonne um den ganzen Durchmeſſer der Erdbahn gröſſer, als in dem Fall, wenn Jupiter ſich im Gegenſchein befindet, und man fand, daß dies in der Fortpflanzung des Lichts einen Unterſcheid von 16′ 14″ mache.

Die 25. Erfahrung.

238. Aus den fleißigen Beobachtungen dieſer Finſterniſſe der Jupitersmonden hat man ferner nicht allein ihre ſynodiſchen Umlaufszeiten gefunden, ſondern auch zur Beſtimmung der Lage ihrer Bahnen, die nicht mit der Bahn des Hauptplaneten in einerley Ebene liegen, manche Folgerungen daraus ziehen können. Die periodiſchen Umlaufszeiten ſind für die vier Jupitersmonde:

1	Tag	18	St.	27	Min.	33	Sec.
3	—	13	—	13	—	42	—
7	—	3	—	42	—	33	—
16	—	16	—	32	—	8	—

und

und für die fünf Saturnusmonde

1	Tag	21	St.	18	Min.	27	Sec.
2	—	17	—	44	—	22	—
4	—	12	—	25	—	12	—
15	—	22	—	34	—	38	—
79	—	7	—	47′	—	0″	—

Die ſcheinbaren Durchmeſſer ſind viel zu klein, als daß man ſie hätte mit dem Micrometer meſſen und daraus auf ihre Gröſſe ſchlieſſen können. Wenn die Jupitersmonde in ihrer untern Zuſammenkunft vor dem Hauptplaneten vorüber gehen; ſo kann man die Zeit, welche der Trabant braucht, durch den Rand Jupiters zu gehen, mit der Zeit des ganzen Vorübergangs vergleichen, und daraus das Verhältniß der ſcheinbaren Durchmeſſer des Trabanten und des Hauptplaneten herleiten. So hat man gefunden, daß die Jupitersmonde einander an Gröſſe mehrentheils gleich ſind, und daß ihr Durchmeſſer ungefehr halb ſo groß ſey, als der Durchmeſſer der Erde.

Die 10. Aufgabe.

239. Die geographiſche Länge für den Ort der Beobachtung zu finden.

Aufl. Wenn die Länge eines gewiſſen Orts auf der Erde ſchon bekannt iſt, ſo findet man um wieviele Grade und Theile eines Grades ein andrer Ort weiter gegen Oſten oder gegen Weſten liegt, wenn man genau die Zwiſchenzeit zwiſchen den Augenblicken weiß, in welchen beyde Oerter Mittag haben. (207. §.) Es ſey z der eine und x der andre Ort 225
auf der Erde und an jedem dieſer Oerter befinde ſich Fig.
ein Beobachter, der ſeine Uhr, welche in ihrem Gan-

ge

ge genau mit der mittlern Sonnenzeit übereinkommt, grade zu der Zeit auf 12 geſtellet hat, als ihm der Mittelpunct der Sonne im Meridian erſchien; ſo wird der, welcher weiter gegen Weſten liegt, ſeine Uhr ſpäter als der andre auf 12 geſtellet haben, und zwiſchen den Zeiten, welche beyde Uhren zeigen, wird immer eben ſoviel Unterſcheid bleiben, als zwiſchen den Augenblicken verfließt, in welchen dieſe Oerter nach einander in den Abweichungskreis der Sonne kommen. Wenn nun eine Erſcheinung am Himmel von beyden Beobachtern zugleich in einerley Augenblick wahrgenommen wird, und jeder nach ſeiner Uhr den Zeitpunct der Beobachtung richtig anmerkt; ſo muß die Vergleichung dieſer Zeitpuncte ſogleich ergeben, welcher Ort früher Mittag hat, alſo weiter gegen Oſten liegt als der andre. Wenn ferner aus dem Unterſcheid zwiſchen den beobachteten Zeiten, weil es Sonnenzeit iſt, der Bogen des Aequators zwiſchen den Meridianen beyder Oerter ſo geſucht wird, daß man 15° gegen eine Stunde rechnet; ſo findet man die Differenz ihrer geographiſchen Länge, und daraus die geographiſche Länge ſelbſt für einen von beyden Oertern, wenn ſie für den andern ſchon bekannt iſt.

Hiezu dienen demnach bey Mondfinſterniſſen die Beobachtungen der Zeitpuncte, wenn die Mondsflecken nach und nach mit dem Erdſchatten in Berührung kommen, wenn bey einer vielleicht gänzlichen Verfinſterung der Mond ganz in den Erdſchatten tritt, und hiernächſt wieder hervorzukommen anfängt. Man muß dabey Mondcharten zur Hand haben, wie ſie von Hevel und andern Aſtronomen gezeichnet ſind, auch jetzt gewöhnlich den aſtronomi-

ſchen

ſchen Calendern beygefügt werden. Auf dieſen werden die Flecken mit Nahmen unterſchieden, die zwar anfänglich willkührlich gewählt, nun aber ſchon durch den Gebrauch eingeführt ſind. Ferner dienen die Beobachtungen der Jupiters-Mondfinſterniſſe, wenn man auf die Verſchiedenheit der beobachteten Zeitpuncte Rückſicht nimmt, die von der verſchiedenen Vollkommenheit der gebrauchten Fernröhre, auch wohl noch von andern Urſachen herrühren können, wovon nur in vollſtändigern Lehrbüchern Nachricht ertheilet werden kann. Wenn die Horizontalparallaxe und eben darum auch jede Höhenparallaxe des Monds bekannt iſt, ſo können auch die Beobachtungen der Sonnenfinſterniſſe, und der Bedeckungen der Fixſterne vom Monde dienen: nur muß jeder Beobachter aus ſeiner angeſtellten Beobachtung den Zeitpunct zu finden wiſſen, in welchem eben die Erſcheinung aus dem Mittelpunct der Erde wäre beobachtet worden.

Zuſatz.

240. Wenn man ſchon ſo vollkommen richtige aſtronomiſche Tafeln über die Bewegung des Mondes, oder der Jupiterstrabanten hätte, daß man die eigentlichen Zeitpuncte ohne Fehler vorher angeben könnte, in welchen die Umſtände ſolcher Finſterniſſe an einem Ort auf der Erde, von bekannter geographiſchen Länge und Breite geſehen werden müſſen; ſo würde jeder Beobachter die Länge des Orts, wo er ſeine Beobachtung angeſtellet hat, unverzüglich finden können. Ein aſtronomiſches Jahrbuch, das die Anzeige der vorher berechneten Finſterniſſe enthielte, würde ihm anſtatt des zweyten Beobachters

ters dienen: denn eben dieſelbigen Zeitpuncte würde er darin, ſo wie ſie eine richtig geſtellte Uhr unter einem bekannten Meridian zeigen muß, ſchon angezeigt finden, welche er bey Beobachtung der nach einander eingetretenen Umſtände der Finſterniß ſo angemerkt hätte, wie ſie ſeine Uhr gezeigt hat.

Die 24. Erfahrung.

241. Die Entfernung zweyer Oerter auf der Erde in einerley Mittagskreiſe, wenn ihre Scheitellinien einander unter einem Winkel von einerley Gröſſe ſchneiden, findet man nicht überall von gleicher Gröſſe, wie es ſeyn müſte, wenn die Erde völlig Kugelrund wäre. Wenn man alſo annimmt, daß zwey Oerter in einerley Mittagskreiſe um einen Grad der Breite von einander entfernt ſind, deren Scheitellinien ſich unter einem Winkel von einem Grade ſchneiden; ſo ſind nicht alle Grade der Breite gleich groß. Im Jahr 1669 gab **Ludwig** XIV, König in Frankreich, die Verordnung, daß die franzöſiſchen Geographen die Gröſſe der Erde auszumeſſen ſuchen ſollten. Herr **Picard** maß einen Bogen des Mittagskreiſes zwiſchen Malvoiſine und Amiens in einer Breite zwiſchen 49 und 50 Graden, und fand daſelbſt die Länge eines Grades 57060 Toiſen. Auf eine neuere Verordnung, Ludwigs XV, haben die Herrn v. **Maupertius**, **Clairaut**, **Camus**, der jüngere **le Monnier**, und der Abt **Outhier** im Jahr 1736 in eben der Abſicht eine Reiſe nach Tornea in Lappland unter dem nordlichen Polarkreiſe angeſtellet, und ſchon ein Jahr vorher die Herrn **Bouguer**, **Godin**, **de la Condamine**, **de Jußieu**, und **Couplet** eine Reiſe nach

Qui-

Quito in Peru beynahe unter dem Aequator. Die erſte Geſellſchaft fand die Länge eines Grades der Breite unter dem Polarkreiſe 57422 Toiſen; die andre Geſellſchaft fand den erſten Grad der Breite am Aequator 56750 Toiſen.

Zuſatz.

242. Von dieſen dreyen gemeſſenen Graden muß der am Aequator am ſtärkſten gekrümmt ſeyn, der in Frankreich gemeſſene etwas weniger, und der unter dem Polarkreiſe gemeſſene noch weniger Krümmung haben. Andre neuere Meſſungen kommen mit dieſen ebenfalls darin überein, daß die Grade der Breite vom Aequator gegen die Pole zu wachſen. Die Meridiane der Erde ſind alſo keine Kreiſe, ſondern vielleicht Ellipſen, wovon die kleine Axe mit der Erdaxe einerley iſt, die Zwergaxe aber in der Ebene des Aequators liegt. Dieſe Vorausſetzung iſt nicht bloſſe Vermuthung geblieben, ſie iſt vielmehr auch durch andre Gründe beſtättiget worden.

Die 41. Erklärung.

243. Ein runder kugelähnlicher Körper, ſo wie er durch Umdrehung einer Ellipſe um eine von ihren Axen würde beſchrieben werden, heißt ein **Sphäroid**, auch eine **Afterkugel**. Nachdem die Zwergaxe, oder die zugeordnete Axe für die Umdrehungsaxe genommen wird, nachdem wird es ein **eyrundes** oder ein **zuſammengedrücktes Sphäroid**.

Zuſatz.

244. Wofern alle Mittagskreiſe der Erde einander gleich und ähnlich ſind; ſo iſt die Erde ein zuſammengedrücktes Sphäroid. (242. §.) Es würde freylich ſehr viel dazu gehören, die völlige Gleich-

heit und Aehnlichkeit der Mittagskreiſe auſſer allem Zweifel zu ſetzen: man hat aber auch keinen Grund eine ſehr groſſe Verſchiedenheit zu vermuthen. Dieſerwegen kann man die Erde ſo lange für ein reguläires Sphäroid halten, als das Gegentheil nicht erwieſen iſt.

Die 11. Aufgabe.

234 Fig. 245. Die Horizontalparallaxe eines Planeten zu finden.

Aufl. Zwey Beobachter an ſolchen Oertern A und B auf der Erde, die entweder in einerley Meridian liegen, oder doch beynahe einerley geographiſche Länge haben, in Anſehung der Breite aber anſehnlich weit von einander entfernt ſind, müſſen dem Planeten P im Meridian beobachten, und jeder muß den Abſtand des Planeten von der Scheitellinie des Orts der Beobachtung meſſen. Ueberdem müſſen die Beobachter für jeden Ort nicht allein die geographiſche Länge, ſondern auch die Polhöhe oder geographiſche Breite möglichſt genau zu finden ſuchen:

1.) Wofern nun beyde Oerter in einerley Meridian liegen, und AZ, BX, die in C zuſammenlaufenden Scheitellinie vorſtellen; ſo iſt Z der eine, XBP der andre Abſtand vom Scheitel, und man hat im Viereck CAPB die Winkel an A und B, auch überdem den Winkel ACB als den Unterſcheid beyder Pohlhöhen: alſo kann APB gefunden werden. (106. §. Geom.) Ferner ſind CPA, CPB, die Höhenparallaxen, und in dem Fall, welchen die Figur vorſtellet, iſt APB = CPA + CPB. Ein Beobachter ſieht nemlich alsdenn den Planeten ſüdwärts, der andre nordwärts des Scheitels. Wenn B in dem Bogen zwiſchen CP und CA fiele, ſo wäre

APB

APB = CPA – CPB. Man ſetze die Horizontalparallaxe des Planeten $= h$, und die Winkel ZAP $= \alpha$, XBP $= \beta$, CPA $= p$, CPB $= q$, den ganzen Sinus = 1; ſo iſt $1 : \sin \alpha = \sin h : \sin p$, und $1 : \sin \beta = \sin h : \sin q$. (55. §.) Der Winkel APB wird allemahl nur klein und nie über 2° groß befunden, alſo kann hier ohne merklichen Fehler angenommen werden, daß die Winkel p, q, h, ſich wie ihre Sinus verhalten: folglich erhält man $p = h \sin \alpha$, $q = h \sin \beta$. Das giebt ferner $p \pm q = h(\sin \alpha \pm \sin \beta)$, und man erhält $h = \frac{p \pm q}{\sin \alpha \pm \sin \beta}$, oder $h = \frac{APB}{\sin \alpha \pm \sin \beta}$.

2.) In dem Fall, wenn die geographiſche Länge beyder Oerter nicht völlig einerley iſt, muß aus andern Beobachtungen über die Bewegung des Planeten noch bekannt ſeyn, um wieviel ſich die Abweichung deſſelben in der Zeit ändere, welche zwiſchen den Durchgängen des Planeten durch die Meridiane beyder Oerter verfließt. Alsdenn kann man die Beobachtung, welche im weſtlichen Meridian gemacht iſt, auf diejenige zurück führen, welche in eben der Breite im öſtlichen Meridian mit der andern Beobachtung zugleich wäre gemacht worden, wenn ſich der weſtliche Beobachter daſelbſt befunden hätte: da dann übrigens die Rechnung aus den Beobachtungen eben ſo geführt wird, wie es vorhin n. 1. iſt bemerkt worden.

3.) Wäre die geographiſche Breite beyder Oerter nicht genau genug bekannt, um mit Sicherheit den Winkel ACB in Rechnung zu bringen; ſo müſte

ſte jeder Beobachter mit dem Abſtande des Planeten vom Scheitel zugleich ſeine Entfernung von einem in der Nähe befindlichen Fixſtern meſſen, der mit dem Planeten zugleich in den Mittagskreis kommt. Wenn AM, BN, grade Linien ſind, die aus A und B nach den Fixſtern laufen, ſo werden dieſe parallel ſeyn, und der Winkel APB iſt die Summe der Entfernungen MAP, NAP, des Planeten vom Fixſtern, wofern der eine Beobachter den Stern nordwärts, der andre ſüdwärts des Planeten ſiehet. Erſcheint aber der Stern beyden Beobachtern an einer Seite des Planeten, welches der Fall wäre, wenn A*m*, B*n*, die aus A und B nach den Fixſtern laufenden Geſichtslinie vorſtellen; ſo iſt APB die Differenz der Entfernungen des Fixſterns vom Planeten. Es iſt nemlich $PBn = AOB$, und $APB = AOB - PAm$, alſo $APB = PBn - PAm$.

Der 1. Zuſatz.

246. Wenn nur für einen Hauptplaneten die Horizontalparallaxe richtig bekannt iſt, ſo kann man ſie für die übrigen ohne weitere Beobachtung durch Rechnung finden. In dem parallactiſchen Dreyeck CHT
221 Fig. ſetze man den Halbmeſſer der Erde $CT = r$, die Entfernung $CH = \delta$, den Winkel $CHT = h$, ſo iſt $\sin h = \frac{r}{\delta}$, und der Sinus der Horizontalparallaxe, oder dieſe Parallaxe ſelbſt, weil ſie allemahl nur klein iſt, verhält ſich umgekehrt, wie die Entfernung δ. Aus der im vor. 245. §. beſchriebenen Beobachtung findet man die Horizontalparallaxe des Planeten für die Entfernung vom Mittelpunct der Erde, worin er ſich zur Zeit der Beobach-

achtung befand: alſo kann man die Horizontalparallaxe nach einer leichten Regel Detri für jede andre Entfernung eben deſſelben, oder auch eines jeden andern Planeten von der Erde finden, wenn nur das Verhältniß dieſer Entfernung zu derjenigen bekannt iſt, worin ſich der beobachtete Planet von der Erde befand als die Beobachtung angeſtellet ward.

Der 2. Zuſatz.

247. Am beſten iſt es, daß man einen ſolchen Planeten zu der Beobachtung wähle, welcher der Erde unter allen übrigen am nächſten kommt, und daß man auch grade die Zeit wähle, wann der Planet in ſeiner Bahn der Erde am nächſten iſt. Eben darum hat man auch dieſe Beobachtungsmethode beym Mars, wenn er dem Gegenſchein mit der Sonne nahe iſt, und bey der Venus wenn ſie nahe bey der untern Zuſammenkunft mit der Sonne iſt, in Anwendung gebracht. Am 6 October 1751 Abends um 10 Uhr 30 Min. beobachtete Herr de la Caille auf dem Vorgebürge der guten Hofnung den Planeten Mars in einer Entfernung von 25° 2′ vom Zenith, und fand zugleich den nordlichen Rand des Planeten 26,7″ nordlicher, als der Stern λ im Waſſermann, (nach Beyers Bezeichnung §.) Zu gleicher Zeit fand Herr Wargentin in Stockholm den Planeten im Mittagskreiſe 68° 14′ vom Zenith entfernt, und ſeinen nordlichen Rand 6,6″ ſüdlicher als eben denſelben Firſtern: alſo war $APB = 33{,}3''$. Ferner iſt $\sin\alpha = \sin 68°14' = 0{,}9287$, $\sin\beta = \sin 25°2' = 0{,}4231$ für den ganzen Sinus $= 1$, und man findet $h = \frac{33{,}3''}{1{,}3518} = 24{,}63''$. Zu eben der

Zeit war die Entfernung des Mars von der Erde = 0,4354, wenn die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde = 1 angenommen wird: alſo kann man ſchlieſſen 1 : 0,4354 = 24,63: Horizontalparallaxe der Sonne in ihrer mittlern Entfernung von der Erde. Dieſe würde alſo = 10,72″ gefunden werden, wenn man ſich auf die Richtigkeit jener Zahlen völlig verlaſſen könnte. M. ſ. Leçons elementaires d'Aſtronomie par M. de la Caille, §. 424. pag. 199. ſqq.

Der 3. Zuſatz.

248. In eben dem Jahr 1751 beobachtete H. de la Caille auf dem Vorgebürge der guten Hofnung und mit ihm zugleich H. de la Lande in Berlin den Mond. Aus dieſen mit möglichſten Fleiſſe angeſtellten Beobachtungen hat H. de la Lande die Horizontalparallaxe des Monds in ſeiner mittlern Entfernung von der Erde 57′ 3″ gefunden. Seine Parallaxe iſt am gröſten, und beträgt 61′ 25″, wenn er ſich beydes zugleich in der Erdnähe und im Gegenſchein befindet; ſie iſt am kleinſten, und beträgt 53′ 53″, wenn er ſich in der Erdferne zugleich in Zuſammenkunft mit der Sonne befindet. Weil übrigens die Erde ein Sphäroid iſt. (244. §.) mithin nicht alle Oerter auf der Oberfläche von ihrem Mittelpunct gleichweit entfernt ſind; ſo iſt die Parallaxe eines Planeten bey gleicher Entfernung vom Mittelpunct der Erde nicht für alle Oerter auf der Erde völlig einerley. Für einen Ort im Aequator iſt ſie am gröſten, und ein Beobachter grade im Erdpol würde ſie am kleinſten finden. Bey den Hauptplaneten, es mögte denn Mars im Gegenſchein, und Venus in der untern

Zuſammenkunft einige Ausnahme machen, iſt der Unterſcheid ſo klein, daß man ihn ſicher aus der Acht laſſen kann. Beym Monde aber wird dieſer Unterſcheid ſchon merklich, die Parallaxe unter dem Aequator übertrift diejenige, welche in der Breite von Paris ſtatt hat, um 9″, dieſe letztere aber übertrift die Parallaxe unter dem Pol um 7″, daß alſo der ganze Unterſcheid an 16″ hinan geht. M. ſ. Abregé d'Aſtronomie par M. de la Lande §. 590. pag. 242.

Der 4. Zuſatz.

249. Man ſetze den Halbmeſſer der Erde $= r$, die mittlere Entfernung des Mondes vom Mittelpunct der Erde $= a$, ſeine Horizontalparallaxe $= h$, ſo iſt $a = \frac{r.\ \text{ſin tot}}{\text{ſin}.\ h}$ (246. §.) Man nehme (248. §.) $h = 57' 3''$, ſo findet man $a\ \frac{10000000.\ r}{165944} = 60{,}261.\ r$. Des Mondes ſcheinbaren Durchmeſſer in der mittlern Entfernung ſey δ, ſo iſt ſein wahrer Halbmeſſer $= \frac{a\ \text{ſin}\ \frac{1}{2}\delta}{\text{ſin tot}}$, (§. Opt.) und $\frac{1}{2}\delta = 15'\ 34\frac{1}{2}''$, (218. §.) Man findet alſo $\frac{\text{ſin}\ \frac{1}{2}\delta}{\text{ſin tot}} = 0{,}0045305$, und den wirklichen Halbmeſſer des Mondes $= 0{,}2730.\ r$.

Der 5. Zuſatz.

250. Der Ausdruck $a = \frac{r.\ \text{ſin tot}}{\text{ſin}.\ h}$ ergiebt, daß die Entfernung eines Weltkörpers vom Mittelpunct der Erde mit dem Sinus der Horizontalparallaxe

im umgekehrten Verhältniß ſtehe: alſo mit der Horizontalparallaxe ſelbſt, wenn dieſe ſehr klein iſt. Für die Sonne iſt die Horizontalparallaxe höchſtens 10″, (247. §.) und aus den neueſten Beobachtungen, welche weiter unten (275. §.) erzählt werden, hat man nur 8,6 Secunden gefunden. Für den Mond war $h = 57' 3'' = 3423''$, alſo iſt die Sonne $\frac{3423}{8,6} = 398$mahl weiter als der Mond von der Erde entfernt. Für den Mond war $a = 60,261 . r$, alſo findet man die Entfernung der Sonne von der Erde $= 23984 . r$. Ihr ſcheinbarer Halbmeſſer in der mittlern Entfernung iſt 16′ 1″ (151. §.) und ſin 16′ 1″ = 46590: alſo ihr wirklicher Halbmeſſer $= \frac{23984 . r . \sin . 16' 1''}{\sin tot} = 111,74 . r$. Man ſetze den Halbmeſſer des Mondes $= \varrho$, ſo iſt $\varrho = 0,273 . r$, (249. §.) alſo $r = 3,663 . \varrho$, und der Halbmeſſer der Sonne $= 111,74 \cdot 3,663 . \varrho = 409,3 . \varrho$.

Der 6. Zuſatz.

251. Weil die Verhältniſſe der Entfernungen der übrigen Planeten von der Sonne gegen die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ſchon bekannt ſind; (213. §.) ſo kann man jene Entfernungen ebenfalls in halben Erddurchmeſſern finden. Nach H. de la Lande ſind die ſcheinbaren Durchmeſſer der Planeten folgende, wenn ſie alle auf diejenigen gebracht werden, unter welchen ſie in der mittlern Entfernung der Sonne von der Erde würden geſehen werden.

Ring

Ring des ♄	6′	40,6″		♁	0′	17,2″
♄	2	51,7		♀	.	16,52
♃	3	13,7		☿	.	7,0
♂	.	11,4		☾	.	4,642

Daraus findet man folgende wirkliche halbe Durchmeſſer

Ring ♄	23,291 . r	♂	0,6628 . r
♄	9,9825 . r	♀	0,9593 . r
♃	11,262 . r	☿	0,4070 . r

Die 12. Aufgabe.

252. Die Entfernung *CM* des Mondes 221 Fig.
vom Mittelpunct der Erde und ſein Abſtand *ZTM* vom Scheitel *Z* des Orts *T* auf der Erdfläche ſind gegeben: man ſoll die Entfernung *TM* des Mondes von der Stelle *T* auf der Erdfläche finden.

Aufl. Man ziehe MP auf TZ ſenkrecht, und ſetze den ganzen Sinus $= 1$, den Winkel ZTM $= \zeta$, die Höhenparallaxe CMT $= p$; ſo iſt PM $=$ CM ſin $(\zeta - p)$, CP $=$ CM coſ $(\zeta - p)$ (28. §. Trig.) TP $=$ CP $-$ CT, und TM $= \sqrt{(PM^2 + PT^2)}$. (125. §. Geom.)

Der 1. Zuſatz.

253. Man findet TM $=$ CM $-$ CT, wenn der Mond im Zenith ſtehet, weil alsdenn M in Q fällt, PM $= 0$, und TP $=$ TQ wird. In andern Fällen wächſt TM mit dem Winkel ζ, und wird am gröſten, wenn $\zeta = 90°$ iſt. Alsdenn nemlich fällt TM mit TH zuſammen, mit eben der Linie fällt auch PM zuſammen, und man findet TH $=$ CM ſin $(90° - p)$ ſehr nahe $=$ CM.

Der 2. Zuſatz.

254. Der ſcheinbare Durchmeſſer des Mondes iſt bey gleicher Entfernung vom Mittelpunct der Erde am kleinſten, wenn er im Horizont erſcheint, am gröſten aber, wenn er im Zenith beobachtet wird. Beym wirklichen Meſſen mit dem Micrometer findet man dies alles auch der Theorie gemäß; nur bey der Schätzung nach dem Augenmaaſſe, kann uns der Mond nahe am Horizont gröſſer erſcheinen, als wenn er dem Zenith nahe iſt, weil unſer Urtheil über die Gröſſe entfernter Sachen nicht immer allein von der Gröſſe des Sehewinkels abhängt. Im Horizont iſt übrigens der ſcheinbare Mondsdurchmeſſer beynahe ſo groß, als wenn er aus dem Mittelpunct der Erde geſehen würde.

Die 12. Aufgabe.

255. **Den aus dem Mittelpunct der Erde geſehenen ſcheinbaren Halbmeſſer der Projection des Erdſchattens auf einer Ebene zu finden, die den Schatten in der Entfernung des Mondes von der Erde ſenkrecht ſchneidet.**

Aufl. Man addire die Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne, und ſubtrahire von der Summe den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne.

Beweis. Es ſey S der Sonne, T der Erde
235 Fig. Mittelpunct, FCG der Erdſchattenkegel, TA die Entfernung des Mondes von der Erde, AB der Halbmeſſer des ſenkrechten Schattenſchnittes in dieſer Entfernung; ſo iſt ATB = BTE − ATE. Ferner iſt BTE = TBF + TDF, und ATE = STD; mithin findet man ATB = TBF + TDF − STD.

Zuſatz.

Zuſatz.

256. In den mittlern Entfernungen iſt die Horizontalparallaxe des Mondes 57′ 3″ (248. §.) der Sonne höchſtens 10″, der ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne = 32′ 2″ ; (151. §. alſo in dieſem Fall der ſcheinbare Halbmeſſer des Erdſchattens 25′ 7″, der ſcheinbare Durchmeſſer = 50′ 18″. Derſelbe übertrift alſo allemahl ſehr anſehnlich den ſcheinbaren Mondsdurchmeſſer. (218. §.

Die 13. Aufgabe.

257. **In einer Zeichnung die vornehmſten Umſtände einer Mondfinſterniß zu entwerfen.**

Aufl. Vor allen Dingen theile man eine grade Linie PQ als ſonſt einen verjüngten Maaßſtab ein, laſſe hier aber die Theile deſſelben Minuten eines Grades bedeuten; theile alſo auch, wenn der Maaßſtab groß genug iſt, jede Minute in 60 Secunden ein, oder wenigſtens jede Minute in 10 gleiche Theile, die alsdenn für 6 Secunden gelten. Nach dieſem Maaßſtabe nehme man CA = CB ſo groß, als der ſcheinbare Halbmeſſer des Erdſchattens dem 256. §. gemäß gefunden iſt, und verzeichne aus dem Mittelpunct C mit dieſem Halbmeſſer einen Kreis AOB, der den Erdſchatten da, wo der Mond durchgehet, vorſtellet. Einer von den Durchmeſſern dieſes Erdſchattenſchnittes liegt in der Ebene der Ecliptik. Wenn alſo AB dieſen Durchmeſſer vorſtellet, und CD darauf ſenkrecht geſetzt wird; ſo ſtellet CD ein Stück des Breitenkreiſes vor, worin ſich der Mond in dem Augenblick befindet, wenn er mit der Sonne im Gegenſchein iſt. Dieſemnach nehme man CD auf der angenommenen Scale von ſovielen Minuten und Secunden, als die Breite des Mondes im Augenblick des Gegenſcheins ausmachen,

236 Fig.

ſo

ſo iſt D die Stelle, wo ſich in eben dieſem Augenblick der Mittelpunct des Mondes befindet.

Man nehme ferner CE ſo groß, als die Breite des Mondes eine Stunde nach dem Gegenſchein mit der Sonne iſt, ziehe EF mit AB parallel, und nehme von der Rechten gegen die Linke zu EF dem Bogen gleich, um welchen ſich der Mond in Anſehung der Grade der Länge in einer Stunde von der Sonne entfernt; ziehe darauf durch D und F die grade Linie FG, ſo iſt dieſe ein Stück der ſcheinbaren Mondbahn; und DF iſt die Gröſſe des Weges, welchen der Mond in ſeiner Bahn in der Zeit von einer Stunde mit ſeiner relativen Bewegung zurück leget. Man kann alſo DF in 60 Minuten eintheilen, und dieſe Theile an beyden Seiten von D nach G und auch über F hinaus auftragen: ſo weiß man von Minute zu Minute vor und nach der Zeit des Gegenſcheins die Stelle, wo ſich der Mittelpunct des Mondes in ſeiner Bahn befinden muß. Auf dieſe Bahn FG laſſe man CL ſenkrecht herab, ſo iſt L die Stelle, wo ſich der Mittelpunct des Mondes zur Zeit der gröſten Verfinſterung befindet. Demnach nehme man LM auf der Scale PQ dem ſcheinbaren Halbmeſſer des Mondes gleich, und beſchreibe den Kreis MN, welcher den Mond vorſtellet, ſo ergiebt ſich die Gröſſe der Verfinſterung vom M bis O, die man nach der bisher noch üblichen Art auch in ſo genannten Zollen ausdrücken kann, wenn MN in 12 gleiche Theile, oder ſo genannte Zolle eingetheilt wird. Weiter nehme man CG = der Summe der ſcheinbaren Halbmeſſer des Erdſchattens und des Mondes, und ſchlage damit aus C einen Bogen, der FG in G und H ſchneidet; ſo ſind das die Stellen, wo ſich der Mittel-

telpunct des Mondes in den Augenblicken befindet, wenn die Finſterniß anfängt und aufhört. Man kann alſo den Zeitpunct, wenn die Finſterniß anfängt und aufhört, oder auch wenn jede andre Gröſſe der Verfinſterung eingetreten iſt, leicht angeben.

Die 14. Aufgabe.

258. **Den aus dem Mittelpunct des Mondes geſehenen ſcheinbaren Halbmeſſer der Projection des Mondſchattens auf einer Ebene zu finden, die den Mondſchatten-Kegel in der Entfernung des Mondes von der Erde ſenkrecht ſchneidet.**

Aufl. Man ſubtrahire den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne ſo wie er aus dem Monde geſehen würde, von der Summe der ſcheinbaren Halbmeſſer des Monds aus der Erde und der Sonne geſehen: der Reſt iſt der geſuchte ſcheinbare Halbmeſſer des Mondſchattens.

Beweis. Wenn in der 237. Fig. alles ſo, wie in der 235ſten gezeichnet wird, nur daß L den Mittelpunct des Mondes FG, LC die Axe des Mondſchattens, LA die Entfernung des Mondes von der Erde vorſtellet; ſo erhellet, wie im 255. §. daß ALB = BLE − ELA ſey, und BLE = LBF + LDF, ELA = SLD: alſo wäre ALB = LBF + LDF − SLD, mithin ALB = der Summe der Horizontalparallaxen der Erde und der Sonne, weniger den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne, alles ſo wie es aus dem Monde würde geſehen werden. Jene Horizontalparallaxen aber ſind zugleich die ſcheinbaren Halbmeſſer des Mondes aus der Erde und der Sonne geſehen. 237 Fig.

Der

Der 1. Zuſatz.

259. Weil die Sonne im Durchmeſſer mehr denn 400mahl gröſſer iſt als der Mond (250. §.) ſo iſt die Länge des Mondſchattens LC = 215. LF, (43 §. Opt.) und LF = 0,273 . r; (248. §.) alſo findet man LC = 58,7 . r Wenn demnach der Mond weiter als um dieſen Abſtand von der Erde entfernt iſt; ſo erſtreckt ſich der volle Schatten nicht ganz bis zur Erde. Weil jedoch die mittlere Entfernnng des Mondes von der Erde 60 halbe Erddurchmeſſer beträgt, (250. §.) ſo erreicht der Mondſchatten doch wenigſtens die Erde beynahe, und wenn der Mond ſeiner Erdnähe nahe iſt allemahl. In der Erdnähe kann der ſcheinbare Durchmeſſer 33′34″ = 2014″ betragen, (218. §.) wenn er in der mittlern Entfernung 31′9″ = 1869″ beträgt: alſo iſt die kleinſte Entfernung $\frac{1869}{2014}$. 60 = 55,7 halbe Erddurchmeſſer.

Der 2. Zuſatz.

260. Der Winkel LCF iſt dem aus der Erde geſehenen ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne gleich, weil die Spitze C des Schattenkegels zur Zeit des Neumonds, wie hier angenommen wird, ſehr nahe eben ſo weit, als der Mittelpunct der Erde von der Sonne entfernt iſt. Der aus dem Monde geſehene Sonnenhalbmeſſer SLD übertrift den Winkel LCF um den Winkel FDL, und es iſt FDL = $\frac{FB}{FD}$. LBF = $\frac{1}{398}$. 15′ 34″ (250. 218. §.) = 2,37″. Wenn alſo nicht die gröſte Schärfe verlangt wird, ſo kann der aus dem Monde geſehene ſcheinbare Halbmeſſer der Sonne mit dem aus der Erde geſehenen

henen für einerley angenommen werden. Eben darum kann auch bey Anwendung d·r Regel des 258. §. der aus der Sonne geſehene ſcheinbare Halbmeſſer des Mondes aus der Rechnung ganz weggelaſſen werden; man ſubtrahirt nur den ſcheinbaren Halbmeſſer der Sonne vom ſcheinbaren Halbmeſſer des Mondes, der Reſt iſt das geſuchte. In ſolchen Fällen, wenn jener dieſen übertrift, erreicht die Spitze des Mondſchattenkegels die Erde nicht.

Der 3 Zuſatz.

261. Der aus dem Monde geſehene ſcheinbare Halbmeſſer ALP des Halbſchattens iſt = LPF + LHF, und LHF = SHD = HCD + HDF, mithin wird ALP = LPF + HCD + HDF. Aber HDF = 2LDF beträgt nur 4,74″, deswegen nimmt man für ALP die Summe der ſcheinbaren Halbmeſſer des Mondes LPF und der Sonne LCF. 237 Fig.

Der 4. Zuſatz.

262. Die ſcheinbare Breite des Halbſchattenringes iſt BLP, und man findet BLP = ALP — ALB. Es war aber ALP = ſemid. ☾ + ſemid. ☉, (261. §.) und ALB = ſemid. ☾ — ſemid. ☉, alſo wird BLP = 2ſemid. ☉ gefunden. Auch erhellet aus der Figur, daß ſehr nahe BLP = BFP = DFK ſey.

Der 6. Lehrſatz.

263. Der Theil *DN* vom Durchmeſſer *DK* der Sonne, welcher dem im Halbſchatten auf der Erde an der Stelle *M* befindlichen Beobachter vom Monde bedeckt erſcheint, verhält ſich zum ganzen Sonnendurchmeſſer *DK* 237 Fig.

wie

wie die Entfernung *QM* des Orts der Beobachtung vom Rande des Halbſchattens zur Breite *OQ* des Halbſchattenringes.

Beweis. Die drey graden Linien DQ, KC, MN, die den Mond bey G berühren, ſchneiden einander ſehr nahe in einerley Punct G, und die Dreyecke DKG, OGQ, ſo wie DGN, MGQ, ſind einander ähnlich. Dieſemnach iſt DN : QM = DG : GQ, und DK : OQ = DG : GQ: alſo auch DN : QM = DK : OQ, und DN : DK = QM : OQ.

Der 1. Zuſatz.

238 Fig. 264. Der Kreis EABe ſtelle die Erdſcheibe vor, ſo wie ſie aus dem Monde würde geſehen werden, und FG den Weg, welchen der Mittelpunct L des Mondſchattens nimmt. Ferner ſey LQ des Halbſchattens ſcheinbarer Halbmeſſer, QC die Breite des Halbſchattenringes und M ſey ein Ort auf der Erde. Aus L beſchreibe man einen Kreis mit dem Halbmeſſer LN ſo groß als der ſcheinbare Halbmeſſer des Mondes, ſo iſt LQ = LN + NQ = ſemid. ☾ + ſemid ☉, (261. §.) folglich NQ = ſemid. ☉ = CN, weil CQ = 2 ſemid. ☉. (262. §.) Aus M beſchreibe man einen Kreis mit dem Halbmeſſer MD = ſemid. ☉; ſo iſt QM : CQ = der vom Monde bedeckte Theil des Durchmeſſers der Sonne : Durchmeſſer der Sonne. (263. §.) Ferner iſt QM = QN − NM, DN = DM − NM, und QN = ſemid ☉ = DM, alſo QM = DN; auch iſt CQ = diam. ☉ = DK: alſo DN : DK = der vom Monde bedeckte Theil des Sonnendurchmeſſers : ganzen Sonnendurchmeſſer. Demnach ſtellt DHNI für dieſen Augenblick den vom Monde bedeckten Theil der Sonnenſcheibe, oder die Phaſe der Finſterniß vor.

Der

Der 2. Zuſatz.

265. Hieraus wird begreiflich, wie es möglich ſey, die Umſtände einer Sonnenfinſterniß, wie ſie von Zeit zu Zeit nach einander eintreten müſſen, in einer Zeichnung darzuſtellen. Man muß nur erwägen, daß der Beobachter im Monde zu eben der Zeit eine Erdfinſterniß ſiehet, wenn für uns auf der Erde eine Sonnenfinſterniß erfolget. Ihm ſcheint der Erdſchatten von der Linken gegen die Rechte zu über der Erdſcheibe wegzurücken, die ihm unter einem ſcheinbaren Halbmeſſer erſcheint, welcher der aus der Erde geſehenen Horizontalparallaxe des Mondes gleich iſt.

Die 14. Aufgabe.

266. In einer Zeichnung die vornehmſten Umſtände einer Erdfinſterniß zu entwerfen.

Aufl. Man theile zuerſt einen Minuten- und Secunden-Maaßſtab wie oben (257. §.) gehörig ein, und zeichne einen Kreis, der die aus dem Monde geſehene Erdſcheibe vorſtellet, im Halbmeſſer ſo groß, als die Horizontalparallaxe des Mondes iſt. (265. §.) Einen Durchmeſſer E*e* dieſes Kreiſes nehme man für denjenigen an, worin die Erdſcheibe von der Ebene der Eccliptik geſchnitten wird; richte OV aus ſeinem Mittelpunct über E*e* ſenkrecht auf, und nehme OV von ſovielen Minuten und Secunden, als die Breite des Mondes im Augenblick der Zuſammenkunft mit der Sonne ausmachen; ſo iſt V die Stelle, wo ſich in eben dieſem Augenblick der Mittelpunct des Mondſchattens befindet. Man nehme ferner OW ſo groß als die Breite des Mondes eine Stunde nachher iſt, ziehe von der Linken gegen die Rechte WX mit AE parallel,

lel, mache WX dem Wege gleich, um welchen der Mond ſich von der Sonne in einer Stunde in Anſehung der Grade der Länge entfernt, und ziehe hiernächſt durch V und X die grade Linie FG. Dieſe iſt nun ein Stück der relativen Bahn, welche der Mittelpunct des Mondſchattens nimmt, worin er alle Stunden einen Weg = VX zurück legt. Man theile alſo VX in 60 Minuten, und trage ſie an beyden Seiten von V nach F und nach G über X hinaus: ſo weis man von Minute zu Minute die Stellen, wo ſich der Mittelpunct des Mondſchattens auf der Erde befindet. Um alſo die Zeit der gröſten Verſinſterung zu finden, ziehe man OR auf FG ſenkrecht. Um die Zeitpuncte für den Anfang und das Ende der Finſterniß zu haben, faſſe man die Summe der beyden Halbmeſſer OE der Erdſcheibe, und LQ des Halbſchattens, = par. hor. ☾ + ſemid. ☾ + ſemid ☉, zwiſchen dem Cirkelinſtrument, und beſchreibe damit aus O Bogen, welche den Weg FG des Schattens in F und G ſchneiden; ſo ſind das die Stellen, wo ſich der Mittelpunct des Schattens im erſten Anfang und am Ende der Finſterniß befindet. Weil nun FG von Minute zu Minute der Zeit nach eingetheilt iſt, ſo erſiehet man daraus zugleich die Zeitpuncte für den erſten Anfang und das Ende der Erdfinſterniß. Nach der hier beygefügten Zeichnung wäre der Anfang XI Uhr 10 Min. Vormittags, das Mittel der Finſterniß grade um II. Uhr, das Ende um IV Uhr 50 Minuten.

Zuſatz.

267. Jeder Ort M auf der Erde läuft täglich in einem Parallelkreiſe herum, der aus dem Mittelpunct

punct der Sonne geſehen wie eine Ellipſe erſcheinen würde. Nur in dem Falle, wenn die Umlaufsaxe der Erde in der Ebene des gröſten Kreiſes liegt, der die Grundfläche der erleuchteten Halbkugel abgiebt, wird die Projection des Parallelkreiſes eine grade Linie. Es 238
ſey nemlich OP die Erdaxe in der Ebene des Kreiſes Fig.
EPB*e*; ſo iſt die Ebene des durch M laufenden Parallelkreiſes auf der Ebene EAPB*e* ſenkrecht, und dieſe geht wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne durchs Auge des in der Sonne angenommenen Beobachters. Man ſtelle ſich vor, dieſer Parallelkreis, deſſen Durchmeſſer AB in der Ebene EPB*e* liegt, und mit ſeiner orthographiſchen Projection (§. Perſp.) einerley iſt, ſey in gleiche Bogen von 15 zu 15 Graden getheilt, von jedem Theilungspunct aber ſey auf AB eine grade Linie ſenkrecht herab gelaſſen, wodurch die mit den Zahlen 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, bezeichneten Puncte beſtimmt werden; ſo ſind das die Stellen, wo der Punct M von Stunde zu Stunde aus der Sonne geſehen wird, nemlich von 7 Uhr Vormittags bis 5 Uhr Nachmittags. Aus Vergleichung dieſer Stellen mit denjenigen, wo ſich in eben den Zeitpuncten der Mittelpunct des Mondſchattens in ſeiner Bahn befindet, laſſen ſich die Umſtände der Sonnenfinſterniß, ſo wie ſie an dem Ort M auf der Erde geſehen werden, herleiten. Wie man in andern Fällen die Ellipſe zeichnen müſſe, welche den Parallelkreis des Ortes M abbildet, lieſſe ſich aus den ſchon vorgetragenen geometriſchen und aſtronomiſchen Theorien ohne weitere Schwierigkeit herleiten, wenn ich nicht gezwungen wäre hier den Vortrag abzukürzen, und das übrige dem

4ten Theil der Anfangsgründe vorzubehalten, welcher auch zu aſtronomiſchen Rechnungen vollſtändigere Anleitung geben wird, als hier geſchehen kann.

Die 15. Aufgabe.

268. **Aus dem Entwurf der Erdfinſterniß die Umſtände der Sonnenfinſterniß herzuleiten, ſo wie ſie aus einem Ort auf der Erde geſehen wird, deſſen geographiſche Länge und Breite gegeben iſt.**

Aufl. Es wird hiebey vorausgeſetzt, daß die
238 Fig. Zeit, welche an dieſem Orte in dem Augenblick gezählt wird, da der Neumond eintritt, bey γ bemerkt, und darnach die Bahn FG des Erdſchattens eingetheilt ſey. Es wird ferner vorausgeſetzt, daß der Parallelkreis des Orts M gehörig gezeichnet, auch in Stunden und Minuten eingetheilt ſey. Nach dieſer Vorbereitung faſſe man den Halbmeſſer LQ des Halbſchattens, oder die Summe der ſcheinbaren Halbmeſſer des Mondes und der Sonne zwiſchen den Spitzen des Cirkelinſtruments, und ſuche zwey Puncte γ und δ, den einen γ in der Bahn des Schattens, den andern δ im Parallelkreiſe, die um jene Summe der Halbmeſſer von einander entfernt ſind, und zugleich mit einerley Zeitpuncten zuſammen gehören: ſo findet man die Zeit des Anfangs der Finſterniß, welches hier 12 Uhr 15 Min. ſind. In dieſem Zeitpunct war der Mittelpunct des Schattens in γ, der Ort M in δ. Die weiterhin folgenden mit einerley Zeit zuſammengehörigen Puncte nähern ſich einander, wie man mit dem Cirkelinſtrument finden kann, ſo lange, bis man auf α und β kommt, die mit 1 Uhr 30 Min. zuſammen gehören: weiter hin aber entfernen ſich die ſo zuſammengehörigen

gen Puncte wieder von einander. Alſo fällt die gröſte Verfinſterung um 1 Uhr 30 Min. Auf ähnliche Art findet man, daß die Puncte ε und χ, welche mit 2 Uhr 45 Min. zuſammengehören, wieder um die Summe der Halbmeſſer des Mondes und der Sonne von einander entfernt ſind: alſo würde mit dieſem Zeitpuncte für den Ort M das Ende der Finſteruiß eintreten.

Der 1. Zuſatz.

269. Wenn der Mond einen Fixſtern ſo nahe kommt, daß er ihn bedecken kann, ſo kann man auf eine völlige ähnliche Art einen Entwurf für die ganze Erſcheinung machen. Der ſcheinbare Durchmeſſer des Fixſterns iſt ſo gut als = 0. Da wo ſonſt an dem Parallelkreiſe des Orts, für den der Entwurf gemacht wird, 12 Uhr hingeſchrieben wird, ſetzt man nun die Zeit hin, wenn der Fixſtern im Meridian erſcheint, und nimmt übrigens auch Rückſicht auf den Unterſcheid der Sternzeit und Sonnenzeit.

Der 2. Zuſatz.

270. Es ſey PQ der Durchmeſſer des Kreiſes 237 Fig.
auf der Erde, welcher dies erleuchtete Segment von dem dunklen abſondert, wovon ſchon bekannt iſt, daß es für eine Halbkugel angenommen werden kann. Nun ſind alle Strahlen, die vom Mittelpunct S der Sonne auf die Erde fallen in einem graden Kegel enthalten, deſſen Spitze S und deſſen Grundfläche der Kreis iſt, wozu der Durchmeſſer PQ gehört, und deſſen Mittelpunct A der Mittelpunct der Erde iſt. Die Axe AS dieſes Kegels ſchneide man in der Entfernung AL des Mondes von

der Erde mit einer darauf ſenkrechten Ebene TV, ſo iſt die Durchſchnittsfigur ein Kreis, wovon RT einen Durchmeſſer vorſtellet, und eben dieſer Kreis iſt eine perſpectiviſche Projection der Erde auf der Ebene TV. Von der Erde aus wird dieſe Projection unter einem Winkel LPR geſehen, und es iſt LPR = ALP − ASP = par. ☾ hor. − par. ☉ hor. Von jeder Stelle P auf der Erde wird der Mittelpunct S der Sonne in R daſelbſt geſehen, wo die Projection der Stelle P hinfällt. In der Ebene TV der Projection der Erde mag ſich nun der Mittelpunct L des Mondes wo er wolle befinden, ſo iſt LPR der aus der Erde geſehene ſcheinbare Abſtand zwiſchen den Mittelpuncten der Sonne und des Mondes. Die Sonne ſelbſt aus P geſehen projicirt ſich auf der Ebene TV in einen Kreis, wozu der Durchmeſſer VF gehört, und der aus der Erde geſehene ſcheinbare Durchmeſſer FPV des auf die Ebene TV projicirten Sonnenbildes iſt mit dem ſcheinbaren Durchmeſſer DPK der Sonne ſelbſt einerley. Dieſe Betrachtungen erläutern und rechtfertigen das bisher beſchriebene Verfahren bey Entwerfung einer Sonnenfinſterniß noch mehr. Man ſiehet daraus, daß bey Zeichnung einer Sonnenfinſterniß die recht genau ſeyn ſollte, der Halbmeſſer OE der Kreiſes, welcher die Erde abbildet, der Differenz der Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne gleich genommen werden müſſe. Bey Zeichnung der Bedeckung eines Fixſterns vom Monde aber bleibt OE der Horizontalparallaxe des Mondes gleich.

Der 3. Zuſatz.

271. Hieraus wird zugleich begreiflich, wie man die Erſcheinungen des Vorüberganges der Venus

oder

oder Mercurs vor der Sonne (160. §.) in einer Zeichnung entwerfen kann. Man nehme an, daß 239
AL die Entfernung der Venus oder Mercurs von Fig.
der Sonne ſey, ſo wird RT die aus der Sonne geſehene Projection der Erde auf einer Ebene, die mit dem Planeten von der Erde gleichweit entfernt iſt. Jedem Ort M auf der Erde erſcheint der Sonne Mittelpunct in *m*, da wo das Bild von M liegt, VF, WX von der Erde geſehen erſcheinen mit dem Durchmeſſer der Sonne unter gleichem Winkel. In der 240. Fig. ſtellet EW*e*X die Sonnenſcheibe vor, 240
ſo wie ſie aus der Erde geſehen auf der Ebene er- Fig.
ſcheint, worauf zugleich die Projection der Erde TR liegt: L iſt der Mittelpunct der Projection, E*e* ein Bogen der Ecliptic, FG der Theil von der Bahn des Planeten, welcher in der Ebene der Projection liegt, worin der Planet den Weg von F nach G von Oſten gegen Weſten nimmt. Wenn nun F und G die Stellen des Mittelpuncts des Planeten in ſeiner Bahn ſind, in welchen er aus dem Mittelpunct der Erde geſehen die Peripherie der Sonne von innen zu berühren ſcheint; ſo iſt LF = LG = ſemid. ⊙ — ſemid. plan. Ferner iſt LA die Breite des Planeten zur Zeit der Zuſammenkunft mit der Sonne, LB der kürzeſte Abſtand vom Mittelpunct der Sonne.

Der 4. Zuſatz.

272. Auf der Erde ſtelle man ſich ein Paar 240
Parallelkreiſe RMNT, *rmnt* vor, wovon einer Fig.
rmnt dem in der erleuchteten Halbkugel befindlichen Pol ſo nahe iſt, daß er ganz oder wenigſtens gröſtentheils in der erleuchteten Halbkugel liegt; ſo wird dem Beobachter *m* die Sonne gar nicht, oder nur

kurze Zeit untergehen, wenn er in der täglichen Bewegung von *r* durch *m* und *n* nach *t*, von Morgen gegen Abend hinter dem erleuchteten Pol herumgeführt wird. Der Beobachter ſey in *m*, wenn der Planet in *p* iſt, und *mp* = LF; ſo ſiehet der Beobachter ſchon die erſte innere Berührung, mithin früher, als ſie aus L geſehen wird. Ferner ſey der Planet in *q*, wenn der Beobachter in *n* anlangt, und wiederum *nq* = LG = LP; ſo ſiehet der Beobachter nun die letzte innere Berührung, die aus L geſehen ſchon erfolgte, als der Planet in G war. Demnach iſt für dieſen Beobachter die ganze Währung des Vorüberganges zwiſchen beyden innern Berührungen länger, als für den Beobachter im Mittelpunct der Erde.

Der 5. Zuſatz.

273. Im Parallelkreiſe RMNT ſey M ein Beobachter, deſſen geographiſche Länge von der Länge des Beobachters *m* um 180° verſchieden iſt, damit derſelbe jenſeits der Erde von Weſten gegen Oſten durch RMNT herum geführt werde, wenn jener Beobachter dieſſeits von *m* nach *n* geführt wird. Der Planet ſey in P, wenn der Beobachter in M iſt, und MP = LF, ſo ſiehet der Beobachter in M die erſte innere Berührung ſpäter, als ſie aus L geſehen wird. Indem ferner der Planet von P nach Q rückt, wird M nach N geführt, und wenn nun wieder NQ = LG = LF iſt, ſo ſiehet dieſer Beobachter die letzte innere Berührung früher als ſie aus L geſehen wird. Dieſemnach iſt für dieſen Beobachter die ganze Währung des Durchganges zwiſchen den innern Berührungen kürzer, als für den Beobachter im Mittelpunct der Erde.

Der

Der 6. Zuſatz.

274. Weil die Verſchiedenheit dieſer Erſcheinungen an verſchiedenen Orten auf der Erde von dem Unterſcheid der Parallaxen des Planeten und der Sonne herrühret, ſo läßt ſich umgekehrt, wenn die Währung des Durchganges an verſchiedenen weit genug von einander entlegenen Orten iſt beobachtet worden, der Unterſcheid dieſer Parallaxen mithin die Parallaxe ſowohl für den Planeten ſelbſt, als auch für die Sonne finden. Denn das Verhältniß der Parallaxen iſt aus dem Verhältniſſe der Entfernungen bekannt. Man nimmt in ſolcher Abſicht die Horizontalparallaxe ſo wie ſie aus andern Beobachtungen (247. §.) ſchon bekannt ſeyn kann, zum Grunde, und berechnet die Währung des Durchganges für zwey ſolche Oerter woſelbſt die Beobachtungen angeſtellet ſind, um das Reſultat der Rechnung mit dem Erfolg bey der Beobachtung zu vergleichen, da dann aus beyder Uebereinſtimmung auf die Richtigkeit der angenommenen Vorausſetzung geſchloſſen wird. So lange der Erfolg bey der Beobachtung mit dem Reſultat der Rechnung nicht übereinſtimmet, ändert man die zum Grunde gelegte Vorausſetzung, bis beydes in Ubereinſtimmung gebracht iſt.

Der 7. Zuſatz.

275. Im Jahr 1769 am 3ten Junius beobachtete H. Hell zu Wardhus die Währung des Durchganges der Venus von 5 St. 53 Min. 14 Sec. die Herrn Green, Cook und Solander auf der Inſel Taiti von 5 St. 30 Min. 4 Sec. alſo und 23 Min. 10 Sec. kürzer. In der Vorausſetzung, daß die Horizontalparallaxe der Sonne 8,5

Sec. betrage, gab die Rechnung für die Zeit des Durchgangs aus dem Mittelpunct der Erde geſehen 5 St. 41′ 56″ zwiſchen beyden innern Berührungen. Nach eben dieſer Rechnung ſollte die Zeit des Durchganges zu Wardhus 10 Min. 52 Sec. mehr, zu Taiti aber 11 Min. 43 Sec. weniger betragen. Beydes zuſammen giebt einen Unterſcheid von 22 Min. 35 Sec. für Wardhus und Taiti, welches mit dem beobachteten Unterſchiede von 23 Min. 10 Sec. bis auf 35 Sec. oder $\frac{1}{30}$ der ganzen Währung übereinkommt. H. de la Lande hat aus Vergleichung aller andern Beobachtungen gefunden, daß die Rechnung damit am beſten übereinkomme, wenn die Sonnenparallaxe zu 8,6″ angenommen wird. (Abregé d'Aſtronomie §. 735. pag. 298.)

Die 25. Erfahrung.

276. Man hat mehrere Fixſterne, und beſonders ſolche Sterne erſter Gröſſe, wovon man vermuthen konnte, daß ſie vielleicht der Sonne und Erde näher als andre ſeyn mögten, mit dem möglichſten Fleiß Jahre lang beobachtet, um zu prüfen, ob vielleicht wegen Verſchiedenheit der Beobachtungsörter in der Erdbahn, wie bey den Planeten (172. §.) eine jährliche Parallaxe zu bemerken ſey, vermöge welcher nicht allein die geocentriſche Länge, ſondern auch die Breite des Fixſterns, wenn man ſich vorſtellet, daß in der 230 Fig. P ein Fixſtern ſey, eine jährlich wiederkehrende periodiſche Aenderung leiden müſte. Allein auſſer einigen andern ſehr geringen ſcheinbaren Bewegungen, wovon man gefunden hat, daß ſie von andern Urſachen herrühren, hat man dergleichen nicht bemerken können.

Man

Man weiß überdem jetzt gewiß, daß vier von den Sternen erſter Gröſſe, Regulus, Aldebaran, die Kornähre der Jungfrau und Antares, nicht 1 Secunde im ſcheinbaren Durchmeſſer haben, weil alsdenn wenn ſie vom Monde bedeckt werden, nicht zwey Secunden Zeit von der erſten Berührung des Mondrandes bis zur völligen Bedeckung verflieſſen.

Zuſatz.

277. Wenn in einem parallactiſchen Dreyeck, 230
SPT über dem Halbmeſſer ST der Erdbahn als Fig.
der Grundlinie einer von den Winkeln an dieſer Grundlinie bey S ein rechter Winkel wäre, und die Parallaxe SPT nur 1 Sec. betrüge, ſo würde die Entfernung SP = 206264 . ST gefunden werden; ſie betrüge alſo 206264 . 23984 halbe Erddurchmeſſer. (250. §.) Bey einen ſo ſehr kleinen ſcheinbaren Halbmeſſer der weniger wie eine Sec. beträgt, würden die Fixſterne gar nicht ſichtbar ſeyn, (16. §. Opt.) wenn ſolches nicht die Stärke und Lebhaftigkeit ihres Glanzes verurſachte. Daher ſchließt man, daß die Fixſterne ihr eigenes Licht haben müſſen, wie die Sonne.

Der 7. Lehrſatz.

278. Ein Beobachter, der ſelbſt in Bewegung iſt, ſiehet ein leuchtendes Object, wenn daſſelbe in Ruhe iſt, wegen der allmähligen Fortpflanzung des Lichts nicht in eben der Richtung, wie es würde geſehen werden, wenn auch der Beobachter in Ruhe wäre: die Abirrung des Lichts findet man alsdenn aus der bekannten relativen Bewegung des leuchtenden Gegenſtandes eben ſo, wie

wie ſie dem 32. §. Opt. gemäß würde gefunden werden, wenn der Beobachter in Ruhe wäre.

241 Fig. **Beweis.** Der Beobachter O bewege ſich in der graden Linie OB gleichförmig mit der Geſchwindigkeit c, ein ſtrahlender Punct aber ſey bey C in Ruhe, und die Geſchwindigkeit des Lichts ſey = C. Alsdenn erfolgt die relative Bewegung des Puncts C in Anſehung des Auges O eben ſo, als wenn der Beobachter in Ruhe wäre, der Punct C aber mit der Geſchwindigkeit c in der Richtung CM mit OB parallel fortrückte. Wenn alſo für einen gewiſſen Zeitpunct das Auge in B befindlich iſt, alsdenn aber OM mit BC parallel gezogen und OM = BC gemacht wird; ſo iſt OM die Richtung, in welcher der ſtrahlende Punct geſehen würde, wenn das Licht ohne alle Zeitfolge aus C nach B käme. In B aber kommt der Strahl CB mit der Geſchwindigkeit C ins Auge, und weil es ſelbſt in Bewegung iſt, ſo wird daſſelbe eben ſo gerührt, als wenn das Licht mit beyden Geſchwindigkeiten, C in der Richtung CB, und c in der Richtung DB, in daſſelbe wirkte. Es hat alſo eben die Empfindung, als wenn das Licht in der Diagonallinie EB des Parallelogramms BCED daſſelbe träfe, und in dieſer Richtung muß der ſtrahlende Punct geſehen werden. Demnach ziehe man OL mit BE parallel, ſo iſt MOL = CBE die Abirrung des Lichts. Im Dreyeck OLM iſt alsdenn die Seite OM = BC, und das Verhältniß OM : ML = C : c gegeben; auch überdem der Winkel OBC = OML: alſo kann man MOL finden.

Der 1. Zuſatz.

279. Es ſey TVWX die Bahn der Erde in der Ebene ABCD der Ecliptik, S ſey die Sonne und F ein

ein Fixſtern, SE die Axe, alſo E ein Pol der Ecliptik, und AEFC ein Breitenkreis durch den Fixſtern. Ferner ſey T die Erde, und dieſe bewege ſich im jetzigen Augenblick mit der Geſchwindigkeit c in der Richtung TZ, welche die Erdbahn in T berührt: die Geſchwindigkeit des Lichts in der Richtung FT ſey = C. Man nehme FT : TZ = C : c, und zeichne das Parallelogramm, FTZM; ſo iſt FTM die Abirrung des Lichts, (278. §.) und der Fixſtern wird in der Richtung TM geſehen. Diesemnach ſcheint der Fixſtern alle Jahre um ſeine wahre Stelle F einen Umlauf zu machen in einer Bahn GMHN, die ſich an dem ſcheinbaren Himmelsgewölbe in eine Ellipſe projicirt, ſo daß die Zwergaxe MN mit der Ecliptik parallel iſt, die zugeordnete Axe GH aber mit einem kleinen Bogen des Breitenkreiſes zuſammen fällt. Die Figur ſtellt den Fall vor, wenn ſich der Stern in Zuſammenkunft mit der Sonne befindet. Hat die Erde ihre Stelle in W, ſo iſt der Stern im Gegenſchein mit der Sonne, in den Geviertſcheinen aber, wenn ſich die Erde in V oder X befindet. In der Zuſammenkunft, oder im Gegenſchein mit der Sonne erſcheint der Stern in den äuſſerſten Puncten M oder N der Zwergaxe ſeiner ſcheinbaren elliptiſchen Bahn. Nach der Zuſammenkunft bis zum erſten Geviertſchein nimmt die Breite des Sterns ab, und iſt beym erſten Geviertſchein am kleinſten: hiernächſt nimmt die Breite zu, bis zum zweyten Geviertſchein, der nach dem Gegenſchein eintritt, da ſie am gröſten iſt.

Der 2. Zuſatz.

280. Wenn die jährliche Parallaxe wegen des Durchmeſſers der Erdbahn merklich wäre, die allmäh-

mählige Fortpflanzung des Lichts aber in die Erſcheinung keinen Einfluß hätte; ſo würde der Stern ebenfalls in einer kleinen elliptiſchen Bahn jährlich umzulaufen ſcheinen, wovon die Zwergaxe mit der Eccliptik parallel wäre. Nun aber würde der Stern bey der Zuſammenkunft mit der Sonne ſeine kleinſte Breite, und beym Gegenſchein ſeine gröſte Breite haben, alſo in dieſen Fällen in den äuſſerſten Puncten der zugeordneten Axe ſeiner ſcheinbaren elliptiſchen Bahn erſcheinen: bey den Geviertſcheinen würde er alſo in den äuſſerſten Puncten der Zwergaxe ſeiner Bahn erſcheinen. Die Beobachtungen lehren, daß alles ſo erfolge, wie es den Schlüſſen des 279. §. gemäß iſt: alſo hat man daraus richtig die Folge ziehen können, daß zwar die jährliche Parallaxe unmerklich ſey. Dennoch aber die Abirrung des Lichts den jährlichen Umlauf der Erde ungemein einleuchtend beweiſe.

Der 3. Zuſatz.

281. Weil die Sonne von der Erde um 23984 Halbmeſſer der Erde entfernt iſt, (250. §.) und das Licht $8\frac{1}{9}$ Min. Zeit braucht dieſen Weg zurück zu legen; (237. §.) ſo beträgt in 1 Minute die Geſchwindigkeit des Lichts 2956 Erdhalbmeſſer. Die Peripherie der Erdbahn von $2 . 3,1416 . 23984 = 150696$ ſolcher Halbmeſſer durchläuft die Erde in 365 T. 5 St. 46 Min. (196. §.) $= 525946$ Minuten; alſo iſt in 1 Minute die Geſchwindigkeit der Erde 0,2865 ihres Halbmeſſers, und die Geſchwindigkeit des Lichts $\frac{2956}{0,2865} = 10318$mahl gröſſer; oder es iſt $\frac{FM}{FT} = \frac{1}{10318} = 0,0000969$,

Aus

Aus den trigonometriſchen Tafeln hat man tang $1' = 0{,}0002909$, für den Sinus totus $= 1$, und dies mit 3 dividirt giebt tang. $20'' = 0{,}0000969 = \frac{FM}{FT}$: mithin muß die gröſte Abirrung des Lichts 20″ betragen, wenn der Stern in der Zuſammenkunft oder im Gegenſchein mit der Sonne iſt. Mit dem allen ſtimmen auch die Beobachtungen völlig überein.

Der 8. Lehrſatz.

282. **Es iſt Kraft nöthig, den Mond in ſeiner Bahn um die Erde, und überhaupt jeden Nebenplaneten in ſeiner Bahn um den Hauptplaneten, ſo wie die Hauptplaneten in ihren Bahnen um die Sonne zu erhalten: dieſe Kraft kann man ſich als eine anziehende Kraft, oder als eine Schwere vorſtellen, welche den Mond eben ſo, wie alle kleinere in der Nähe der Erde befindliche Körper gegen den Mittelpunct der Erde, die Nebenplaneten gegen den Mittelpunct ihres Hauptplaneten, und die Hauptplaneten gegen den Mittelpunct der Sonne treibt.**

Beweis. Jeder Planet, auch der Mond, würde vermöge ſeiner Trägheit entweder ruhen, oder auch in grader Linie mit unveränderter Geſchwindigkeit ſeine Bewegung fortſetzen, wenn keine bewegende Kraft die Richtung und Geſchwindigkeit der Bewegung änderte: (8 – 10. §. Hydraul.) es muß alſo eine Kraft vorhanden ſeyn, welche den Mond gegen die Erde, und die Planeten gegen die Sonne treibt, weil daraus vollkommen begreiflich wird, warum ſich die Bahn krümmen muß. Auf der Erde wirkt die Schwere ſo, als wenn alle kleinere

nere Körper von der Erde angezogen würden, und der Erfolg iſt auch bey den Umlaufsbewegungen der Weltkörper völlig ſo, als wenn die Sonne und der Hauptplanet, der Hauptplanet und ſein Nebenplanet einander wie Magnet und Eiſen gemeinſchaftlich anzögen. Das will aber die Redensart ſagen, der Mond ſey gegen die Erde ſchwer, auch ſey jeder Hauptplanet gegen die Sonne ſchwer, und jeder Nebenplanet gegen ſeinen Hauptplaneten.

Der 1. Zuſatz.

283. Wenn die Schwere in der Entfernung des Mondes von der Erde mit eben der Stärke wirkte, wie ſie in der Nähe der Erdfläche wirkt; ſo würde der Mond in der erſten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß tief gegen die Erde herab fallen. Demnach müſte er auch bey ſeinem Umlauf um die Erde in jeder Secunde gegen die Erde zu um ſoviel von der graden Linie abgelenkt werden, worin er allein wegen der Trägheit ſeine Bewegung fortſetzen würde. Man findet aber mit Hülfe trigonometriſcher Rechnungen, daß dieſe Ablenkung des Mondes von ſeiner gradlinichten Bahn in jeder Minute Zeit nur $15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß betrage. Auf der Erde würde ein ſchwerer Körper in 1 Minute Zeit 3600mahl weiter fallen: (11. §. Hydraul.) alſo iſt die Schwere an der Erdfläche 3600mahl gröſſer als ſie in der Entfernung des Mondes von der Erde iſt. Weil nun die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde 60 halbe Erddurchmeſſer beträgt; (250. §.) ſo leitet das auf die Schlußfolge: **die Schwere ſey dem Quadrat der Entfernung des ſchweren Körpers vom Mittelpunct der Erde umgekehrt proportional.**

Der

Der 2. Zuſatz.

284. Man würde ſchon nach der übrigen Aehnlichkeit vermuthen, daß eben daſſelbe Geſetz der Schwere bey den Hauptplaneten in Anſehung der Sonne ebenfalls ſtatt habe: es läßt ſich das alles aber auch ſonſt noch aus andern Gründen beweiſen, die vornemlich zuerſt H. Newton in ſeinem berühmten Werk: Philoſophiae naturalis principia mathematica, beſonders im 3 Buch: de mundi ſyſtemate ins Licht geſetzt hat. Dies Geſetz der Schwere iſt ganz allgemein: alle Weltkörper ziehen einander gegenſeitig an, der Mond wird nicht nur von der Erde, ſondern auch von der Sonne angezogen, oder dieſe drey Körper ziehen ſich unter einander an. Daraus erklären ſich aufs vollkommenſte, die oben erwehnten ſcheinbaren Unregelmäßigkeiten in der Umlaufsbewegung des Mondes in ſeiner Bahn. Die Sonne beſchleuniget oder verzögert die Bewegung des Mondes, nachdem die Richtung der anziehenden Kraft der Sonne mit der jedesmahligen Richtung der Bewegung des Mondes übereinkommt, oder ihr entgegen geſetzt iſt. Die Aenderungen in der Lage der Mondbahn, und in ihrer Excentricität, ſind ebenfalls Folgen davon. Ueberhaupt wirken alle Planeten vermöge dieſer anziehenden Kräfte auf einander, und verurſachen dadurch kleine Abweichungen von den Geſetzen, nach welchen ein jeder für ſich allein würde um die Sonne geführt werden.

Der 3. Zuſatz.

285. Beym täglichen Umlauf der ſphäroidiſchen Erde um ihre Axe wirken Sonne und Mond ge-

meinſchaftlich beſonders auf diejenige Maſſe der Erde, die rings um den Aequator herum mehr angehäuft, und vom Mittelpunct der Erde weiter entfernt iſt, als die Gegenden um die Pole herum. Die Lage der Ebene des Aequators leidet dadurch Aenderungen; die Durchſchnittslinie des Aequators mit der Ecliptik, welche hier das, was bey den Planetenbahnen die Knotenlinie iſt, muß zurück weichen, auch ſelbſt der Winkel des Aequators mit der Ecliptik muß eine periodiſche Aenderung leiden. Jener Erfolg iſt der Grund des Zurückweichens der Nachtgleichspuncte, (192. §.) und dieſen letztern nennt man das Wanken der Erdaxe. Weil dieſe nemlich allemahl auf der Ebene des Aequators ſenkrecht bleibt; ſo muß ihre Lage mit der Lage der Ebene des Aequators zugleich Aenderungen leiden. Den Beobachtungen gemäß wird die Schiefe der Ecliptik während einer Periode von 9 Jahren auf 18″ gröſſer, und leidet in den folgenden 9 Jahren wiederum eben ſo viele Verminderung.

Anfangs-

Anfangsgründe der Gnomonik.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Sonnenuhr überhaupt iſt nichts anders als eine Zeichnung gewiſſer Linien, oder andrer Merkmahle auf einer Fläche, welche dazu dient, des Tages beym Sonnenſchein die wahre Sonnenzeit anzuzeigen. Die Gnomonik lehrt, wie dergleichen Uhren verzeichnet werden müſſen.

Zuſatz.

2. Die Fläche, worauf die Uhr entworfen wird, kann eben oder krumm ſeyn: hier kann aber nur ein kurzer Unterricht davon ertheilt werden, wie man dergleichen Uhren auf einer ebenen Fläche zeichnet.

Die 2. Erklärung.

3. Der Weiſer an der Sonnenuhr iſt gewöhnlich ein grader Stift, der hier als eine undurchſichtige grade Linie betrachtet, und ſo mit der Uhr verbunden wird, daß der mit der Sonne in ihrer täglichen Bewegung fortrückende Schatten dieſes Weiſers die Stunden und andre kleinere Zeittheile anzeige. Obgleich der Weiſer jede andre Lage haben kann; ſo wird hier doch ein für allemahl angenommen, daß derſelbe mit der Weltaxe parallel ſeyn müſſe.

Der 1. Zuſatz.

4. Der Schatten des gradlinichten Weiſers auf der Ebene der Uhr iſt allemahl eine grade Linie, die mit dem Mittelpunct der Sonne und dem Weiſer in einerley Ebene liegt: (33. §. Opt.) dieſe Schatten-

 linie

linie läuft alſo durch den Punct, worin der Weiſer mit der Ebene der Uhr zuſammen ſtößt. Wenn der Weiſer mit der Uhr parallel iſt, ſo läuft auch der Schatten mit dem Weiſer parallel.

Der 2. Zuſatz.

243 Fig. 5. Der Weiſer AB der Uhr liegt in der Mittagsfläche des Orts, wo die Uhr gebraucht wird. Wenn nemlich durch einen Punct C des Weiſers und die Weltaxe eine Ebene gelegt wird, ſo iſt das die Mittagsfläche, und in derſelben Ebene liegt der Weiſer AB, weil er mit der Weltaxe parallel iſt (3. §.)

Die 3. Erklärung.

6. Jede Ebene durch den Weiſer der Uhr, und durch den Mittelpunct der Sonne kann hier eine **Stundenebene** der Uhr heiſſen, und ihre Durchſchnittslinie mit der Ebene der Uhr eine **Stundenlinie**. Den Punct, worin alle Stundenlinien einander ſchneiden, nenne ich Kürze halber den **Mittelpunct der Uhr**: er iſt einerley mit dem Punct, worin der Weiſer mit der Ebene der Uhr zuſammen ſtößt. **Stundenwinkel** der Uhr ſind diejenigen, unter welchen die Stundenlinien einander ſchneiden. Eine von den Stundenebenen der Uhr fällt mit der Mittagsfläche zuſammen, (5. §.) und die dazu gehörige Stundenlinie heißt **die Mittagslinie der Uhr**.

Zuſatz.

7. Wenn man die Weltaxe ſelbſt für den Weiſer, und die Ebene des Aequators für die Ebene der Uhr annehmen könnte; ſo würde jede Stundenebene der Uhr mit der Ebene eines Stundenkreiſes der Sonne einerley ſeyn. Weil nun eine wahre Sonnenſtunde während der Zeit verfließt, da die Sonne aus einem

Stundenkreiſe in einen andern kommt, der den vorigen unter einem Winkel von 15° ſchneidet; ſo müſten die Stundenlinien einander unter Winkeln von 15° ſchneiden, wenn der Schatten dieſe Linien von Stunde zu Stunde bedecken ſollte.

Die 4. Erklärung.

8. Die Sonnenuhr, heißt eine **Aequinoctialuhr**, wenn die Ebene der Uhr mit dem Aequator parallel iſt, eine **Horizontaluhr**, oder **Verticaluhr**, wenn ihre Ebene mit dem Horizont parallel, oder darauf ſenkrecht iſt. Gewöhnlich beſchreibt man die Verticaluhr auf einer ſolchen verticalen Ebene, welche die Ebene des Meridians ſenkrecht ſchneidet, alſo mit der Ebene des erſten Verticalkreiſes parallel iſt; da ſie dann auf der Seite, welche die Sonne von Süden her beſcheint, die **verticale Mittagsuhr**, auf der andern Seite gegen Norden zu die **verticale Mitternachtsuhr** genannt wird. Man beſchreibt aber auch Uhren auf einer Verticalfläche, die mit der Ebene des Meridians ſelbſt parallel iſt, eine **Morgenuhr** auf der Morgenſeite, eine **Abenduhr** auf der Abendſeite.

Zuſatz.

9. Wegen der ſehr groſſen Entfernung der Sonne von der Erde kann die Ebene der Aequinoctialuhr ſo betrachtet werden, als wenn es die Ebene des Aequators ſelbſt wäre. Auch iſt der jedesmahlige Stundenkreis der Sonne von der Stundenebene der Uhr der Lage nach ſo wenig verſchieden, daß man beyde für einerley annehmen, und den Weiſer der Uhr ſo betrachten kann, als wenn es die Weltaxe ſelbſt wäre. Wenn alſo auf der Aequinoctialuhr die

Stundenlinien einander unter Winkeln von 15° ſchneiden; ſo wird ſie der Schatten von Stunde zu Stunde bedecken. (7. §.)

Die 1. Aufgabe.

10. **Eine Aequinoctialuhr zu zeichnen, und ſie hiernächſt ſo zu ſtellen, daß der Schatten des Zeigers richtig die Stunden und kleinere Zeittheile anzeige.**

Aufl. Auf der Ebene FGHI nehme man die
243 Fig. Mittagslinie CF und in derſelben den Punct C für den Mittelpunct der Uhr willkührlich an. Ferner verzeichne man mit dem Halbmeſſer CF aus dem Mittelpunct C einen Kreis, und theile ihn in gleiche Bogen, F*a*, *ab*, *bc*, u. ſ. f. von 15°; ſo ſind C*a*, C*b*, C*c*, u. ſ. f. die Stundenlinien, welche der Schatten von Stunde zu Stunde bedeckt. Für halbe Stunden und Viertelſtunden, auch wenn die Uhr groß genug iſt, für einzelne Minuten, theile man jene gleich groſſe Stundenwinkel aufs neue in zwey, oder vier, oder 60 gleich groſſe Theile. An der Mittagslinie unten bey F ſetze man 12 Uhr, weil dahin zu Mittage der Schatten fallen muß, wenn ſich die Mittagslinie in der Ebene des Meridians von F gegen C nach Süden erſtreckt. Die Vormittagsſtunden ſchreibe man hiernächſt auf der Weſtſeite, die Nachmittagsſtunden auf der Oſtſeite der Mittagslinie an die dazu gehörigen Stundenlinien, ſo wie ſie nach der Ordnung folgen.

Aus dem Mittelpunct C der Uhr richte man den Weiſer CB auf der Ebene der Uhr FGHI ſenkrecht auf, und neige dieſe Ebene ſo gegen die horizontale Ebene FGKL, daß beyder Durchſchnittslinie FG mit

mit der Mittagslinie FL des Horizonts rechte Winkel mache, und der Neigungswinkel LFC gegen Süden zu der Aequatorshöhe gleich ſey.

Beweis. Es ſey FB eine Verticallinie, ſo iſt die Ebene LFB die Mittagsfläche, weil FL die Mittagslinie iſt, und in dieſer Ebene liegt auch FC (250. §. Geom.) weil GFA, GFC, GFB rechte Winkel ſind. Weil nun AFC als die Aequatorshöhe ein ſpitzer Winkel iſt, ſo wird der Weiſer CB gegen den Horizont FGKL verlängert mit der Mittagslinie in A zuſammen ſtoſſen, ſo daß FAC der Polhöhe gleich iſt. Dieſemnach iſt der Weiſer nun mit der Weltaxe parallel: denn er liegt mit ihr in einerley Ebene des Meridians, und beyde machen mit der Scheitellinie FA gleiche Winkel. Weil nun die Weltaxe auf der Ebene des Aequators ſenkrecht iſt, ſo iſt auch der Weiſer darauf ſenkrecht, (256. §. Geom.) folglich die Ebene FGHI mit dem Aequator parallel. (269. §. Geom.) Demnach hat nicht allein der Weiſer ſeine rechte Stellung, (4. §.) ſondern auch die Ebene der Uhr hat die richtige Lage: (8. §.) auch ſind die Stundenlinien richtig gezogen. (9. §.)

Der 1. Zuſatz.

11. Die Sonne befindet ſich nur ein halbes Jahr nordwärts und das andre halbe Jahr südwärts des Aequators. Wofern alſo die Aequinoctialuhr das ganze Jahr hindurch ihre Dienſte leiſten ſoll; ſo müſſen die Stundenlinien auf beiden Seiten der Ebene der Uhr verzeichnet werden, und der Zeiger muß die Ebene der Uhr ſenkrecht durchboren, damit er an beyden Seiten ſeinen Schatten auf die Uhr werfen könne. Weil man aber an der untern

Seite den Gang des Schattens nicht bequem wahrnehmen kann, wenn die Aequatorshöhe weniger als 45° beträgt: ſo macht man lieber die Einrichtung ſo, daß man den Gang des Schattens auch von oben her wahrnehmen kann, wenn gleich die untere Seite von der Sonne beſchienen wird. Man giebt ihr die Geſtalt eines Ringes, deſſen Ebene dem Aequator parallel liegt, ſo fällt ein Theil vom Schatten des Weiſers an den innern Umfang des Ringes und bezeichnet die Tagesſtunde, wenn gleich die Stundenabtheilung und die Stundenzahlen nur auf der obern Seite befindlich ſind.

Der 2. Zuſatz.

12. Wenn man eine Stundenlinie Cb der Aequinoctialuhr bis an ihre Durchſchnittslinie FG mit der horizontalen Ebene FGKL in β verlängert, und alsdenn aus dem Punct A, wo der Weiſer die Mittagslinie dieſes Horizonts trift, nach β die grade Linie Aβ zieht: ſo wirft der Weiſer AB ſeinen Schatten auf Aβ, wenn der Schatten eben des Weiſers auf die Stundenlinie Cβ der Aequinoctialuhr fällt. Denn Aβ iſt die Durchſchnittslinie der Stundenebene mit dem Horizont.

Der 3. Zuſatz.

13. Dieſemnach kann die Stundenlinie Aβ der Horizontaluhr auch ſo gefunden werden. Auf der Mittagslinie des Horizonts nehme man FP = FC, und den Winkel FPβ = FCb; ſo laufen Pβ und Cb in β zuſammen: mithin iſt Aβ die Stundenlinie der Horizontaluhr, die mit dem Stundenwinkel FCb der Aequinoctialuhr zuſammen gehört.

Die 2. Aufgabe.

14. **Eine Horizontaluhr zu zeichnen, wenn die Polhöhe gegeben iſt.**

Aufl.

Aufl. Man ziehe die Mittagslinie FL, und 244 Fig.
ſchneide ſie in F mit einer andern graden Linie DG ſenkrecht: ſo kann man DG für die Grundlinie der Uhr annehmen. An FL zeichne man den Winkel LFC, und mache ihn der Aequatorshöhe gleich, als der Ergänzung der Polhöhe zu 90°. Man nehme ferner FC von willkührlicher Gröſſe, und zeichne an C einen rechten Winkel FCH, ſo wird CH verlängert die Mittagslinie FL in A ſchneiden, und dieſer Punct A iſt der Mittelpunct der Horizontaluhr, wenn FC für den Halbmeſſer der Aequinoctialuhr und die Grundlinie DG für diejenige angenommen wird, worin die Ebenen beyder Uhren einander unter dem Winkel AFC ſchneiden. Ferner nehme man auf der Mittagslinie FP = FC, beſchreibe aus P mit dem Halbmeſſer PF einen Kreis, theile ihn bey *a*, *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, u. ſ. f. ſo ein, als wenn man aus dem Mittelpunct P eine Aequinoctialuhr zu zeichnen hätte, und verlängere die Theilungslinien P*a*, P*b*, P*c*, P*e*, P*f*, P*g*, u. ſ. f. bis an die Grundlinie DG in α, β, γ, ε, ζ, η, u. ſ. w. Nun ziehe man aus A die Stundenlinien der Horizontaluhr in die eben gefundenen Theilungspuncte der Grundlinie DG.

Die Uhr wird horizontal und ſo geſtellt, daß FL mit der Mittagslinie zuſammenfalle, und A gegen Süden, F gegen Norden liege. Die Vormittagsſtunden werden, wie die Figur zeigt, an der Weſtſeite, die Nachmittagsſtunden an der Oſtſeite den Stundenlinien beygefügt. Die 6ſte Stundenlinie läuft mit der Grundlinie DG parallel. Weil übrigens nach 12 Stunden die Sonne auf der andern Seite der Weltaxe in die Ebene deſſelben Stunden-

kreiſes wieder kommt; ſo genügt es, die Stundenlinien für die 12 Tagesſtunden von 6 Uhr früh bis 6 Uhr Abends zu ſuchen: die übrigen werden gefunden, wenn man jene durch den Mittelpunct der Uhr nach der andern Seite hin verlängert. Der Zeiger muß in dem Punct A ſo aufgeſetzt werden, daß er mit AF in einer Ebene liegt, welche die Ebene der Uhr ſenkrecht ſchneidet, und er muß ſich gegen AF unter einem Winkel neigen, welcher der Polhöhe gleich iſt.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflöſung folgt ganz leicht aus dem 13. §.

Der 1. Zuſatz.

15. Ueber FG in der 243 Figur ſtehe die verticale Ebene FMNG, und FM ſey ihre Durchſchnittslinie mit der Ebene AFM des Meridians, worin der Weiſer liegt. Wenn derſelbe in B mit FM zuſammen ſtößt, ſo iſt BF die Mittagslinie der verticalen Mittagsuhr, B ihr Mittelpunct, und Bβ eine Stundenlinie dieſer Mittagsuhr, welche mit dem Stundenwinkel FC*b* der Aequinoctialuhr zuſammen gehört. Wenn alſo FQ = FC genommen, und der Winkel FQβ = FC*b* genommen wird, ſo hat man β durch Zeichnung auf der Ebene der verticalen Mittagsuhr gefunden, und kann die Stundenlinie Bβ ziehen.

243 Fig.

Der 2. Zuſatz.

16. Weil das rechtwinklichte Dreyeck BCF für die verticale Mittagsuhr eben das iſt, was ACF für die Horizontaluhr war; ſo kann man die verticale Mittagsuhr nach eben den Regeln wie die Horizontaluhr zeichnen. Nur muß der Winkel AFC in der 244 Figur für die verticale Mittagsuhr der Polhöhe ſelbſt

243 Fig.

gleich

gleich gemacht werden, damit FAC ihrer Ergänzung zu 90° gleich ſey. Denn es iſt in der 243 Figur FBC = 90° — FAC = 90° — alt. poli, und was hier FBC iſt, das muß in der 244 Fig. FAC ſeyn, wenn es die verticale Mittagsuhr werden ſoll.

Der 3. Zuſatz.

17. Die Südſeite der Verticalfläche FMNG 243 Fig.
kann die Sonne nicht früher als 6 Uhr Vormittags, und nicht ſpäter als 6 Uhr Abends beſcheinen: daher bringt man frühere Vormittags- und ſpätere Nachmittagsſtunden an der Nordſeite an unter dem Nahmen der verticalen Mitternachtsuhr. Der Zeiger BD muß alsdenn oberhalb B gegen die Fläche der Uhr unter dem Winkel EBD geneigt und dieſer Winkel der Ergänzung der Polhöhe gleich ſeyn.

Der 4. Zuſatz.

18. Wenn die Polhöhe = 90° iſt, ſo wird im 244 Fig.
Dreyeck ACF (244 Fig.) der Winkel AFC = 0, der Punct C fällt mit A, alſo auch P mit A zuſammen, und die Eintheilung der Horizontaluhr kommt mit der Eintheilung der Aequinoctialuhr überein, wie der Natur der Sache gemäß iſt: denn unter dem Pol ſelbſt iſt der Horizont mit dem Aequator parallel. Wenn dagegen die Polhöhe = 0 alſo AFC = 90° iſt; ſo würde FC mit FG zuſammen fallen, und CH mit FA parallel werden. Unter dem Aequator iſt die Polhöhe = 0, und der Horizont mit der Weltaxe parallel: demnach muß auch der Weiſer mit der Ebene der Uhr parallel ſeyn, und die Uhr kann keinen Mittelpunct haben, worin die Stundenlinen zuſammenlaufen.

Die

Die 3. Aufgabe.

245 Fig. 19. In dem beſondern Fall, wenn die Polhöhe = o iſt, die Horizontaluhr zu zeichnen.

Aufl. Die Ebene der Aequinoctialuhr HFI ſteht nun über der Grundlinie DG auf dem Horizont GHKD ſenkrecht, der Weiſer AB iſt mit der Mittagslinie FL im Horizont parallel, und der Punct A (243 Fig.) worin ſonſt CA mit der Mittagslinie FL zuſammenläuft, iſt von F unendlich weit weggerückt. Weil nun im Horizont die Stundenlinien aus α, β, γ, ε, ζ, η, u. ſ. w. nach A laufen müſſen, ſo daß A ihren Vereinigungspunct abgäbe: ſo erhellet, daß in dem jetzigen beſondern Falle dieſe Stundenlinien aus α, β, γ, ε, ζ, η, mit FL parallel gezogen werden müſſen. Um alſo die Puncte α, β, γ, ε, ζ, η, in der Grundlinie DG der Horizontaluhr zu finden, nimmt man auf der Mittagslinie FP dem Halbmeſſer FC der Aequinoctialuhr gleich, und verfährt wie es im 14 §. der dortigen Auflöſung gemäß iſt. Den Weiſer OC befeſtiget man hiernächſt in einer über der Mittagslinie lothrechten Ebene ſo in paralleler Lage mit dem Horizont, daß ſeine Entfernung von der Ebene der Uhr FC = EO = FP ſo groß wird, als man den Halbmeſſer der Aequinoctialuhr angenommen hat.

Der 1. Zuſatz.

20. Man kann dieſe Uhr, die eigentlich nur unter dem Aequator als Horizotaluhr dient, unter jeder Polhöhe brauchen, wenn man ſie ſo ſtellt, daß die Ebene der Uhr ſo wie der damit parallele Weiſer mit der Weltaxe parallel, und zugleich auf der Mittags-

tagsfläche ſenkrecht iſt. Zu dem Ende ziehe man BK im Horizont auf der Mittagslinie ſenkrecht, lege an BK die Ebene BKND der Uhr, und neige ſie (bey uns in Europa) nach Norden hin gegen den Horizont unter einem Winkel MKN, welcher der Polhöhe gleich iſt. Die ſo geneigte Uhr heißt nun eine Polaruhr, und ſie iſt unter dem Aequator beydes zugleich Horizotaluhr und Polaruhr. 246 Fig.

Der 2. Zuſatz.

21. Unter dem Aequator beſcheint die Sonne nie die untere Seite der Polaruhr; die obere Seite wird an jedem Orte von 6 Uhr früh, bis 6 Uhr Abends beſchienen. An Orten, die weiter gegen den Pol zu liegen, beſcheint die Sonne auch im Sommer die untere Seite der Uhr, und man kann leicht noch einige Frühſtunden und Abendſtunden darauf bringen. Die Uhr muß alsdenn an der untern Seite einen beſondern Weiſer haben.

Der 3. Zuſatz.

22. Der Vorausſetzung gemäß muß die Mittagslinie EF der Polaruhr in der Mittagsfläche liegen, und gegen den Horizont unter einem Winkel geneigt ſeyn, welcher der Polhöhe gleich iſt. Bey unverrückter Lage der Linie EF drehe man die Ebene 246 Fig.
BKND um EF als eine Are von Abend gegen Morgen ſo lange bis BKND mit der Ebene des Meridians zuſammen fällt; ſo kommt nun BK in die Lage wie es die 247 Figur vorſtellt. Ziehet man KL ho- 247 Fig.
rizontal, ſo iſt ELK die Polhöhe, EKL die Aequatorshöhe. Die Aequinoctialuhr HFI hat immer noch ihre rechte Lage behalten: nur wird der Schatten des Weiſers CO um 12 Uhr Mittags die Stundenlinie CI bedecken, und gar nicht auf die Ebene

BKND

BKND fallen. Um 6 Uhr früh fällt der Schatten auf CF: alſo gehört die Linie FE lothrecht unter dem Weiſer mit 6 Uhr frühe zuſammen, und die folgenden nach G zu mit den Vormittagsſtunden wie ſie gegen Mittag zu aufeinander folgen. Die Stundenlinien an der andern Seite von EF gehören mit 5 Uhr und 4 Uhr frühe zuſammen, und überhaupt fällt in dieſer Lage der Ebene BKND der Schatten des Weiſers auf jede Stundenlinie um 6 Stunden früher, als in der Lage, welche dieſe Ebene als Polaruhr haben muß. Demnach iſt auf dieſe Art die Polaruhr in eine **Morgenuhr** verwandelt worden.

Der 4. Zuſatz.

246 Fig. 23. Wenn die Polaruhr BKND um EF als eine Axe von Oſten gegen Weſten zu ſo lange gedrehet wird, bis die Ebene der Uhr mit der Ebene des Meridians zuſammen fällt; ſo verwandelt ſie ſich in die verticale **Abenduhr**. Auf jede Stundenlinie fällt nun der Schatten 6 Stunden ſpäter, als in der Lage, welche die Ebene der Uhr als Polaruhr haben muß: demnach fügt man dieſer Regel gemäß den Stundenlinien nur andre Zahlen bey.

Anmerkung.

24. Wenn es hier nicht zu weitläuftig wäre, ſo lieſſe ſich aus dem bisherigen leicht herleiten, wie auf jeder Ebene, deren Lage gegen den Horizont und Meridian gegeben iſt, eine Sonnenuhr verzeichnet werden könne. Man findet Regeln ſolches zu bewerkſtelligen, bey den practiſchen Schriftſtellern und unter andern mehr künſtlichen als nützlichen Dingen auch Anweiſungen dazu, wie der Schatten die Zeichen des Thierkreiſes zeigen könne, worin ſich jedesmahl die Sonne befindet. Wer ſich bisher die Theorie gründlich bekannt gemacht hat, und vielleicht eine nähere Veranlaſſung erhält, dergleichen zu brau-

brauchen, der wird ſich ſelbſt beſſer helfen, als ihn die blos practiſchen Schriftſteller gewöhnlich leiten, welche die Regeln ohne Beweis vortragen. M. ſ. unter andern Bions Mathematiſche Werkſchule im 8. Buch. 289. S. der Ueberſ.

Anfangsgründe der Chronologie.

Die 1. Erklärung.

1. Die Chronologie lehrt, wie die im bürgerlichen Leben eingeführten Eintheilungen der Zeit, vornemlich die bürgerlichen Jahre und Monathe mit den aſtronomiſchen in eine richtige Vergleichung gebracht werden können.

Die 2 Erklärung.

2. Die Aſtronomen rechnen den Anfang des Tages vom Mittage an und zählen 24 aſtronomiſche Stunden in einem fort, bis zum Augenblick, da der nächſtfolgende Mittag eintritt. Dagegen fängt der bürgerliche Tag 12 Stunden früher um Mitternacht an, man zählt wie bekannt iſt, bis Mittag 12 Stunden, und vom Mittage bis zur nächſten Mitternacht abermahl 12 Stunden. Die alten Babyloniſchen Stunden zählt man vom Aufgange, die Italiäniſchen aber vom Untergange der Sonne bis auf die 24ſte fort. Eine Jüdiſche oder Planetenſtunde iſt der 12te Theil der Zeit vom Aufgange der Sonne bis zum Untergan-

ge.

ge. Dieſe Zeit, ſo lange die Sonne über dem Horizont bleibt, heißt auch der natürliche Tag, und wird von der natürlichen Nacht, ſo lange die Sonne unter dem Horizont iſt, unterſcheiden, die alsdenn ebenfalls in 12 Planetenſtunden eingetheilt wird. Die bey uns gewöhnliche Eintheilung einer Stunde in 60 Minuten, einer Minute in 60 Secunden, u. ſ. f. iſt bekannt. Die Juden haben von den alten Chaldäern eine Eintheilung der Stunde in 108 Helakim angenommen, ſo daß 18 Helakim eine Minute machen.

Die 3. Erklärung.

3. Der Anfang einer fortlaufenden Reihe von Jahren, heißt die Jahrrechnungsgränze, Epoche; eine immer wieder von forne anfangende Reihe von Jahren nennt man einen Cykel und mehr ſolche Cykel, wenn ſie zuſammen genommen als ein chronologiſches Ganzes betrachtet werden, machen eine Periode aus. Beym fortzählen mehrerer Jahre, Monathe, Wochen, Tage, Stunden, u. ſ. f. braucht man das Wort laufende Zeit, wenn ſie noch nicht völlig verfloſſen ſind.

Der 1. Zuſatz.

4. Bey der Chriſtlichen Jahrrechnung iſt das Jahr der Geburt Chriſti die Epoche. Wenn nun ein gewiſſer Zeitpunct, etwa der Augenblick des Sommer-Sonnenſtillſtandes auf die Art angegeben wird, derſelbe ſey erfolget im Jahr 1781 am 21 Junius um 4 Uhr 34 Min. 57. Sec. Morgends; ſo iſt das laufende Jahr, der laufende Monath, und der laufende Tag gemeint, die Stunden, Minuten und Secunden aber ſind für dieſen Augenblick ſchon verfloſſene Zeit.

Der 2. Zuſatz.

5. Wenn für einen gewiſſen Augenblick die bürgerliche Zeit angegeben wird, ſo kommt ſie in den 12 Nachmittagsſtunden mit der aſtronomiſchen überein: nur daß man den Mittag für den Anfang des Tages annehmen muß. Wofern es aber Vormittagsſtunden ſind, ſo muß man 12 Stunden dazu addiren, und die Anzahl der Tage dagegen um Eins vermindern, um eben den Zeitpunct aſtronomiſch anzugeben. Trat der Sommer-Sonnenſtillſtand am 21ſten Junius um 4 Uhr 34 Min. 57 Sec. Morgens nach bürgerlicher Zeit ein; ſo war das am 20 Junius um 16 Uhr. 34 Min. 57 Sec.

Die 4. Erklärung.

6. Das gemeine Julianiſche 45 Jahr vor Chriſti Geburt eingeführte Jahr (209. §. Aſtron.) hat 365 das Schaltjahr 366 Tage. Der Schalttag (biſſextus) fällt in jedem vierten Jahr auf den nächſten Tag nach dem 23ſten Februar. Jedes Jahr hat 12 bürgerliche Sonnenmonathe, deren Nahmen vom Januar bis zum December allgemein bekannt ſind. Der Februar hat im gemeinen Jahr 28 im Schaltjahr 29 Tage. Vier andre Monate, nemlich April, Junius, September, November, haben 30 Tage, die übrigen ſieben aber 31 Tage.

Der 1. Zuſatz.

7. Das vierte Jahr der Chriſtlichen Aere oder Jahrrechnung iſt ein Schaltjahr. Wenn alſo die Jahrzahl mit 4 dividirt aufgeht, ſo iſt das laufende Jahr ein Schaltjahr: ſonſt zeigt der Reſt an, das wievielte es nach dem lezten Schaltjahr ſey.

Der 2 Zuſatz.

8. Weil jede Woche aus 7 Tagen beſtehet, ſo kommen auf jedes Jahr 52 Wochen und 1 Tag im gemeinen Jahr, zwey Tage im Schaltjahr. Daher kommt es, daß ſich das gemeine Jahr mit eben dem Wochentage endiget, womit es anfängt, das Schaltjahr aber mit dem nächſtfolgenden. Jedes nach einem gemeinen folgende Jahr fängt alſo mit dem Wochentage an, welcher auf dem folgt, womit das nächſtvorhergehende anfieng; und wenn keine Schaltjahre wären, ſo würde nach einem Cykel von 7 Jahren das Jahr wieder mit einerley Wochentage anfangen. Allein nach jedem Schaltjahre fängt das nächſte gemeine Jahr mit dem zweyten nach demjenigen Wochentage an, womit das Schaltjahr anfieng: dieſerwegen kann allererſt nach 7 Schaltjahren, alſo nach einem Cykel von 28 Jahren, dieſelbe Ordnung der Wochentage für den Anfang des Jahres von neuen anfangen.

Die 5 Erklärung.

9. Man bezeichne die erſten ſieben Tage des Jahres mit den erſten 7 Buchſtaben von A bis G, und wiederhohle es durchs ganze Jahr für jede folgende 7 Tage; ſo wird während eines ganzen gemeinen Julianiſchen Jahres mit einerley Wochentage auch einerley Buchſtab zuſammen gehören. Einer davon wird alſo mit dem Sonntage zuſammen gehören, und man nennt ihn daher den Sonntagsbuchſtaben.

Der 1. Zuſatz.

10. In jedem gemeinen Jahre erhält jeder Monathstag ſeinen eigenen Buchſtaben. Der 1ſte

1ſte, 8te, 15te, 22ſte und 29ſte Januar erhält A; der 1ſte, 8te, 15te, 22ſte Februar erhält D. Der 29ſte würde wieder D erhalten, allein das iſt im gemeinen Jahre ſchon der 1ſte März: alſo fangen Februar und März beyde mit D an. Im Schaltjahr würde der März mit E anfangen, wenn der 29ſte Februar D erhielte: um das zu vermeiden bezeichnet man im Schaltjahr den 24ſten Februar als den Schalttag mit E wie den 23ſten, und rechnet beyde Tage gleichſam für einen Tag. Dadurch bringt man zuwege, daß auch in den folgenden Monathen jeder Monathstag ſeinen eigenen Buchſtaben behält. Es ſind durchs ganze Jahr folgende für den 1ſten des Monaths

A	Januar	G	Julius
D	Februar	C	Auguſt
D	März	F	September
G	April	A	October
B	May	D	November
E	Junius	F	December.

Der 2. Zuſatz.

11. Weil im nächſtfolgenden Jahre der erſte Monathstag nicht mehr derſelbe Wochentag, ſondern nach Ablauf eines gemeinen Jahres der nächſtfolgende iſt; (7. §.) ſo hat nun dieſer Wochentag nicht mehr denſelben Buchſtaben, wie im vorigen Jahre, ſondern der Buchſtab iſt auf den nächſtfolgenden Wochentag gerückt. Hatte der Sonntag im vorigen Jahr A, ſo hat im folgenden der Montag A, alſo der Sonntag G. Auf jeden Wochentag fällt alſo nun ein Buchſtab welcher dem vorangeht, welcher im vorigen Jahre auf denſelben Wo-

chentag fiel. Dieſemnach hat jedes folgende Jahr einen Buchſtaben als Sonntagsbuchſtab, welcher in der Ordnung des Alphabeths dem Sonntagsbuchſtaben des verfloſſenen Jahres vorangeht.

Der 3. Zuſatz.

12. Im Schaltjahr behält jeder Wochentag ſeinen Buchſtaben nur bis zum 23ſten Februar. Der 24ſte ſollte F haben, und man giebt ihm E, alſo einen Buchſtaben, der um ſeine Stelle im Alphabeth weiter rückwärts liegt. Dies erſtreckt ſich eben ſo auf alle Wochentage nach dem 23ſten Februar; mithin auch auf den Sonntag: alſo hat das Schaltjahr zwey Sonntagsbuchſtaben, wovon einer bis zum 23ſten Februar gilt, der andre, welcher im Alphabeth jenem vorangehet, nach dem 23ſten Februar.

Die 6. Erklärung.

13. Der Sonntagsbuchſtabencirkel, oder wie man ihn nicht ſehr richtig nennt, der Sonnencirkel, iſt ein Zeitlauf von 28 Jahren, nach welchem einerley Folge der Sonntagsbuchſtaben von neuen anfängt. Der Abt Dionyſius, Exiguus, der Uhrheber unſrer jetzigen Jahrrechnung von Chriſti Geburt, welcher im Anfange des 6ſten Jahrhunderts lebte, ſetzt den Anfang des Sonnencirkels 9 Jahr vor Chriſti Geburt ſo, daß das erſte Jahr der Chriſtlichen Jahrrechnung das 10te im Sonnencirkel iſt, und B zum Sonntagsbuchſtaben hat.

Der 1. Zuſatz.

14. Nach dieſen Angaben erhält man die nachſtehende

Son-

Sonntagsbuchſtabentafel für die Julianiſche Jahrform

1	GF	8	E	15	C	22	A
2	E	9	DC	16	B	23	G
3	D	10	B	17	AG	24	F
4	C	11	A	18	F	25	ED
5	BA	12	G	19	E	26	C
6	G	13	FE	20	D	27	B
7	F	14	D	21	CB	28	A

Der 2. Zuſatz.

15. Wenn man 9 zur Jahrzahl addirt, und die Summe mit 28 dividirt, ſo zeigt der Quotient, wieviele Sonnencirkel ſeit dem 9ten Jahr vor Chriſti Geburt verfloſſen ſind, und der Reſt giebt an, wieviele Jahre im laufenden Sonnencirkel bis zum gegenwärtigen verfloſſen ſind. Eben dieſe zuletzt erwehnte Zahl heißt gemeiniglich Kürze halber der Sonnencirkel, und wenn man in der Tabelle des 14. §. nachſiehet, ſo ſteht der Sonntagsbuchſtabe dabey.

Die 7. Erklärung.

16. Die Gregorianiſche Jahrrechnung, welche der Pabſt Gregorius der XIII ſeit dem Jahr 1582 eingeführt hat, unterſcheidet ſich darin von der Julianiſchen, daß wegen des Ueberſchuſſes eines Julianiſchen Jahres über das wahre tropiſche Sonnenjahr alle vierhundert Jahre drey Tage weniger gerechnet werden, als nach der Julianiſchen Jahrform geſchehen müſte.

Der 1. Zuſatz.

17. Man ſubtrahire

vom Jul. Jahr	365 T.	5 St.	59 Min.	60 Sec.
das Trop. ☉ Jahr	365 T.	5 St.	48 Min.	$45\frac{1}{2}$ Sec.
ſo iſt der Reſt			11 Min.	$14\frac{1}{2}$ Sec.

Man multiplicire ſie mit 400 ſo findet man 4496 Min. 40 Sec. oder 3 Tage 2 St. 56 Min. 40 Sec. und daraus ergiebt ſich, daß die Gregorianiſche Jahrrechnung alle 400 Jahre nur um 2 St. 56 Min. 40 Sec. zuviel fehle, da ſtatt deſſen die Julianiſche Jahrrechnung um 3 Tage 2 St. 56. Min. 40 Sec. zuviel fehlt.

Der 2. Zuſatz.

18. Seit der Nicäniſchen Kirchenverſammlung im Jahr 325 waren 1257 Jahre bis 1582 verfloſſen. Man multiplicire 11 Min. $14\frac{1}{2}$ Sec. mit 1257, ſo findet man 9 T. 19 St. 30 Min. $46\frac{1}{2}$ Sec. alſo endigte ſich das Julianiſche Jahr 1582 beynahe ſchon um 10 Tage ſpäter, als ſich das wahre tropiſche Jahr endigte, und der Erfolg war, daß die Nachtgleichen und Sonnenſtände ſchon 10 Tage rückwärts gerückt waren.

Der 3. Zuſatz.

19. Hieraus ergiebt ſich der Grund, weßwegen im Jahr 1582 ſtatt des 5 Octobers der 15te beſchrieben ward: man zählte ſolchergeſtalt in dieſem Jahre 10 Tage weniger, und brachte dadurch zuwege, daß dieſes 1582 Jahr an eben dem Monathstage ſich wieder mit dem tropiſchen Jahre zugleich endigte, an welchem es ſich im Jahr 325 geendiget hatte. Die Frühlingsnachtgleiche, welche vom 21 bis zum 11 März zurück gerückt war, fiel nun wieder auf den 21ſten März. Um eben den Fehler für die Zukunft zu verhüten, wird feſtgeſetzt, daß jedes hundertſte Jahr, welches nach dem Julianiſchen Calender ein Schaltjahr ſeyn würde, dreymahl hinter einander ein gemeines Jahr, das viertemahl aber

aber ein Schaltjahr ſeyn ſollte. Das Jahr 1600 blieb ein Schaltjahr, aber 1700 ward ein gemeines Jahr. Eben ſo werden die Jahre 1800 und 1900 gemeine Jahre, das Jahr 2000 aber ein Schaltjahr ſeyn.

Der 4. Zuſatz.

20. Im Jahr 1582 war der Sonnencirkel 23 der Sonntagsbuchſtab G. (14. §.) Der erſte October hat, ſo wie der 8te und der 15te allemahl A zum Wochentagsbuchſtaben, und der 5te E: das war alſo diesmahl ein Freytag. Weil nun aus dem 5ten der 15te ward, und der 15te den Wochenbuchſtaben A behalten muſte, ſo ward C der Sonntagsbuchſtabe, und man erhielte die folgende

Gregorianiſche Sonntagsbuchſtabentafel vom Jahr 1582 bis 1700.

1	CB	8	A	15	F	22	D
2	A	9	GF	16	E	23	C
3	G	10	E	17	DC	24	B
4	F	11	D	18	B	25	AG
5	ED	12	C	19	A	26	F
6	C	13	BA	20	G	27	E
7	B	14	G	21	FE	28	D

Der 5. Zuſatz.

21. Das Jahr 1699 hat den Sonntagsbuchſtaben D gehabt, das Jahr 1700 erhält C, und behält dieſen Buchſtaben bis ans Ende. Eben dies Jahr iſt das erſte, womit der 428ſte Sonnencirkel, und zugleich eine neue Folge der Sonntagsbuchſtaben anfängt, wie die folgende Tafel zeiget:

Gregorianiſche Sonntagsbuchſtabentafel vom Jahr 1700 bis 1800.

1	DC	8	B	15	G	22	E
2	B	9	AG	16	F	23	D
3	A	10	F	17	ED	24	C
4	G	11	E	18	C	25	BA
5	FE	12	D	19	B	26	G
6	D	13	CB	20	A	27	F
7	C	14	A	21	GF	28	E

Der 6. Zuſatz.

22. Was für ein Wochentag, ein gegebener Monathstag in einem gegebenen Jahr ſey, findet man aus dem Sonntagsbuchſtaben, wenn er mit dem Wochentagsbuchſtaben für den 1ſten deſſelben Monaths verglichen wird: Die Frage ſey: was für ein Wochentag iſt der 17 May des Gregorianiſchen Calenders im Jahr 1782? Der Sonntagsbuchſtab iſt F und der 1ſte, 8te, 15te May hat B, der 17te D, alſo iſts ein Freytag.

Die 8. Erklärung.

23. Ein Mondjahr iſt eine Zeit von 12 ſynodiſchen Monden-Monathen. Weil man im bürgerlichen Leben nur ganze Tage zählen kann, und der ſynodiſche Monath 29 Tage $12\frac{3}{4}$ Stunden beträgt; ſo rechnet man auf einen bürgerlichen Monath wechſelsweiſe 30 und 29 Tage. Alsdenn kommen auf das bürgerliche Mondjahr $180 + 174 = 354$ Tage, und das gemeine julianiſche Jahr von 365 Tagen übertrift das Mondjahr um 11 Tage.

Der 1. Zuſatz.

24. Man multiplicire den ſynodiſchen Monath von 29 T. 12 St. 44 Min. 3 Sec. mit 12, ſo iſt das Product 354 T. 8 St. 48 Min. 36 Sec. die eigentliche Länge des Mondjahrs.

Der

Der 2. Zuſatz.

25. Man ſubtrahire vom

Julian. Sonnenjahr	365 T.	6 St.	59 M.	60 S.
das Mondjahr	354 T.	8 St.	48 M.	36 S.
ſo iſt der Ueberſchuß	10 T.	21 St.	11 M.	24 S.

Wenn dieſer Ueberſchuß grade 11 Tage ausmachte, ſo würden die Neu- und Vollmonde in jedem folgenden Jahre 11 Tage früher als im vorhergehenden fallen.

Die 9. Erklärung.

26. Der Mondcirkel iſt die Reihe der Jahre, nach deren Verlauf die Neu- und Vollmonde wieder an eben den Tagen des Jahres eintreten. Die Zahl welche angiebt, wieviele Jahre des laufenden Mondcirkels bis aufs gegenwärtige verfloſſen ſind; nennt man die güldene Zahl: die damit zuſammengehörige Mondepacte aber iſt eigentlich der Unterſcheid ſo vieler Sonnenjahre, als die güldene Zahl anzeigt, von eben ſovielen Mondjahren.

Zuſatz.

27. Man nehme den Ueberſchuß von 11 Tagen, um welchen das gemeine julianiſche Jahr von 365 Tagen das bürgerliche Mondjahr von 354 Tagen übertrift, für die jährliche Mondepacte an; ſo beträgt das in 19 Jahren 209 Tage oder 7 bürgerliche Monathe von 29½ Tagen und auſſerdem noch 2½ Tage. Die wahre jährliche Epacte iſt aber beynahe 3 Stunden kürzer als 11 Tage, (25. §.) und das beträgt in 19 Jahren 57 Stunden, oder 2 Tage 9 Stunden, beynahe ebenfalls 2½ Tage. Demnach macht die 19 jährige Epacte wirklich nur 7 Monathe, bis auf einen kleinen Unterſcheid, der wie die genauere Rechnung ergiebt, noch nicht völlig

$1\frac{1}{2}$ Stunden beträgt. Wenn alſo im erſten Jahr des Cykels am 1ſten Januar Neumond war, ſo fängt mit dem erſten Tage des 20ſten Julianiſchen Jahres zugleich ein neuer Monath an, und der Neumond fällt wieder auf den 1ſten Januar des 20 ſten Jahres. Dieſer Rechnung gemäß macht eine Zeitfolge von 19 Jahren einen Mondcirkel aus.

Die 10. Erklärung.

28. Wenn der Cykel mit dem 1ſten Januar anfängt, ſo ſind am 1ſten Januar im 2ten Jahr des Cykels 11 Tage ſeit dem letzten Neumond verfloſſen, am 1 Januar des 3ten Jahres 22 Tage, am 1 Januar des 4ten Jahres 33 Tage, welche 1 bürgerlichen Monath von 30 Tagen und überdem 3 Tage ausmachen. Weil nun am 30ſten Tage auch ein Neumond war; ſo ſind am 1ſten Januar des 4ten Jahres 3 Tage ſeit dem letzten Neumond verfloſſen. Man ſummire für jedes folgende Jahr die 11 Epactentage zu den vorigen, und bemerke ſo oft die Summe einen Monath ausmacht, nur die überſchüßigen Tage. Die Zahl dieſer Tage nenne man die Epacte des Jahrs, ſo zeigt dieſe jedesmahl wieviele Tage beym Anfang des Jahres am 1ſten Januar ſeit dem letzten Neumond verfloſſen ſind.

Der 1. Zuſatz.

29. Weil ſonſt auf einen bürgerlichen Monath wechſelsweiſe 30 und 29 Tage gerechnet werden müſſen, ſo ſcheint es, daß ſolches auch beym Aufzählen der Epacten erforderlich ſey: allein dabey würde man am Ende des 19 jährigen Cykels um $2\frac{1}{2}$ Tage gefehlt haben. (26. §.) Demnach muß man die Epacten eigentlich ſo aufzählen.

gůld.

Güld. Zahl.	Epacten Tage zuſammengezählt	Jahr-Epacte
1	11 T. – 3 St	XI
2	22 T. – 6 St	XXII
3	33 T. – 9 St = 30 T. – 9 St + 3 T.	III
4	44 T. – 12 St = 30 T. – 12 St + 14 T.	XIV
5	55 T. – 15 St = 30 T. – 15 St + 25 T.	XXV
6	66 T. – 18 St = 60 T. – 18 St + 6 T.	VI
7	77 T. – 21 St = 60 T. – 21 St + 17 T.	XVII
8	88 T. – 24 St = 60 T. – 24 St + 28 T.	XXVIII
9	99 T. – 27 St = 90 T. – 27 St + 9 T.	IX
10	110 T. – 30 St = 90 T. – 30 St + 20 T.	XX
11	121 T. – 33 St = 120 T. – 33 St + 1 T.	I
12	132 T. – 36 St = 120 T. – 36 St + 12 T.	XII
13	143 T. – 39 St = 120 T. – 39 St + 23 T.	XXII
14	154 T. – 42 St = 150 T. – 42 St + 4 T.	IV
15	165 T. – 45 St = 150 T. – 45 St + 15 T.	XV
16	176 T. – 48 St = 150 T. – 48 St + 26 T.	XXVI
17	187 T. – 51 St = 180 T. – 51 St + 7 T.	VII
18	198 T. – 54 St = 180 T. – 54 St + 18 T.	XVIII
19	209 T. – 57 St = 180 T. – 57 St + 29 T.	XXIX

Im dritten Jahr läßt man 30 T. 9 St weg, weil das bis auf 3 St. ein bürgerlicher Monath iſt. Eben ſo rechnet man im 6ſten Jahr 60 T – 18 St. für 2 Monathe, im 9ten Jahr 90 T – 27 St. für 3 Monathe, u. ſ. f. Im 17ten Jahr rechnet man 180 T – 51 St. = 177 T. 21 St. für 6 bürgerliche Monathe, welche doch nur 177 Tage ausmachen: alſo hat man beynahe einen Tag zuviel für dieſe 6 Monathe gerechnet. Der Fehler wird aber dadurch gröſtentheils gehoben, daß man im 19ten Jahr 180 T – 57 St. + 29 T. =

206

206 T. 15 St. für 7 bürgerliche Monathe rechnet, die 7 × $29\frac{1}{2}$ = $206\frac{1}{2}$ Tage ausmachen.

Der 2. Zuſatz.

30. Dieſe Rechnung rechtfertiget das Verfahren der chronologiſchen Schriftſteller, wenn ſie beym Aufzählen der Epactentage des 19 jährigen Mondcirkels jedesmahl 30 Tage als einen bürgerlichen Monath weglaſſen, und nur die überſchüßigen Tage zählen, für den ſiebenten hier ſo genannten Schaltmonath aber die letzten 29 Tage rechnen. Mit dieſen Schaltmonathen hat es folgende Bewandniß. Ein julianiſches Jahr hat gewöhnlich 12 Neumonde, oder 12 Vollmonde: aber im 3ten Jahre vom 1ſten Neu- oder Vollmond angerechnet ſind 13 Neu- oder Vollmonde geweſen: alſo nimmt man das 3te Jahr von 13 Monathen = 384 Tagen an, und der 13te Monath von 30 Tagen iſt der Schaltmonath. Das 6ſte, 9te, 11te, 14te, 17te und 19te werden eben ſolche Schaltjahre von 13 Monathen, jedoch das letzte nur von 383 Tagen.

Der 3. Zuſatz.

31. Es iſt gleichgültig, ob man den Cykel mit einem ſolchen Jahr anfangen will, das am 1ſten Januar einen Neumond hat, oder ob der erſte Neumond im erſten Jahr des Cykels auf einen andern Tag fällt. Man kann auch den Cykel mit einem ſolchen Tage im Jahr anfangen, an welchem ein Vollmond einfällt. Geſetzt der Cykel hat ſich im 19ten Jahr geendiget, als am 16 April ein Vollmond einfiel, ſo muß nach Verlauf eines bürgerlichen Mondjahres von 354 Tagen, alſo im 1ſten Jahr des Cykels am 5 April wieder Vollmond

ſeyn,

ſeyn. Im 2ten Jahr tritt der Vollmond 11 Tage früher als am 5 April, alſo am 25ſten März ein, und im 3ten Jahr aufs neue 11 Tage früher am 14ten März. Allein in dieſem Jahre fallen vom 16ten April bis wieder zum 16ten April 13 Vollmonde. Man zählt alſo vom 14 März 30 Tage vorwärts und der 13te Vollmond fällt auf den 13 April. Rechnet man ſo fort, und giebt dem 6ſten, 9ten, 11ten, 14ten 17ten Jahre 13 Vollmonde, auf den Schaltmonath 30 Tage gerechnet; ſo bleibt auch für das 19te Jahr ein Schaltmonath von 29 Tagen, und der Cykel ſchließt mit dem 16ten April, welches wieder ein Vollmondstag, und zugleich der erſte Tag des folgenden Cykels wird.

Der 4. Zuſatz.

32. Nach Dionyſii Rechnung fängt der Mondcirkel 1 Jahr vor Chriſti Geburt an. Man addirt alſo 1 zur Jahrzahl und dividirt mit 19; ſo iſt der Reſt die güldene Zahl. Um daraus die Julianiſche Jahrepacte zu finden, multiplicire man dieſe güldene Zahl mit 11 und dividire mit 30; ſo iſt der Reſt die Epacte.

Julianiſche Epactentafel.

güld. Z.	Epacte	güld. Z.	Epacte	güld. Z.	Epacte
1	XI	7	XVII	13	XXIII
2	XXII	8	XXVIII	14	IV
3	III	9	IX	15	XV
4	XIV	10	XX	16	XXVI
5	XXV	11	I	17	VII
6	VI	12	XII	18	XVIII
				19	XXIX

Die gregorianiſche Epacte war vom Jahr 1582 bis 1700 um 10 Tage, und iſt nun bis 1800 um 11 Tage kleiner, als die Julianiſche.

Die 10. Erklärung.

33. Unter Conſtantins des Groſſen und der folgenden Kayſer Regierung waren die Indictionen bey den Römern gerichtliche Vorladungen zur Abtragung gewiſſer Steuern, und dieſe haben einen chronologiſchen Cykel von 15 Jahren veranlaſſet, der 3 Jahr vor der Chriſtlichen Jahrrechnung anfängt. Die Zahl welche angiebt wieviele Jahre in dem laufenden Cykel bis aufs gegenwärtige verfloſſen ſind, nennt man kurz die **Römer Zinßzahl.**

Zuſatz.

34. Man addire alſo 3 zur Jahrzahl und dividire mit 15, ſo iſt der Reſt die Römerzinßzahl.

Die 11. Erklärung.

35. Wenn der Sonnen- und Mondcirkel in einem gewiſſen Jahre zugleich anfangen, ſo müſſen ſie nach $28 \times 19 = 532$ Jahren ſich zugleich endigen. Dieſe Periode ſollte eigentlich vom Victorius, der ſie zuerſt gebraucht hat, ihren Nahmen erhalten. Sie heißt aber gewöhnlich die Dionyſiſche, vom Dionyſius Exiguus, der von dieſer Periode weitern Gebrauch machte. Wenn alle 3 Cykel, der Sonnencirkel, Mondcirkel, und Indictionscirkel, in einem gewiſſen Jahre zugleich anfingen, ſo würden ſie nach $28 \times 19 \times 15$ oder 7980 Jahren ſich zugleich endigen. Dieſe chronologiſche **Periode** nennt man die Julianiſche, weil

weil Julianiſche Jahre dabey zum Grunde liegen, die mit dem 1 Januar anfangen. Joſeph Scaliger hat ihren Gebrauch in der Chronologie eingeführt.

Der 1. Zuſatz.

36. Im Jahr 1672 war die güldene Zahl 1, und der Sonnencirkel auch 1: alſo hat mit dieſem Jahre ein Dionyſiſche Periode angefangen. Um alſo die Jahrzahl der laufenden dionyſiſchen Periode zu finden, ſubtrahire man 1671 von der Jahrzahl nach Chriſti Geburt. Für das Jahr 1781 iſt ſie 110. Aus dieſer hat man hiernächſt den Sonnencirkel, oder die güldene Zahl, wenn man mit 28 oder mit 19 dividirt.

Der 2. Zuſatz.

37. Rechnet man rückwärts ſo lange fort, bis man auf ein Jahr kommt, wofür die Zahl 1 den Sonnencirkel, die güldne Zahl und die Römerzinßzahl angiebt; ſo kommt man bis auf das Jahr 4713 vor Chriſti Geburt. Hiemit würde alſo die Julianiſche Periode ihren Anfang genommen haben, wenn man ſich von jeher dieſer cykliſchen Rechnung bedient hätte, und die Welt wirklich ſo alt wäre.

Der 3. Zuſatz.

38. Um den Sonnencirkel, die güldene Zahl, und die Römerzinßzahl für ein gegebenes Jahr zu finden, addire man die Zahl 4713 zur Jahrzahl, ſo hat man eine Zahl, welche angiebt, was es für ein Jahr der Julianiſchen Periode ſey. Dieſe dividirt man hiernächſt mit 28, 19, 15, ſo zeigen die jedesmahligen Reſte den Sonnencirkel, die güldene Zahl die Römerzinßzahl.

Die

Die 1. Aufgabe.

39. Für ein gewiſſes Jahr hat man den Sonnencirkel, die güldene Zahl, und die Römerzinszahl: man ſoll finden, was es für ein Jahr der Julianiſchen Periode ſey.

Aufl. Man multiplicire den Sonnencirkel mit 4845, die güldene Zahl mit 4200, die Römerzinszahl mit 6916, und addire die Producte. Dieſe gefundene Summe dividire man mit der Zahl 7980 als der Zahl der Jahre einer Julianiſchen Periode; ſo zeigt der Reſt, wieviele Jahre in der laufenden Periode verfloſſen ſind.

Beweis. Die Zahl, welche geſucht wird, muß mit 28 dividirt den Sonnencirkel, mit 19 dividirt die güldene Zahl, mit 15 dividirt die Indictionszahl zum Reſt laſſen. Wenn nun der Sonnencirkel = S, die güldene Zahl = L, die Indictionszahl = R geſetzt wird; ſo findet man der Auflöſung gemäß die Zahl $4845 . S + 4200 . L + 6916 . R$, welche die verlangten Eigenſchaften hat. Denn 4845 geht mit 19 und 15 auf, läßt aber mit 28 dividirt 1 zum Reſt; 4200 geht mit 28 und 15 auf, und läßt mit 19 dividirt 1 zum Reſt; 6916 geht mit 28 und 19 auf, läßt aber mit 15 dividirt 1 zum Reſt. Man ſetze $4845 . S + 4200 . L + 6916 . R = 7980 . q + r$, ſo geht die Zahl $7980 . q$ mit 28, oder 19, oder 15 dividirt allemahl auf: alſo wird r mit dieſen Zahlen nach der Ordnung dividirt die Reſte S, L, R, übrig laſſen.

Exempel. Im jetzigen Jahr 1781 iſt der Sonnencirkel 26, die güldene Zahl 15, die Indiction 14, und man findet

$$4845 \cdot 26 = 125970$$
$$4200 \cdot 15 = 63000$$
$$6916 \cdot 14 = 96824$$

Summe 285794 | 35
7980) |

Jahrzahl der Jul. Per. 6494
Man ſubtr. die Jahrzahl 1781

ſo bleibt Reſt 4713, welches mit dem 37. §. überein kommt.

Zuſatz.

40. Wenn der Sonnencirkel mit der güldenen Zahl gegeben iſt; ſo findet man durch eine ähnliche Rechnung, was für ein laufendes Jahr der Dionyſiſchen Periode damit zuſammen gehöre. Man multiplicire den Sonnencirkel mit 57, die güldene Zahl mit 476, addire die Producte, und dividire die Summe mit 532; ſo iſt der Reſt das geſuchte Jahr der Dionyſiſchen Periode. Denn 57 mit 28 dividirt läßt 1 zum Reſt und geht mit 19 auf: 476 aber läßt mit 19 dividirt 1 zum Reſt und geht mit 28 auf. Exempel für das Jahr 1781.

Man findet $26 \times 57 = 1482$
$476 \times 15 = 7140$

Summe 8622 | 16
532) |

Reſt 110

Die 12. Erklärung.

41. Seit dem Ausgange aus Egypten hatten die Iſraeliten, und nachherigen Juden zweyerley Jahre, ein Kirchenjahr, und ein bürgerliches Jahr. Das Kirchenjahr fieng mit dem erſten

Neumond nach der Frühlingsnachtgleiche an, das bürgerliche Jahr aber nahm um die Zeit der Herbſtnachtgleiche ſeinen Anfang.

Iſraelitiſches Kirchengeſetz die Paſſah = oder Oſterfeyer betreffend.

42. Die Paſſahfeyer ſoll am 14ten Tage des erſten Monden Abends ihren Anfang nehmen. 2 B. Moſ. XII. 6. 18.

Kirchengeſetze der Chriſten die Feyer des Oſterfeſtes betreffend.

43. I. Oſtern ſoll nicht am 14 Tage des erſten Monden (Luna XIV) mit den Juden zugleich, ſondern am nächſten Sonntage nach der Luna XIV gefeyert werden. Wenn die Luna XIV am Sonnabend fällt, ſoll Oſtern am gleich darauf folgenden Sonntage gehalten werden: wenn aber die Luna XIV am Sonntage eintritt, ſo ſoll man Oſtern am nächſtfolgenden Sonntage, als am XXI Tage des Mondes feyern.

II. Der erſte Monath des Kirchenjahres ſoll der ſeyn, deſſen Luna XIV entweder am Frühlingsgleichtage ſelbſt einfällt, oder doch die erſte nach dem Gleichtage iſt. Für den Gleichtag aber ſoll der 21ſte März angenommen werden. Dieſerwegen ſoll der Oſterſonntag nicht vor dem 22ſten März, auch nicht nach dem 25 April gefeyert werden.

Die 13. Erklärung.

44. Der 14te Tag des erſten Monaths im Kirchenjahr nennt man am richtigſten die Oſtergränze nicht Oſtervollmond. Man zählt den Neumondstag ſelbſt als den erſten; alſo iſt die Oſtergränze der 14te Tag, wenn der Neumondstag ſelbſt

ſelbſt als der erſte mitgezählt wird: der Vollmond fällt am 15ten Tage nach den Neumond.

Der 1. Zuſatz.

45. Vor der Calender-Verbeſſerung im Jahr 1582 ſuchte man die Oſtergränze mit Hülfe der güldenen Zahl, und der Julianiſchen Epacten: ſeit dem Jahr 1582 aber hat man da, wo der gregorianiſche Calender eingeführt war, die gregorianiſchen Epacten gebraucht. Im deutſchen Reich hatten die Proteſtanten bis zum Jahr 1700 den Julianiſchen Calender beybehalten, in eben dieſem Jahr aber zwar ſonſt den gregorianiſchen Calender angenommen, jedoch unter dem Nahmen des verbeſſerten Calenders mit der Einſchränkung, daß der Oſtervollmond nicht cykliſch, ſondern aſtronomiſch richtig nach Keplers Rudolphiniſchen Tafeln für den Mittagskreis von Uranienburg berechnet werden ſollte. Seit dem Jahr 1777 iſt jedoch nunmehr der gregorianiſche Calender auch in Abſicht der Feſtrechnung unter dem Nahmen des allgemeinen Reichs-Calenders eingeführt worden.

Der 2. Zuſatz.

46. Wenn man nach einigen ältern Beſtimmungen den ſynodiſchen Monath von 29 T. 12 St. 44′ 3″ 11‴ annimmt, ſo wird das Mondenjahr 354 T. 8 St. 48′ 38″ 12‴, und man findet 19 Mondjahre + 7 Monathe = 6936 T. 16 St. 32′ 28″ 5‴. Ferner ſind 19 Julianiſche Jahre = 6939 T. 18 St. und der Ueberſchuß iſt 1 St. 27′ 31″ 55‴. Daraus wird in 312 Jahren ein Ueberſchuß von einem ganzen Tage. Die im 31. §. berechnete Epactentafel iſt alſo nur 312 Jahre

brauchbar: nach Ablauf derſelben muß jede Epacte um 1 vergröſſert werden, damit ſie die Neumonde um einen Tag früher angebe. Dieſe Verbeſſerung nennt man die Mondgleichung. So oft überdem am Ende eines Jahrhunderts ein Schalttag ausgelaſſen wird, muß die Epacte um 1 vermindert werden, damit ſie die Neumonde um einen Tag ſpäter angebe, und dieſe Verbeſſerung hat den Nahmen der Sonnengleichung erhalten.

Der 3. Zuſatz.

47. Wegen dieſer nöthigen Verbeſſerungen bleibt der 19 jährige Epactencykel gewöhnlich nur ein Jahrhundert brauchbar: indeſſen kann er auch zwey Jahrhunderte nach einander brauchbar bleiben, wenn etwa am Ende des erſten Jahrhunderts beyde Gleichungen zugleich ihre Anwendung finden müſten, da dann eine die andre aufhebt. In dem vierten Jahrhundert, deſſen Schlußjahr ein Schaltjahr iſt, fällt die Sonnengleichung weg. Wenn nun vielleicht in eben dem Jahrhundert auch die Mondgleichung nicht nöthig iſt, ſo läuft der Cykel ebenfalls ununterbrochen ins folgende Jahrhundert fort.

Der 4. Zuſatz.

48. Im Jahr 532, als die Einrichtung des Calenders, welche vom Dionyſius herrührt, eingeführt ward, war die güldene Zahl 1, und die Oſtergränze fiel auf den 5 April. Demnach kann man leicht für alle 19 Jahre des Mondcirkels der Anleitung im 30. §. gemäß die Julianiſchen Oſtergränzen finden, welche in der nachſtehenden Tafel enthalten ſind.

güld.

güld. Z.	Oſtergränze		güld. Z.	Oſtergränze	
1	5 April	D	10	27 März	B
2	25 März	G	11	15 April	G
3	13 April	E	12	4 April	C
4	2 April	A	13	24 März	F
5	22 März	D	14	12 April	D
6	10 April	B	15	1 April	G
7	30 März	E	16	21 März	C
8	18 April	C	17	9 April	A
9	7 April	F	18	29 März	D
			19	17 April	B

Wenn man im 18ten Jahr vom 29 März 11 Tage abzieht, ſo kommt man auf den 18ten März, und 29 Tage zugezählt würde den 16 April für die Oſtergränze des 19ten Jahres geben. Hievon aufs neue 11 Täge abgezogen giebt wieder den 5 April, als die Oſtergränze des 1ſten Jahres. Die Tafel aber ſo wie ſie gewöhnlich mitgetheilt wird, giebt den 17ten April für die Oſtergränze des 19 Jahres an, ſie giebt alſo dem ſiebenten Schaltmonath ebenfalls 30 Tage: daher kommt auf das 1ſte Jahr die Epacte XII, und man muß vom 17ten bis zum 5 April 12 Tage abziehen, damit die Oſtergränze des erſten Jahres wieder auf den 5 April komme.

Der 5. Zuſatz.

49. Wenn am 1ſten Januar ein Neumond einfällt, ſo iſt am 31ſten Januar, am 1ſten März, und am 31ſten März wieder Neumond. Dieſer letztere iſt zugleich der 1ſte Neumond des Kirchenjahres, und die Luna XIV als die Oſtergränze fällt auf den 13 April. Wenn alſo die Jahr-Epacte das Alter des Mondes für den 1ſten Jaunar anzei-

gen ſoll, ſo muß ſie im 3ten Jahr des Mondcirkels Null ſeyn, welches mit dem Zeichen * bemerkt wird: demnach erhält man folgende Tafel für die mit den Oſtergränzen zuſammengehörigen Epacten.

g. Z.	Epacte	Oſtergränze	g. Z.	Epacte	Oſtergränze
1	VIII	5 April D	10	XVII	27 März B
2	XIX	25 März G	11	XXVIII	15 April G
3	*	13 April E	12	IX	4 April C
4	XI	2 April A	13	XX	24 März F
5	XXII	22 März D	14	I	12 April D
6	III	10 April B	15	XII	1 April G
7	XIV	30 März E	16	XXIII	21 März C
8	XXV	18 April C	17	IV	9 April A
9	VI	7 April F	18	XV	29 März D
			19	XXVI	17 April B

Die 14. Erklärung.

50. Die Grundepacte der Oſtergränzentafel nenne ich Kürze halber diejenige, welche mit der güldenen Zahl 3 zuſammengehört.

Der 1. Zuſatz.

51. Die im 48. §. berechnete Tafel war vom Jahr 500 bis zum Jahr 800 brauchbar: allein nun ward eine Mondgleichung nöthig, und die Epacten muſten um 1 vergröſſert werden, ſo wie auch die Oſtergränzen um einen Tag zurück rückten. In den Jahren 1100 und 1400 tratt derſelbe Fall wieder ein: alſo war von 1400 bis 1700 eine Vermehrung der Epacten mit 3 und eine Zurückweichung der Oſtergränzen um eben ſoviele Tage nöthig. Während dieſer 300 Jahre hätte alſo mit der güldenen Zahl 3 die Grundepacte III, und als

Oſtergränze der 10 April zuſammen gehört, wenn nicht im Jahr 1582 wegen Auslaſſung der 10 Tage auch die Epacte ſich um 10 Tage vermindert hätte. So ward aus III oder XXXIII die Grund-Epacte XXXIII – X = XXIII. Nun fiel auf den 8 Januar, den 6 Februar, und 8 März der Neumond, und der 21 März ward die dazu gehörige Oſtergränze. Vom Jahr 500 bis 1700 waren nun 1200 Jahr verfloſſen, und die Mondgleichung wäre im Jahr 1700 wieder nöthig geweſen, wenn ſie wirklich alle 300 J. einen ganzen Tag betrüge. Soviel beträgt ſie aber nur in 312½ Jahren: alſo wäre ſie allererſt im Jahr 1750 erforderlich geweſen. Man hat aber bey der Calenderverbeſſerung feſtgeſetzt, daß ſie bis zum Jahr 1800 verſchoben bleiben ſoll, weil auch die Sonnengleichung jedesmahl am Ende eines Jahrhunderts nöthig iſt. Dieſerwegen hat man im Jahr 1700 nur die Sonnengleichung angebracht und die Jahrepacte um 1 vermindert. Damahls ward alſo XXII die Grund-epacte, und die damit zuſammengehörige Oſtergränze ward der 22 März. Im Jahr 1800 heben die Mond- und Sonnengleichung einander auf: daher erhält man folgende

Gregorianiſche Oſtergränzentafel für die Jahre 1700 bis 1900.

g. Z.	Epacte	Oſtergränze	g. Z.	Epacte	Oſtergränze
1	*	13 April E	11	XX	24 März F
2	XI	2 April A	12	I	12 April D
3	XXII	22 März D	13	XII	1 April G
4	III	10 April B	14	XXIII	21 März C
5	XIV	30 März E	15	IV	9 April A
6	XXV	18 April C	16	XV	29 März D
7	VI	7 April F	17	XXVI	17 April B
8	XVII	27 März B	18	VII	6 April E
9	XXVIII	15 April G	19	XVIII	26 März A
10	IX	4 April C			

Der 2. Zuſatz.

52. Im Jahr 325, welches man gewöhnlich für das Jahr der Nicäniſchen Kirchenverſammlung annimmt, war die güldne Zahl 3, und der Neumond fiel wirklich auf den 1 Januar. Die im 48. §. mitgetheilte Epactentafel ſtimmte damahls mit der genauern aſtronomiſchen Rechnung ſehr gut zuſammen: alſo hätte man eigentlich bey der im 51. §. mitgetheilten Berechnung der nöthigen Verbeſſerungen das Jahr 325 für das Grundjahr annehmen ſollen. Weil man aber die letzte Mondgleichung bis zum Jahr 1800 verſchoben hat, ſo iſt das ſoviel, als wenn man das Jahr 550 zum Grundjahr genommen hätte, und von 325 bis 550 waren ſchon 225 Jahr verfloſſen: mithin fielen die berechneten Kirchlichen Neumonde um das Jahr 550 ſchon 17 Stunden ſpäter, als die wirklichen Neumonde. Dieſer Unterſcheid findet ſich alſo noch zwiſchen den Kirchlichen und wirklichen Neumonden, und man hat ihn mit Vorbedacht nicht zu heben

ben geſucht, weil man dadurch deſto ſicherer verhü- ten wollte, daß der Oſterſonntag nicht ſelbſt an der Luna XIV gefeyert werden ſollte. Dieſe Luna XIV kann ein Sonnabend ſeyn, und ſo iſt die Luna XV der Oſterſonntag. Hätte nun die cykliſche Rech- nung die Lunam XIV um einen Tag zu früh ange- zeigt, ſo würde man in dem Jahr an der Luna XIV dem Geſetz (42. §.) entgegen Oſtern feyern.

Die 2. Aufgabe.

53. **Für ein gegebenes Jahr nach Chriſti Geburt den Monathstag zu finden, an wel- chem das Oſterfeſt einfällt.**

Aufl. Man ſuche die güldene Zahl und den Sonntagsbuchſtaben. (32. 14. 20. §.) Die gülde- ne Zahl zeigt in der Tafel der Oſtergränzen den Monathstag an, auf welchem die Oſtergränze fällt, und der dazu gehörige Wochentagsbuchſtabe ſteht dabey: wenn man alſo die Tage bis zu demjenigen fortzählt, auf welchen der Sonntagsbuchſtabe fällt, ſo hat man den Monathstag, der zugleich dasmahl Oſterſonntag iſt. Es verſtehet ſich, daß man die Sonntagsbuchſtabentafel aus dem 14. §. mit der Oſtergränzentafel im 48. §. verbinden müſſe, um den Oſterſonntag für den alten Julianiſchen Calen- der zu finden. Für den allgemeinen Reichscalender aber wird im jetzt laufenden Jahrhundert die Tafel der Sonntagsbuchſtaben aus dem 21. §. mit der Oſtergränzentafel im 51. §. verbunden.

Exempel für das Jahr 1782. Die güldene Zahl iſt 16, der Sonnencirkel 27.

Im julianiſchen Calender

der Sonntagsbuchſtab B, die Oſtergränze 21 März C, alſo Montag, und der 27ſte März der Oſtertag.

Im allgem. Reichscalender

der Sonntagsbuchſtab F, die Oſtergränze 29 März D, alſo Freytag, und der 31ſte März der Oſtertag.

Anmerkung.

54. Der Unterſcheid der unbeweglichen an gewiſſe Monathsstage gebundenen Feſte, von den beweglichen Feſten, die ſich in jedem Jahre nach dem Oſterſonntage richten, und die übrige Einrichtung des Calenders für den Gebrauch im bürgerlichen Leben, ſind ſo bekannte Dinge, daß ſie in einem ſo kurzem Handbuch, wie das gegenwärtige füglich weggelaſſen werden können. Man kann ſie aus jedem Calender kennen lernen.

Die 15. Erklärung.

55. Der Jobelcykel der alten Iſraeliten war eine Folge von 7 mahl 7 = 49 Jahren. Das ſiebente Jahr war das Sabbathjahr, und das ſiebente Sabbathjahr hieß das groſſe Sabbath- oder Jobeljahr. Sieben Jahre machten alſo einen kleinen Sabbathcykel, und 7 Sabbathcykel einen groſſen Sabbathcykel oder Jobelcykel. III. B. Moſe. XXV. v. 8. 9. 10. Die Rechnung nach Sabbathcykeln und Jobelcykeln nahm in Canaan mit der erſten Ausſaat im Herbſt am 23ſten Sept. ihren Anfang. 3 B. Moſ. XXV. v. 2.

Der

Der 1. Zuſatz.

56. Nach Caſſini Beſtimmung iſt
das ☉ Jahr 365 T. 5 St. 48′ 54″ 4‴
das ☾ Jahr 354 T. 8 St. 48′ 38″ 12‴ (46. §.)

jährl. Epacte 10 T. 21 St. 0′ 15″ 52‴.
Dieſe mit 49 multiplicirt giebt 532 T. 21 St. 12′ 57″ 18‴ für die Epacte von 49 Jahren. Ferner ſind

12 ſynod. Monathe 354 T. 8 St. 48′ 38″ 12‴
6 ſynod. Monathe 177 T. 4 St. 24′ 19″ 6‴

alſo 18 ſynod. Monathe 531 T. 13 St. 12′ 57″ 18‴, und die Epacte von 49 Jahren = 18 ſynod. Monathen + 1 T. 8 St. Dieſemnach ſind 49 Sonnenjahre = 50½ Mondjahren + 1 T. 8 St. = 50½ Mond. + 1⅓ Tag.

Der 2. Zuſatz.

57. Weil 45mahl 1⅓ Tag = 60 Tage ſind; ſo betragen 45mahl 49 = 2205 Sonnenjahre ſoviel als 45mahl 50½ = 2272½ Mondjahre + 60 Tage = 2272½ Mondj. + 2 ſynod. Monathe + 22ᵇ 31′ 53″ 38‴. Dieſemnach machen 45 Jobelcykel eine Jobelperiode aus, die als eine ſehr vollkommene Mondepacten-Periode dient. Wenn aber die Cykelepacte von 1 T. 8 St. oder aufs genaueſte berechnet 1 T. 8 St. 0′ 0″ 10‴ mit 133 multiplicirt wird,

ſo findet man 177 T. 8 St. 0′ 22″
6 ſynod. Monathe = 177 T. 4 St. 24′ 19″

Epacte für 133 Cykel = 3 St. 36′ 3″.

Die 16. Erklärung.

58. Eine Zeitfolge von 45 Jobelcykel macht eine Jobelperiode, und 133 Cycel eine groſſe Jobelperi-

periode aus, die mit der Schöpfung der Welt anfängt, und noch nicht geendiget iſt. Dieſe groſſe Jobelperiode begreift 3 kleinere weniger 2 Cykel.

Zuſatz.

59. Man ſummire die jährliche Mondepacte (56. §.) von Jahr zu Jahr, und ziehe jedesmahl, wenn die Summe 1 ſynod. Monath (46. §.) übertrift, denſelben ab: ſo findet man folgende genau richtige tropiſche Epactentafel.

Monathe	Jahre	tropiſche Epacten					
	1	10 T.	21 St.	0′	15″	52‴.
	2	21	18	0	31	44
I	3	3	2	16	44	25
	4	13	23	17	0	17
	5	24	20	17	16	9
II	6	6	4	33	28	50
	7	17	1	33	44	42
	8	27	22	34	0	34
III	9	9	6	50	13	15
	10	20	3	50	29	7
IV	11	1	12	6	41	48
	12	12	9	6	57	40
	13	23	6	7	13	32
V	14	4	14	23	26	13
	15	15	11	23	42	5
	16	26	8	23	57	57
VI	17	7	16	40	10	38
	18	18	13	40	26	30
	19	29	10	40	42	22
VII	20	10	18	56	55	3

Mo-

Monathe	Jahre	trop. Epacten				
	21	21 T.	15 St.	57′	10″	55‴
VIII	22	3	0	13	23	36
	23	13	21	13	39	28
	24	24	18	13	55	20
IX	25	6	2	30	8	1
	26	16	23	30	23	53
	27	27	20	30	39	45
X	28	9	4	46	52	26
	29	20	1	47	8	18
XI	30	1	10	3	20	59
	31	12	7	3	36	51
	32	23	4	3	52	43
XII	33	4	12	20	5	24
	34	15	9	20	21	16
	35	26	6	20	37	8
XIII	36	7	14	36	49	49
	37	18	11	37	5	41
	38	29	8	37	21	33
XIV	39	10	16	53	34	14
	40	21	13	53	50	6
XV	41	2	22	10	2	47
	42	13	19	10	18	39
	43	24	16	10	34	31
	44	6	0	26	47	12
XVI	45	16	21	27	3	4
	46	27	18	27	18	56
XVII	47	9	2	43	31	37
	48	19	23	43	47	29
XVIII	49	1	8	0	0	10

Anmerkung.

60. Dieſe Jobelperiode iſt in der Chronologie, auch in ſoweit dieſe Wiſſenſchaft dem Geſchichtforſcher nöthig iſt, ganz ungemein wichtig und merkwürdig. Sie iſt nicht bloß hypothetiſch, wie die Julianiſche Periode; (35. §.) ſie iſt vielmehr wirklich hiſtoriſch, und eben darum laſſen ſich alle hiſtoriſch chronologiſche, und ſelbſt viele aſtronomiſche Probleme mit Hülfe dieſer Jobelcykel-Rechnung ſehr richtig und leicht auflöſen. Die ganze Sache iſt allererſt vor kurzen vom Herrn Superintendenten Franck, zu Hohnſtädt im Hannöverſchen recht ins Licht geſetzt worden. Wir haben von ihm ein vortrefliches mit ganz ungemeinem Fleiß ausgearbeitetes Werk unter dem Titel: Ioh. Georg. Frankii Novum Syſtema Chronologiæ Fundamentalis, qua omnes anni ad Solis et Lunæ curſum accurate deſcribi et novilunia a primordio mundi ad noſtra uſque tempora, et ulterius ope epactorum deſignari poſſunt: in cyclo Iobelæo Biblico detecte, et ad Chronologiam tam ſacram quam profanam applicatæ, adjecta brevi enarratione jobelæo-chronologica hiſtoriæ ſacræ, cum præf. Ioh. Chriſtoph. Gatterer, Gœtting. 1778. Fol. Vier Jahre vorher im Jahr 1774 hatte der H. Verf. ſchon einen kurzen Auszug aus dem Werke bekannt gemacht unter dem Titel: Præluſio Chronologiæ fundamentalis, qua omnes anni ad ſolis et lunæ curſum accurate deſcribi poſſunt, a Ioh. Georg. Frank, Gœtt. 1774. in 4.

Hiſtoriſch-Chronologiſche Grundſätze.

61. Das Jahr der Schöpfung der Welt iſt das 1655ſte vor der Sündfluth, das 2698ſte vor dem Ausgange des Volkes Iſrael aus Egypten, das 2744ſte vor der wirklichen Beſitznehmung des Landes Canaan, das 3177ſte vor Erbauung des Salomoniſchen Tempels, das 4181ſte vor dem Anfang der chriſtlichen Jahrrechnung. Der erſte Tag der Schöpfung war der Tag der Herbſtnachtgleiche, der 23ſte September. H. Frank hat mit den bündigſten

aus

aus den ſicherſten Quellen hergenommenen Gründen bewieſen, daß das erſte Jahr der Welt mit dem 533ſten Jahr der Julianiſchen Periode überein komme: alſo war nicht allein der Sonnencirkel, ſondern auch der Mondcirkel des 1ſten Jahrs der Welt = 1, und der erſte Tag war ein Sonntag. Hiebey muß nur noch bemerkt werden, daß die Julianiſche Periode mit dem 1ſten Januar zu laufen anfängt, und aus Julianiſchen Jahren beſtehet, deren Unterſcheid von den ſeit Anfang der Welt bis hieher verlaufenen tropiſchen Sonnenjahren nun ſchon 46 Tage ausmacht. Die Jahre der Jobelcykel ſind wirkliche tropiſche Sonnenjahre, die Tage fangen Abends mit Untergang der Sonne an, 6 Stunden früher als die bürgerlichen Tage des Jul. Jahres, und 18 Stunden früher als die aſtronomiſchen Tage.

Die 3. Aufgabe.

62. **Es iſt ein laufendes Jahr der Chriſtlichen Jahrrechnung gegeben: man ſoll finden, was es für ein Jahr der Jobeläre ſey.**

Aufl. Man addire 4181 zur Jahrzahl, ſo hat man das laufende Jahr der Jobeläre, welches mit dem 23ſten September eben dieſes Jahres anfängt. Für eine Begebenheit alſo, die vor den 23ſten September fällt, muß die Jahrzahl der Chriſtlichen Aere um Eins vermindert werden. So war der 23ſte September des Jahres 1764 zugleich der erſte Tag das 5945ſten Jahres der Jobelperiode.

Der 1. Zuſatz.

63. Die Diviſion der Zahl 5945 mit 49 ergiebt, daß dies 5945ſte Jahr der Welt das 16te im

122ſten Jobelcykel geweſen ſey. H. Reccard (Abhandl. von der groſſen Sonnenfinſterniß im Jahr 1764, Berlin 1763, 4. S.) findet aus Caßini Tafeln die aſtronomiſche Mondepacte für den Anfang des Jahrs 1764 = 27 T. 5 St. 3′ 21″ nach der aſtronomiſchen Zeit des Pariſer Meridians. Hievon ziehe man ab die Epacte für 15 complete Jahre = 15 T. 11 St. 23′ 42″ 5‴ (59. §.) ſo bleibt 11 T. 17 St. 39′ 38″ 55‴. Hiezu addire man 1 ſynod. Monath = 29 T. 12 St. 44′ 3″, ſo iſt die Summe 41 T. 6 St. 23′ 42″. Von dieſer ſubtrahire man
die Cykel Epacte 1 T. 8 St. 0′ 0″ 10‴
mit 122 mult. = 13 T. 16 St. 20′ 4″ 15‴
ſo iſt der Reſt die Epacte des 1ſten Jahres der Welt = 27 T. 14 St. 3′ 38″, die Zeit nach dem Pariſer Meridian aſtronomiſch vom Mittage angezählt. Aus dieſer Probe ſiehet man, wie leicht und natürlich die richtige Epacte eines jeden Jahres mit Hülfe der Jobelcykel gefunden werden könne.

Der 2. Zuſatz.

64. Jede gegebene Jahrzahl der Julianiſchen Periode iſt leicht in die damit zuſammengehörige Jahrzahl der Jobeläre verwandelt, wenn man 532 davon abziehet. (61. §.) Man kann alſo leicht andre merkwürdige politiſche Aeren oder Epochen mit der Jobeläre vergleichen, wenn man ſchon weiß, in welches Jahr der Julianiſchen Periode ſie gehören. Der Anfang der Griechiſchen Jahrrechnung nach Olympiaden fällt ins 3938ſte Jahr der Jul. Periode 776 Jahr vor der Chriſtlichen Aere. Nach dem Varro nimmt die Römiſche Jahrrechnung von Erbauung der Stadt Rom mit

dem

dem 21ſten April des 3961ſten Jahres Jul. Per. 753 Jahr vor der Chriſtlichen Aere, 23 Jahre nach der Olympiadenäre ihren Anfang. Die Aere Nabonaſſars, welche mit der Gründung des babyloniſchen Reichs ihren Anfang nahm, fällt auf den 26ſten Februar des 3967ſten Jahres der Jul. Periode: wobey man noch wiſſen muß, daß 1461 Nabonaſſariſche Jahre 1460 Julianiſchen Jahren gleich ſind. Die Jahrrechnung der Türken und Araber, welche Hegira heißt, nimmt mit dem 16 Jul. im Jahr 622 der Chriſtl. Aere oder 5335 der Jul. Per. ihren Anfang. Die Jahre der Hegira ſind Mondjahre von 354 oder 355 Tagen, die nach einem Cirkel von 30 Jahren in eben der Ordnung wiederkehren, und 30 ſolcher Cirkel geben 42524 Julianiſche Jahre.

Die 17. Erklärung.

65. Die einem jeden **Monath** zugehörige **Epacte** iſt die Zeit, welche beym Anfang des Monaths ſeit dem letzten Neumond verfloſſen ſeyn würde, wenn der Neumond des Jahres grade mit dem Anfang des 1 Januars eingetreten wäre.

Zuſatz.

66. Man zähle die Tage vom Anfang des Jahres zuſammen, und ziehe jedesmahl, wenn die Summe 30 und mehr Tage beträgt, einen ſynodiſchen Monath ab; ſo findet man folgende

Tafel der monathl. Epacten.

	T.	St.	′	″	‴
Januar	0	0	0	0	0
Februar	1	11	15	56	49
März	29	11	15	56	49
April	1	9	47	50	27
May	1	21	3	47	16
Junius	3	8	19	44	5
Julius	3	19	35	40	44
Auguſt	5	6	51	37	43
September	6	18	7	35	32
October	7	5	23	31	21
November	8	16	39	28	10
December	9	3	55	24	59
Ep. d. folg. J. v. 365 Tagen	10	15	11	21	48
(56. §.) Erg. d. tro. J.	0	5	48	54	4
jährl. tro. Ep.	10	21	0	15	52

Im Schaltjahr erhält jede dieſer Epacten nach dem Februar einen Tag mehr.

Die 4. Aufgabe.

67. **Den Neumondstag in jedem Monath eines gegebenen Jahres der Jobeläre zu finden.**

Aufl. Zur Epacte des Jahres addire man die Epacte des gegebenen Monaths. Wofern die Summe kleiner iſt, als ein ſynodiſcher Monath; ſo iſt eben dieſe Summe die Epacte des Monaths in dem gegebenen Jahr: widrigenfalls muß 1 ſynodiſcher Monath davon abgezogen werden, um für das gegebene Jahr die Epacte des gegebenen Monaths zu finden. Eben dieſe Epacte ſubtrahire man vom ganzen ſynodiſchen Monath; ſo zeiget der Reſt die Zeit an, welche vom Anfang des erſten

Ta-

Tages im Monath bis zum Augenblick, da der Neumond eintritt, verfloſſen iſt.

Exempel. Man ſucht den Neumondstag für den September im 1ſten Jahr der Welt, als dem 533ſten der Julianiſchen Periode: ſo iſt

die Jahr-Epacte	27 T.	14 St.	3′	38″	(63. §.)
die Epacte des Septemb.	6	18	7	35½	
Summe	34 T.	8 St.	11′	13½″	
1 ſynod. Monath	29	12	44	3	
Ep. d. Sept. im 1. J. d. Welt	4	19	27	10	
d. ſubtr v. 1 ſyn. Mond.	29	12	44	3	
giebt	24 T.	17 St.	16′	53″	

als die vom aſtronomiſchen Anfang des 1 Sept. bis zum Neumond verfloſſene Zeit nach dem Pariſer Meridian. (63. §.) Jeruſalem liegt 2 St. 12 Min. öſtlicher als Paris, und der jüdiſche Tag fängt 18 St. früher an, als der aſtronomiſche. Addirt man alſo noch 20 St. 12 Min. ſo findet man 25 T. 13 St. 28′ 53″ vom Anfang des 1ſten bis zum Neumond verfloſſene Zeit. Derſelbe iſt alſo am 26ſten Sept. als am 4ten Tage der Welt eingetreten. Nach der Moſaiſchen Erzählung iſt an dieſem Tage der Mond erſchaffen worden.

Die 18. Erklärung.

68. Das tropiſche Sonnenjahr iſt = 52 Wochen 1 T. 5 St. 49 Min. und der Ueberſchuß über 52 Wochen macht in 49 Jahren 8 Wochen 4 Tage 21 Stunden. Die hier wieder über 8 Wochen überſchüßigen 4 Tage 21 Stunden machen mit dem Schluß des 56ſten Jobelcykels, oder des 2744ſten Jahres eine aufgehende Zahl von Wochen, nemlich 39 Wochen aus. Dieſerwegen

kann man den Zeitlauf von 56 Jobelcykel oder 2744 Jahren die groſſe tropiſche Wochentagsperiode nennen. Vier Jobelcykel machen 196 Jahre = 7mahl 28 Jahre: alſo begreifen 4 Jobelcykel 7 Julianiſche ſo genannte Sonnencirkel, oder eigentlich Wochentagsbuchſtaben = Cirkel. Dieſe 7 Sonnencirkel oder 4 Jobelcykel machen eine kleinere Wochentagsbuchſtabenperiode aus, die in der groſſen Periode 14mahl enthalten iſt.

Zuſatz.

69. Vom Anfang der Welt bis zur Beſitznehmung des Landes Canaan war grade eine groſſe tropiſche Wochentagsperiode verfloſſen: mit dem erſten Jahr der zweyten Periode fing ſich die ruhige Bewohnung des gelobten Landes an, und mit derſelben zugleich die eigentliche jüdiſche Jobelperiode. Dieſe begreift 30 Jobelcykel zuſammen von 1470 Jahr, und ſie zerfällt in drey kleinere Perioden, eine jede von 10 Cykel, oder 490 Jahr. Während der erſten 7 Cykel lebte Iſrael unter den Richtern, und im achten Jahr des achten Cykels erhielte Iſrael ſeinen erſten König Saul. Zwey Jahre vor Endigung dieſes achten Jobelcykels kam David zur Regierung, im letzten Jahr des 9ten Cykels ward der Salomoniſche Tempelbau vollendet, und nach Endigung des 10ten Cykels mit dem Tode des Königs Abiam erfolgte unter des Aſſa Regierung die groſſe Reformation und Zerſtörung der Abgötterey. Die merkwürdigſten Veränderungen in dieſem Zeitraum trugen ſich im groſſen Jobeljahre zu: that dies ein blindes Ohngefehr?

Die zweyte kleinere Periode läuft fort bis zum Anfang der 70 Wochen Daniels. Vom 8ten Jahr

des 18 Cykels dem 4ten Regierungsjahr des Königes Jojakim, als die erſte Beraubung des Tempels erfolgte, und die Wegführung des Königes, der königlichen Familie und vieler tauſend der vornehmſten übrigen Familien, unter welchen auch Daniel war, muß man die 70 Jahre der Babyloniſchen Gefangenſchaft rechnen, obgleich die völlige Zerſtörung Jeruſalems und des Tempels allererſt 18 Jahr nachher unter dem Zedekias erfolgte. Mit dem 28ſten Jahr des 19ten Cykels, im erſten Regierungsjahr des Cyrus endigen ſich dieſe 70 Jahre. Funfzehn Jahr nachher im 2ten Regierungsjahr des Darius Hyſtaſpis ward die Erbauung des zweyten Tempels angefangen, nach 6 Jahren aber grade mit dem Schluß der zweyten Periode vollendet, und der Tempel eingeweihet. Die 3te Periode begreift die 70 Wochen Daniels. Dieſer ſo merkwürdige Zeitlauf fängt mit dem erſten Sabbathsjahre der dritten kleinern jüdiſchen Jobelperiode an die 69ſte Woche endiget ſich grade mit dem Todesjahr Chriſti in ſeinem 33ſten Lebensjahre, und die groſſe 70ſte Woche, die eigentlich einen ganzen Cykel von 7 Sabbathsjahren ausmacht, war noch nicht völlig abgelaufen, als im 42ſten Jahr dieſes Cykels Jeruſalem zum 2tenmahl zerſtöret ward, womit die völlige Aufhebung der jüdiſchen Staats- und Kirchlichen Verfaſſung verbunden war.

Die 5. Aufgabe.

70. **Den Wochentag zu finden, womit jedes gegebene Jahr der Jobeläre anfängt, und ſchlieſſet.**

Aufl. I. Man multiplicire die Länge des tropiſchen Jahres 365 T. 5 St. 49′ mit der Jahr-

zahl der Jobeläre, ſo findet man die Anzahl aller Tage, die ſeit dem erſten Schöpfungstage bis zum letzten Tage des gegebenen Jahres verlaufen ſind, zur Erleichterung der Rechnung dienen folgende Zahlen:

Eine groſſe Jobelperiode von 56 Cykel hält 1002225 Tage.

Ein Jobelcykel von 49 Jahren hält 17896 T. 21 St. 1 Minuten,

womit man die nachſtehenden kleinen Tafeln verbinden kann.

Cykel	T.	St.	Cykel	T.	St.
1	17896	21	8	143175	0
2	35793	18	9	161071	21
3	53690	15	10	178968	18
4	71587	12	20	357937	12
5	89484	9	30	536906	6
6	107381	6	40	715875	0
7	125278	3	50	894843	18

Jahre	T.	St.	M.	Jahre	T.	St.	Min.
1	365	5	49	8	2921	22	32
2	730	11	38	9	3287	4	21
3	1093	17	27	10	3652	10	10
4	1460	23	16	20	7304	20	20
5	1826	5	5	30	10957	6	30
6	2191	10	54	40	14609	16	40
7	2556	16	43				

Das Jahr 1782 iſt das 4181 + 1782 = 5963ſte der Jobeläre; alſo ſind ſeit Erſchaffung der Welt verfloſſen 2 Perioden 9 Cykel 34 Jahr, und man findet

2 Pe-

2 Perioden	= 2004450 T.	0 St.	0 M.
9 Cykel	= 161071	21	0
30 Jahre	= 10957	6	30
4 Jahre	= 1460	23	16
Summe	= 2177941 T.	2 St.	46

II. Man dividire dieſe Tagſumme mit 7, ſo zeiget der Quotient die Anzahl der verfloſſenen Wochen, und der Reſt iſt die Anzahl der überſchüßigen Tage: mithin zeigt der Reſt unmittelbar, was der letzte Tag des letzten ſeit dem 1ſten Schöpfungstage (den 23ſten Sept.) verfloſſenen Jahres für ein Wochentag ſey. Im obigen Exempel findet man 311134 Wochen 2 Tage: alſo iſt der letzte Tag; und eben darum auch der erſte Tag, der 23ſte Sept. 1782, ein Montag.

Der 1. Zuſatz.

71. Man findet daraus leicht den Sonntagsbuchſtaben eben des Jahres der Jobeläre. Der Wochentagsbuchſtab für den erſten Tag des Jahres iſt G, weil dieſer allemahl dem 23ſten Sept. zugehört: alſo iſt der Sonntagsbuchſtab F.

Der 2 .Zuſatz.

72. Der Sonntagsbuchſtabe im Gregorianiſchen Calender iſt von dem Sonntagsbuchſtaben der Jobeläre im gemeinen Jahr um einen Tag verſchieden, kommt aber im Schatjahre damit überein. Die Urſache iſt, weil vom 1ſten Januar bis zu Ende des 22ſten Septembers im gemeinen Jahr 37 Wochen 6 Tage, im Schaltjahr grade 38 Wochen laufen. Wegen des Schaltjahres iſt noch auf den Anfang der Jahrrechnungen Rückſicht zu nehmen, weil der Schalttag am 24ſten Februar vor dem 23ſten September einfällt. (62 §.)

Anfangsgründe der Feldmeßkunſt und Geographie.

Die 1. Erklärung.

1. Die mathematiſche Geographie lehrt, wie man die Figur der Gränzen groſſer Länder auf der Erdfläche, auch die Lage der dazu gehörigen merkwürdigen Oerter und ihre Entfernungen von einander durch wirkliche Meſſungen finden, und das alles in Zeichnungen, die man geographiſche Karten nennt, ſo entwerfen könne, daß die gezeichnete Figur der ausgemeſſenen Landſchaft ſoviel möglich ähnlich bleibe. Man unterſcheidet dieſe Wiſſenſchaft gewöhnlich von der Feldmeßkunſt, oder Geodäſie, welche davon Unterricht giebt, wie man ſich bey Ausmeſſungen und Abbildungen ſolcher Ländereyen verhalten müſſe, die in Vergleichung mit der ganzen Erdfläche ſo klein ſind, daß ihre Krümme wegen der ſphäriſchen Figur der Erde nicht merklich iſt.

Anmerkung.

2. Unterſuchungen über die Geſtalt und Gröſſe der Erde, wobey die Erde als ein zum Sonnenſyſtem gehöriger Weltkörper betrachtet, und zugleich auf die jährliche und tägliche Umlaufsbewegung Rückſicht genommen werden muß, gehören zur Aſtronomie. Will man ſie davon trennen; ſo verurſachet das entweder einen unvollſtändigen Vortrag in der Aſtronomie, oder unnöthige Wiederhohlungen in der Geographie.

Die 2. Erklärung.

3. Das Papier worauf man zeichnet, breitet man auf einem Reißbrett oder Tiſch in eine ebene Fläche aus: auf der Erdfläche ſelbſt aber findet ſich eine ſo groſſe Menge von Ungleichheiten, daß die Stellen welche in der Karte verzeichnet werden ſollen, auch wenn ſie nahe bey einander ſind, gewöhnlich nicht in einerley Ebene liegen. Soll ſich die Meſſung mehr ins Groſſe erſtrecken; ſo liegen die Stellen, deren Lage und Entfernungen von einander man wiſſen will, auch nicht in einerley Kugelfläche. Durch einen Punct A, den man als bekannt annimmt, ſtelle man ſich eine Horizontfläche 248 Fig. nach allen Seiten ausgebreitet vor, und aus allen übrigen Puncten B, C, D, E, F, G, lothrecht Linien, welche jene Horizontfläche in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, treffen; ſo ſind die letztern Puncte Projectionen der erſtern auf der Horizontfläche A*g*: oder *b*, *c*, *d*, u. ſ. f. ſind die auf den Horizont A*g* reducirten Puncte B, C, D, u. ſ. f. A*b*, *bc*, *cd*, u. ſ. f. ſind die auf den Horizont reducirten Linien AB, BC, CD, u. ſ. f.

Zuſatz.

4. Die lothrechten Linien laufen zwar allemahl im Mittelpunct T der Erde zuſammen. So lange ſie indeſſen nicht merklich von der parallelen Lage abweichen, ſo lange kann das Stück des Horizonts, worauf man die zu dieſer Gegend gehörigen Puncte und Linien reducirt hat, für eine ebene Fläche angenommen, und alles in einer Feldmeſſer-Karte abgebildet werden. Die auf den Horizont reducirten Linien A*b*, *bc*, u. ſ. f. können in ſolchen Fällen

als grade Linien angeſehen werden, ob es gleich eigentlich Kreisbogen ſind.

Die 3 Erklärung.

5. Ein Grundriß einer Gegend iſt die Abbildung aller dazu gehörigen auf einen willkührlich gewählten Horizont reducirten Puncte und Linien. Ein Profilriß aber ſtellet diejenige Figur vor, die zuwege gebracht würde, wenn man die Erdfläche mit einer verticalen Ebene ſchnitte. Von den auf den Horizont reducirten Stellen der Puncte A, B, C, redet man eben ſo, als wenn es dieſe Puncte ſelbſt wären, A*b*, *bc*, ſind alsdenn die horizontalen Entfernungen zwiſchen A und B, B und C. Die lothrechte Linie *b*B zeigt an um wie viel B höher als A, oder A niedriger als B liegt. Eben die Bewandniß hat es mit den übrigen lothrechten Linien C*c*, D*d*, u. ſ. w.

Die 4. Erklärung.

6. Abſteckſtäbe, oder Fluchtſtäbe ſind 5 bis 6 Fuß hohe, ohngefehr 1 Zoll dicke grade hölzerne Stangen, die unten mit einer eiſernen Spitze verſehen werden, damit man ſie in den Erdboden ſtöſſen und feſt ſtellen könne. Wenn ſie 10 und mehr Fuß hoch, auch mit einer ausgeſpannten Leinwand verſehen ſind, ſo nennt man ſie Meßfahnen. Zeichenſtäbe ſind kleine 8 bis 12 Zoll lange unten mit einer Spitze verſehene Stäbchen, deren oberes Ende einen Spalt hat, um ein Kartenblatt oder ein Stück Papier mit einer Nummer daran zu befeſtigen.

Die 5. Erklärung.

7. Eine grade Linie auf dem Felde abſtecken, heißt mehrere Stäbe vermittelſt eines daran

her-

herabhängenden Lothes ſo in lothrechter Stellung in der Erde befeſtigen, daß ſie alle in einerley Verticalfläche liegen. Die Durchſchnittslinie des Horizonts mit dieſer Verticalfläche iſt alsdenn ein Kreisbogen, den man für eine grade Linie nehmen kann, ſo lange er in Vergleichung mit dem Umfange des gröſten Kreiſes der Erdkugel ſehr klein iſt.

Der 1. Zuſatz.

8. Zwey lothrechte Stäbe ſtehen allemahl in einerley Verticalfläche: um einen dritten in eben die Verticalfläche zu bringen, muß man ihn in einer ſolchen Stelle lothrecht ſtellen, wo der vordere von den beyden übrigen den hintern zu decken ſcheint, damit zugleich der dritte hinwiederum jene beyden zu bedecken ſcheine, wenn man alle drey Stäbe grade vor ſich hat.

Der 2. Zuſatz.

9. Wenn eine grade Linie auf einem an ſich ſchon ebenen Boden ſo abgeſteckt iſt, ſo kann man vermittelſt einer guten und richtigen Meßkette auf dem ebenen Boden dieſe grade Linie meſſen, auch ſtatt derſelben richtig eingetheilte Maaßſtäbe gebrauchen.

Der 3. Zuſatz.

10. Auf der abhängigen Fläche AB wird die horizontale Entfernung zwiſchen A und B gemeſſen, 249 Fig.
indem man über B einen Maaßſtab BC lothrecht ſtellt, an A aber einen andern Maaßſtab AE anlegt, der vermittelſt der Setzwage in die horizontale Lage gebracht wird. Wenn nun die Maaßſtäbe einander in D ſchneiden, ſo iſt AD die horizontale, BD aber die lothrechte Entfernung zwiſchen A und B, oder die Höhe der Stelle A über B.

Der

Der 1. Lehrſatz.

251 Fig. 11. Wenn die Grundlinie *AB* des bey *A* rechtwinklichten Dreyecks eine Ruthe lang iſt, und die Höhe *AC* in ſoviele gleiche Theile getheilt iſt, als man Fuſſe des Längenmaaſſes auf eine Ruthe rechnet: alsdenn aber durch alle Theilungspuncte die graden Linien *DE*, *FG*, *HI*, *KL* mit der Grundlinie parallel gezogen werden; ſo wird *DE* einen Fuß lang, und jede folgende Parallele faſſet ſoviele Fuſſe, als die ihr beygefügte Zahl angiebt, wenn man die Theilungspuncte von der Spitze *C* gegen die Grundlinie zu zählt.

Beweis. Es iſt CA : CD = AB : DE, weil die Dreyecke ABC und CDE einander ähnlich ſind. (175. §. Geom.) Wenn alſo CD = $\frac{1}{10}$ CA iſt, ſo wird DE = $\frac{1}{10}$ AB, mithin ein Decimalfuß wenn AB eine Ruthe iſt. Aus eben dem Grunde hat man CA : CK = AB : KL, und wenn CK = $\frac{7}{10}$ CA iſt, ſo wird KL = $\frac{7}{10}$ AB, alſo 7 Decimalfuß.

Zuſatz.

225 Fig. 12. Darauf gründet ſich folgende Art, einen verjüngten Maaßſtab in ſehr kleine Theile einzutheilen. Es ſey PQ der Maaßſtab der dem 50. §. Geom. gemäß eingetheilt iſt; von C nach P ſind 10 Ruthen, von C nach Q ebenfalls. Man zeichne den rechten Winkel PQR, und trage von Q nach R 10 gleiche Theile von willkührlicher Gröſſe: (beym zwölfftheiligten Maaſſe müßten es 12 gleiche Theile ſeyn,) aus den Seiten PQ, QR verzeichne man hiernächſt das Rechteck PQRS, und ziehe auch CA mit QR

QR durch alle Theilungspuncte in QR aber grade
inien mit PQ parallel. Hiernächſt ziehe man die
Transverſallinien CB, HM, IN, u. ſ. f. bis OR,
ſo iſt der Maaßſtab eingetheilt, deſſen Gebrauch aus
dem vorhergehenden §. leicht begreiflich iſt. Von
T bis E ſind 10 Ruthen 1 Fuß, von V bis G 10
Ruthen 2 Fuß, von X bis L 10 Ruthen 7 Fuß,
alſo von X nach Y 12 Ruthen 7 Fuß, u. ſ. f.

Die 6. Erklärung.

13. Ein Halbkreis, der wie ein Transporteur in Grade und Theile von Graden eingetheilt, aber um ein anſehnliches gröſſer iſt, als ein Transporteur gewöhnlich zu ſeyn pflegte, dient unter dem Nahmen Aſtrolabium, im Groſſen auf dem Felde Winkel zu meſſen. Nur kommt hier noch hinzu 1. ein Paar Lineale mit dioptern, oder ſtaat dieſer mit Fernröhren, wovon eins ſo beweglich iſt, daß es ſich um den Mittelpunct des Inſtruments in der Ebene des eingetheilten Halbkreiſes umdrehen läſſet, 2. ein Fußgeſtelle oder Stativ, womit der Halbkreis mit ſeinem Zubehör auf eine ſolche Art verbunden iſt, daß man denſelben in jede Lage bringen, und in derſelben mit Hülfe gehörig angebrachter Schrauben am Stativ befeſtigen kann. Anſtatt des eingetheilten Halbkreiſes dient auch ſchon eine aus guten Lindenholz nach Art eines Reißbrettes verfertigte Tafel, welche mit einem Stativ völlig ſo wie ſonſt der Halbkreis verbunden iſt, und alsdenn ein Meßtiſch genannt wird. Man befeſtiget darauf ein recht eben ausgebreitetes Papier, und hat überdem dazu ein Lineal mit Dioptern oder mit einem Fernrohr nöthig.

Der

250 Fig. 14. Wenn A, M, N, drey Stellen auf dem Felde ſind, die man mit Abſteckſtäben wie MD, NE, bemerkt hat, und man ſoll den Winkel meſſen, welchen zwey aus A nach MD und NE laufende Horizontallinien AB, AC, an der Spitze A einſchlieſſen; ſo ſtelle man den Meßtiſch mit ſeinem Stativ, nachdem der Stab aus A ausgezogen worden, über A, bringe vermittelſt einer Setzwage, oder **Waſſerwage**, das Tiſchblad in die horizontale Lage, und ſuche vermittelſt der in der 253 Figur abgebil-
253 Fig. deten Gabel auf dem Tiſchblade den Punct *a*, welcher lothrecht über *a* liegt. Man ſteckt nemlich dieſe Gabel an das Tiſchblad, und verſchiebt ſie ſo *lange*, bis das bey N herabhängende Pendel in der 250 Figur die Stelle A trift, ſo weiſet die Spitze M der Gabel (253 Fig.) auf dem Tiſch den Punct *a*. An dieſen Punct, (worin man eine ſubtile Nehnadel einſchlagen kann,) lege man das Lineal mit Dioptern, oder mit dem Fernrohr, drehe es ſo um *a*, daß zuerſt der eine Stab MD und hiernächſt auch der andre NE durch die Diopter, oder das Fernrohr geſehen wird: da dann in der erſten Lage des Lineals längſt deſſelben die grade Linie *ab*, und in der andern Lage *ac* auf dem Tiſch gezogen wird. Nun hat man auf dem Tiſchblade den Winkel *bac* = BAC, (259. §. Geom.) und kann ihn vermittelſt des Transporteuers oder auf andre Art meſſen.

Der 2. Zuſatz.

15. Beym Gebrauch des Meßtiſches genügt es gewöhnlich, daß man den Winkel BAC aufs Papier bringe: um ihn in Graden und Minuten möglichſt genau zu meſſen, leiſtet ein gutes Aſtrolabium beſſere Dienſte. Die Fläche des eingetheilten Halbcir-

kels

kels wird ebenfalls horizontal geſtellt, und der Mittelpunct deſſelben lothrecht über A gebracht, welches vermittelſt eines unten herab hängenden Loths geſchehen kann. Das eine Dioptern-Lineal wird nach MD, das andre nach NE gerichtet, ſo liegt nun ein Bogen des eingetheilten Halbkreiſes zwiſchen den Linealen, worauf man die Grade und Minuten des Winkels zählen kann, ſoweit es die eingebrachte Eintheilung des Randes verſtattet.

Der 3. Zuſatz.

16. Die hier nur ganz kurz beſchriebenen Methoden, wie man grade Linien und Winkel auf dem Felde meſſen kann, ſind der Grund der ganzen Feldmeßkunſt. Wer ſich von der Einrichtung der Inſtrumente und ihrem Gebrauch vollſtändiger unterrichten will, der muß Schriftſteller zu Rathe ziehen, welche die Feldmeßkunſt in ihrer ganzen Vollſtändigkeit abhandeln. Unter den neueſten hieher gehörigen Werken iſt vornemlich des Herrn **Joh. Tob. Mayer Gründlicher und Ausführlicher Unterricht zur practiſchen Geometrie, 2 Theile 8 Gött. 1777. 1779** zu empfehlen.

Die 1. Aufgabe.

17. **Entfernungen zu meſſen, die mit der Meßkette oder den Meßſtäben nicht unmittelbar gemeſſen werden können.** 250 Fig.

Aufl. I. Wenn zwiſchen den Stellen M und N vielleicht ein Moraſt oder ſonſt ein Hinderniß wäre, daß man nicht gradezu von M nach N hinkommen könnte; ſo kann man doch vielleicht aus einer dritten Stelle A ſowohl nach M als auch nach N kommen, und die horizontalen Entfernungen AB, AC, meſſen.

Wenn

Wenn alsdenn der Winkel *bac* = BAC, auf den Meßtiſch gebracht iſt (14. §.) ſo mache man *ab* und *ac* nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo lang, als AB und AC nach dem groſſen Maaßſtabe ſind; ſo iſt *bc* nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo lang, als BC nach dem groſſen Maaßſtabe. (176. §. Geom.) Hat man *bac* = BAC richtig mit dem Aſtrolabio gemeſſen, ſo kann man deſto zuverläßiger BC trigonometriſch berechnen. (34. §. Trig.)

255 Fig. II. Wenn man die Entfernung von A nach C (255 Fig.) meſſen ſollte, nach C aber nicht hinkommen könnte; ſo wähle man eine Standlinie AB, die man meſſen kann. Man ſetze den Meßtiſch gehörig über A, viſire nach B und C, bringe ſo den Winkel *a* = A auf den Meßtiſch, und mache *ab* nach dem vergnügten Maaßſtabe ſo groß, als AB nach dem groſſen Maaßſtabe iſt. Nun trage man den Tiſch nach B, ſtelle ihn wieder wagrecht und ſo, daß *b* lothrecht über B und *ba* in der Richtung der Standlinie BA zu liegen komme: ſo läßt ſich auch der Winkel *b* = B auf den Tiſch bringen. Alsdenn erhält man das Dreyeck *abc* ∼ ABC, (175. §. Geom.) und *ac* iſt nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo lang, als AC nach dem groſſen Maaßſtabe. Das Aſtrolabium kann auf ähnliche Art gebraucht werden, beyde Winkel an A und B zu meſſen, da dann AC trigonometriſch weit genauer und zuverläßiger gefunden wird. (31. §. Trig.

III. Soll man die Entfernung von C nach D
256 Fig. (256. Fig.) meſſen, wenn man nach keinen von beyden Oertern hinkommen kann; ſo wähle man eine Standlinie AB ſo, daß man nicht allein aus A, ſondern auch aus B, beyde Oerter ſehen kann.

Man

Man meſſe die Standlinie AB, und in den Dreyecken ABC, ABD, die Winkel an A und B: ſo kann man in dieſen Dreyecken die Seiten AC, AD, trigonometriſch finden. (31. §.) Auch hat man CAD = BAC − BAD, und kann nun aus dieſem Winkel und den anliegenden Seiten CD finden. (34. §. Trig.) Wenn man den Meßtiſch ſo braucht, wie es ſchon n. II. beſchrieben iſt; ſo kann man die Dreyecke *abc*, *abd*, aufs Papier bringen, die den groſſen Dreyecken ABC, ABD ähnlich ſind. Man macht alsdenn *ab* im verjüngten Maaß ſo groß, als AB nach dem groſſen Maaßſtabe iſt; ſo hält *cd* im verjüngten Maaße ſoviele Ruthen oder Fuſſe, als CD nach dem groſſen Maaßſtabe.

Der 1. Zuſatz.

18. Die lothrechte Höhe DC kann gemeſſen werden, wenn man in E eine Station ſo wählt, daß man die Entfernung ED mit dem Maaßſtabe meſſen kann. Auf den Meßtiſch, wenn die Ebene der Tafel lothrecht geſtellt iſt, kann alsdenn der Winkel BAC gebracht, und A*b* im verjüngten Maaß = AB genommen werden, ſo giebt *bc* auf A*b* ſenkrecht geſetzt im verjüngten Maaß an, wie hoch BC ſey, da dann DB dazu addirt wird, um DC zu finden. Der Gebrauch des Meßtiſches hat indeſſen bey Höhenmeſſungen ſeine Schwierigkeiten, und man findet leichter mit Hülfe des Aſtrolabii den Winkel an A ſo genau, daß man auch die Höhe BC ſehr genau trigonometriſch berechnen kann. (31. §. Trig.) M. ſ. Mayers oben ſchon angeführte practiſche Geometrie. 1 Th. 110. §. 369. S. 254 Fig.

Der 2. Zuſatz.

19. Wenn man ED = AB nicht meſſen könnte, ſo müſte man DE, mithin zugleich auch BA über A hinaus nach F verlängern, die Grundlinie AF = EG mit den Winkeln an A und F meſſen, und daraus AC trigonometriſch ſuchen, oder auch das Dreyeck *Afc* nach dem verjüngten Maaßſtabe zeichnen. Im letzten Fall wird *cb* auf *Af* ſenkrecht gezogen, und nach dem verjüngten Maaßſtabe gemeſſen. Im erſten Fall wird BC aus der Seite AC, dem rechten Winkel an B und dem gemeſſenen Winkel an A trigonometriſch berechnet.

Die 2. Aufgabe.

20. Eine ganze Gegend, worin ſich mehrere merkwürdige Oerter *A*, *C*, *D*, *E*, *B*, 257 Fig. *F*, *G*, *H*, *I*, befinden, in einen geodätiſchen Grundriß zu bringen.

Aufl. Man wähle eine Standlinie AB, entweder ſelbſt zwiſchen zweenen von jenen Oertern, oder wie man es ſonſt bequem findet. Will man den Meßtiſch brauchen, welches allemahl geſchehen kann, wenn die Gegend nicht ſehr groß im Umfange iſt; ſo bringe man alle die Dreyecke ABC, ABD, und ſ. f. wovon AB die gemeinſchaftliche Grundlinie iſt, die Oerter C, D, E, u. ſ. f. aber die Spitzen abgeben, gehörig zu Papier. Dadurch erhält man auf dem Meßtiſch eine Figur die der Figur im groſſen ähnlich iſt. Wenn die Gegend ſehr groß iſt, ſo kann man den Meßtiſch nicht wohl brauchen: allemahl aber kann man in den erwehnten Dreyecken die Winkel an ihrer gemeinſchaftlichen Grundlinie mit dem Aſtrolabio meſſen, und hiernächſt

nächſt alles nach dem verjüngten Maaßſtabe zeichnen, oder trigonometriſch berechnen.

Die 7. Erklärung.

21. Nur ſolche Stellen auf der Erde liegen gleich hoch, die gleich weit vom Mittelpunct der Erde entfernt ſind: die höher liegende Stelle iſt von dieſem Mittelpunct weiter, als die niedriger liegende Stelle entfernt. Wenn AC, BC, die Scheitelli- 248
nien der Oerter A und B, dieſe aber gleich weit vom Fig.
Mittelpunct der Erde entfernt ſind: ſo heißt der zum Halbmeſſer CA gehörige in der Ebene ACB beſchriebene Kreisbogen AB die **wahre Horizontallinie**, die grade Linie AD aber, welche dieſen Bogen in A berührt, die **ſcheinbare Horizontallinie**, welche mit jener wahren Horizontallinie zuſammen gehört. Ferner iſt BD die mit der Entfernung AB zuſammengehörige **Senkung** des **wahren Horizonts** unter den **ſcheinbaren**.

Zuſatz.

22. Im rechtwinklichten Dreyeck AGD iſt $AD^q = CD^q - AC^q$, und $CD = AC + BD$, folglich $AD^q = 2AC \cdot BD + BD^q$. Man ſetze $BD = x$, $AC = r$, $AD = a$, ſo findet man $a^2 = 2rx + xx$, alſo $x + \frac{xx}{2r} = \frac{a^2}{2r}$. So lange der Bogen AB in Vergleichung mit dem Halbmeſſer AC ſehr klein iſt: ſo lange iſt auch gewiß $\frac{x}{2r}$ ein ſo ſehr kleiner Bruch, daß man ohne merklichen Fehler $x =$

 a^2

$\frac{a^2}{2r}$ annehmen kann, da dann auch die Tangente AD von ihrem Bogen AB nicht merklich verſchieden iſt.

Die 8 Erklärung.

249 Fig. 23. Die lothrechte Tiefe DB, um welche eine Stelle B auf der Erdfläche niedriger liegt, als eine andre A, heißt das Gefälle des Bodens von A bis B. Das Verfahren, vermittelſt deſſen man das Gefälle von einem Ort zum andern findet, nennt man gewöhnlich Nivelliren, oder Waſſerwägen, weil es anfangs vornemlich bey Unterſuchung des Gefälles der Flüſſe, auch der durch Kunſt angelegten Waſſerleitungen iſt gebraucht worden. Werkzeuge, die zum nivelliren dienlich ſind, heiſſen Nivellirwagen.

Der 1. Zuſatz.

24. Das im 10. §. beſchriebene Verfahren iſt ſchon eine Art von Nivellement, und die Setzwage dient dabey als Nivellirwage. Im groſſen aber, wenn ſich das Nivellement anſehnlich weit erſtrecken ſoll, würde dies Verfahren zu langweilig ſeyn, auch würde die gemeine Setzwage nicht zuverläſſig genug ſeyn. Die Hauptſache bey einer guten Nivellirwage beſtehet darin, daß ein Lineal mit Dioptern, oder ſtatt deſſen die Axe eines Fernrohr mit einem Fadenkreuz recht genau in die wagrechte Lage muß gebracht werden können. Die Wage wird auf ähnliche Art, wie der Meßtiſch oder das Aſtrolabium mit einem Stativ verſehen.

Der 2. Zuſatz.

25. Die Stangen, welche als Abſteckſtäbe beym Nivelliren gebraucht werden, läſſet man mit ei-

einer daran auf- und abwärts beweglichen ſchwarz angeſtrichenen Tafel verſehen, die in der Mitte einen weiſſen Cirkel, oder ſtatt deſſen ein Paar weiſſe Streifen hat, die ſich in der Mitte ſenkrecht ſchneiden, damit man die Mitte der Tafel in der Ferne genau wahrnehmen könne. Wenn nun in A die 249
Nivellirwage, in B eine Stange mit der Tafel ſteht, Fig.
und E die Mitte iſt, welche der horizontale Geſichtsſtrahl CD trift; ſo kann man die Höhen BE und AF meſſen, woraus von A bis B das Gefälle BG = BE — AF gefunden wird. Man kann auch die Nivellirwage bey A ohngefehr in die Mitte zwiſchen zwey Stationen K und B bringen, damit man durch CD nach E und wieder zurück durch DC nach H viſiren könne. Die Tafel läßt man an jeder Stange durch einen Gehülfen ſo befeſtigen, daß in E und H ihre Mitte ſey. Nun mißt man BE und HK, und findet das Gefälle von K nach B = BE — HK.

Der 3. Zuſatz.

26. Auf dieſe Art kann man von Station zu 248
Station fortfahren. Wenn alsdenn die Entfernung Fig.
von der erſten Station etwas beträchtlich wird; ſo muß man auch von dem ſo gefundenen Gefälle noch die Senkung des wahren Horizonts unter den ſcheinbaren abziehen. (22. §.) Nach Picards Erdmeſſung (241. §. Aſtron.) iſt die Länge eines Grades 57060 Toiſen, alſo der Erddurchmeſſer 6538594 Toiſen, und man findet

auf eine Weite AB	die Senkung BD d. w. Hor.		
von 50 Toiſen	0 Fuß	0 Zoll	$\frac{1}{3}$ Lin.
100 =	0 =	0 =	$1\frac{1}{3}$ =
200 =	0 =	0 =	3 =
300 =	0 =	1 =	0 =
400 =	0 =	1 =	$9\frac{1}{3}$ =
500 =	0 =	2 =	9 =
1000 =	0 =	11 =	0 =
2000 =	3 =	8 =	0 =
3000 =	8 =	3 =	0 =
4000 =	14 =	8 =	0 =

Eine Verbeſſerung dieſer ſo berechneten Senkung iſt aber noch wegen der Strahlenbrechung nöthig. (51. §. Aſtron.) Ein von D ausgehender Strahl, der in grader Linie verlängert A treffen würde, wird in eine gegen die Erde zu hohle krumme Linie gebogen, und trift die Stelle A nicht. Ein andrer Strahl aber, der aus einer niedrigern Stelle E kommt, und in grader Linie verlängert über A wegfahren würde, trift die Stelle A, und ſeine letzte Richtung kommt mit der Lage der Tangente AD überein. Dieſerwegen erſcheint E im ſcheinbaren Horizont AD, und die Senkung des wahren Horizonts unter dem ſcheinbaren, welche man vom gefundenen Gefälle abziehen muß, iſt eigentlich nicht BD, ſondern BE. Nach H. Lamberts Unterſuchungen iſt BE = $\frac{6}{7}$ BD. (M. ſ. Picards Abhandlung vom Waſſerwägen mit neuen Beyträgen von J. H. Lambert, Berlin 1770. im 51. und 54 §.) Für AB = 4000 Toiſen iſt alſo BE = 12 Fuß $6\frac{6}{7}$ Zoll.

Der

Der 4. Zuſatz.

27. Im 22. §. war $x = \frac{a^2}{2r}$, oder $BD = \frac{AB^2}{2r}$, 248 Fig.
alſo iſt umgekehrt $AB = \sqrt{2r \cdot BD}$. Daraus findet man, wie weit ſich auf der ſphäriſchen Erde der Geſichtskreis erſtrecke, wenn die lothrechte Höhe BD des Auges gegeben iſt. (Man vergleiche den 19. §. Opt.) Nimmt man BD = 1 Toiſe, ſo findet man AB = 2557 Toiſen. Uebrigens verhält ſich die Entfernung AB wie die Quadratwurzel aus der Höhe BD.

Die 9. Erklärung.

28. Die künſtliche Erdkugel iſt in ihrer Einrichtung der künſtlichen Himmelskugel ganz ähnlich. Sie iſt um eine Axe beweglich, welche die Erdaxe mit ihren Polen vorſtellet: auf derſelben iſt nicht allein der Aequator mit ſeinen Parallelkreiſen von 10 zu 10, oder auch wohl von 5 zu 5 Graden verzeichnet, ſondern auch die Meridiane von 10 zu 10 Graden, oder auf gröſſern Kugeln von 5 zu 5 Graden. Einer von den Meridianen wird für den erſten angenommen, ſo kann hiernächſt ein jeder Ort deſſen Länge und Breite bekannt iſt, auf der Kugel verzeichnet werden.

Die 10. Erklärung.

29. Geographiſche Univerſalkarten ſtellen eine völlige Halbkugel der Erde vor, Specialkarten aber nur beſondre Landſchaften. Es ſind eigentlich perſpectiviſche Zeichnungen, oder Projectionen entweder der völligen Halbkugelfläche, oder eines Theils von ihr, mit den dazu gehörigen Meridianen und Parallelkreiſen.

Die 11. Erklärung.

30. Es ſey DE der Durchmeſſer eines gröſten Kreiſes der Kugel ODHE, und OH die zu dieſem Kreiſe gehörige Axe der Kugel. Das Auge O befinde ſich in dieſer Axe, und die Kugel ſey an der Seite offen, die dem Auge zugekehrt iſt, damit das Auge in die innere Höhlung hinein ſehen könne: der zur Axe OH gehörige gröſte Kreis ſey die Tafel, AKLB ein zur Halbkugel DAHE gehöriger Kugelſchnitt, (318. Geom.) und EMGN ſeine Projection auf der Tafel: ſo wird die Figur dieſer Projection noch von der Entfernung des Auges O von der Tafel abhängen. Nimmt man dieſe Entfernung des Auges unendlich groß an, ſo iſt die Projection orthographiſch. (43. §. Perſpectiv.) Wenn aber die Entfernung des Auges dem Halbmeſſer der Kugel gleich iſt, ſo nennt man es die ſtereographiſche Projection des Kugelſchnittes.

Der 1. Lehrſatz.

30. **Wenn über der graden Linie *BD* eine**
47 Fig. **krumme Linie *BAD* nach dieſem Geſetz verzeichnet iſt, daß die lothrechte Linie *AE* aus jedem Punct *A* der krummen Linie zwiſchen den beyden Stücken *BE*, *DE*, der graden Linie eine mittlere geometriſche Proportionallinie iſt; ſo iſt die krumme Linie ein Kreis, und *BD* ſein Durchmeſſer.**

Beweis. Man halbire BD in C, und ſetze BC = CD = a, CE = x, EA = y, ſo iſt BE = $a + x$, DE = $a - x$, und vermöge der Vorausſetzung $a + x : y = y : a - x$. Daraus folgt $(a+x)(a - x) = yy$, alſo ferner $a^2 - x^2 = y^2$, und x^2 +

$+ y^2 = a^2$. Man ziehe CA, ſo iſt $CA^2 = x^2 + y^2$, mithin $CA^2 = a^2$, und $CA = a$, folglich die krumme Linie ein Kreis, CB = CD der Halbmeſſer, und BD der Durchmeſſer.

Der 2. Lehrſatz.

31. Die ſtereographiſche Projection *FMGN* eines Kugelſchnittes *AKBL* iſt ein Kreis, die Projection der Axe dieſes Kugelſchnitts läuft durch den Mittelpunct der Tafel und ſteht auf der Durchſchnittslinie ſenkrecht, worin die Ebene des Kugelſchnittes und die Tafel einander ſcheiden. 250 Fig.

Beweis. Die Projection FMGN iſt ein Schnitt des Geſichtskegels OAB, in deſſen Fläche alle Strahlen liegen, die vom Umfange des Kreiſes AKBL ins Auge kommen. Es ſey I der Mittelpunct dieſes Kreiſes, alſo CI*p* ſeine Axe: ſo wird eine Ebene durch HC*p* gelegt den gröſten Kreis ADOE der Kugel geben, und dieſer wird nicht allein die Ebene des Kreiſes AKBL, ſondern auch ſeiner Projection FMGN ſenkrecht ſchneiden, (261. §. Geom.) ſo daß AB und FG die Durchſchnittslinien ſind. Es ſey M ein Punct im Umfange der Projection, wo man will, und MP auf FG ſenkrecht: ſo iſt zugleich MP auf der Ebene ADOB ſenkrecht. (263. §. Geom.) Durch P ziehe man QR mit AB parallel, alſo auch C*p* ſenkrecht, ſo iſt die Ebene MPR auf ADOB ſenkrecht (261. §. Geom.) und eben darum ſchneidet ſie auch C*p* ſenkrecht: (263. §. Geom.) folglich iſt dieſe Ebene MPR mit AKBL parallel, (269. §. Geom.) und die Durchſchnittsfigur MQNR mit dem

Geſichtskegel iſt ein Kreis: (293. §. Geom.) folglich iſt $PM^q = PQ . PR$. (179. §. Geom.)

Ferner iſt OCE = R = OBH, und die Dreyecke COG, BOH haben den Winkel an O gemein, folglich iſt CGO = BHO = BAO (130. §. Geom.) = ORQ (101. §. Geom.) Ueberdem iſt GPQ = FPR, (20. §. Geom.) alſo ſind die Dreyecke PQG, PFR einander ähnlich, und es iſt PQ : PG = PF : PR, folglich PQ . PR = PG . PF, mithin ferner $PM^q = PG . PF$, und daraus folgt, daß FMGN ein Kreis ſey. (30. §.) Noch ziehe man O*p*, ſo liegt O*p* mit CE in einerley Ebene ODAB, und CE wird von O*p* in π geſchnitten. Alsdenn iſt π die Projection des Pols *p*, und Cπ die Projection der Axe C*p*. Die Ebenen AKBL, FMGN gehörig erweitert ſchneiden einander in einer graden Linie TV die durch den Punct S geht, worin AB und CE zuſammen laufen. Dieſe Durchſchnittslinie TV iſt auf der Ebene ADOB ſenkrecht, alſo mit PM parallel. Weil nun Cπ auf PM ſenkrecht iſt, ſo iſt Cπ auch auf der Durchſchnittslinie TV ſenkrecht, worin die Ebenen AKBL, FMGN einander ſchneiden.

Zuſatz.

32. Man ſetze den Bogen O*q* = H*p* = α, und A*p* = B*p* = β; ſo iſt α der Abſtand des Auges vom Pol des Kugelſchnittes AKBL, und β der Abſtand der Peripherie dieſes Schnittes von ihrem Pol, Weil nun die rechtwinklichten Dreyecke OCF, AOH, ſo wie OCG, OBH, einander ähnlich ſind; ſo hat man OA : AH = OC : CF, OB : BH = OC : CG, folg-

folglich $CF = \frac{AH}{OA} . OC$, $CG = \frac{BH}{OB} . OC$, und man findet den Durchmeſſer der Projection $FG = CF + CG = \left(\frac{AH}{OA} + \frac{BH}{OB}\right) . OC$. Ferner iſt $AOH = \frac{1}{2} ACH = \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$, $BOH = \frac{1}{2} BCH = \frac{1}{2} (\beta + \alpha)$, folglich $CF = \frac{OC . \tang \frac{1}{2} (\beta - \alpha)}{\sin tot}$, $CG = \frac{OC . \tang \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}{\sin tot}$, und $FG = \frac{\tang \frac{1}{2} (\beta - \alpha) + \tang \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}{\sin tot} . OC$. Für die Entfernung der Projection π des Pols p vom Mittelpunct der Tafel hat man $C\pi = \frac{OC . \tang . CO\pi}{\sin tot}$ also $C\pi = \frac{OC . \tang \frac{1}{2}\alpha}{\sin tot}$.

Die 12. Erklärung.

33. Wenn der Aequator für die Tafel angenommen wird, und das Auge im Pol des Aequators ſeine Stelle erhält, ſo nennt man es die Polar-Projection der Kugel. Wenn aber die Ebene eines Meridians für die Tafel angenommen wird, und das Auge im Umfange des Aequators ſteht, ſo giebt das die äquatoriſche Projection. Jeder andre gröſte Kreis der Kugel iſt zugleich der Haupthorizont der beyden Oerter, wo ſeine Pole hinfallen. Wenn alſo das Auge in dem einen Pol ſtehet, welcher als das Nadir angeſehen wird, ſo iſt der andre Pol das Zenith für den Horizont, welcher die Tafel abgiebt,

und

und das hat den Nahmen der ſtereographiſchen Horizontalprojection veranlaſſet.

Der 1. Zuſatz.

34. Die Polarprojectionen aller Meridiane ſind grade Linien, die ſich im Mittelpunct der Tafel unter eben ſo groſſen Winkeln, wie die Meridiane ſelbſt ſchneiden. Die Projectionen der Parallelkreiſe haben mit der Tafel einerley Mittelpunct und ihr Halbmeſſer iſt $= \frac{r.\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\beta}{\text{ſin tot}}$, wenn r den Halbmeſſer der Kugel bezeichnet. Daraus folgt eine ganz leichte
252 Fig. Verzeichnung der Polarprojection der Kugel. Man nehme den Halbmeſſer CA der Tafel, welcher mit dem Halbmeſſer der Kugel einerley iſt, willkührlich an, zeichne damit einen Kreis, der die Tafel vorſtellt, und theile ihn in gleiche Bogen DH, HK, KL, u. ſ. f. ſo ſind die Halbmeſſer CH, CK, CL, die Projectionen ſovieler Meridiane, die unter den Winkeln DCH, HCK, KCL, u. ſ. f. gegen einander geneigt ſind. Um die Projection eines Parallelkreiſes zu zeichnen, nehme man auf dem Quadranten DA einen Bogen DP von ſovielen Graden, als der Abſtand des Parallelkreiſes von ſeinem hinter der Tafel liegenden Pol faſſet, und ziehe EP; ſo iſt $DP = \beta$, und es wird CM $= \frac{r\ .\ \text{tg}\ .\ \frac{1}{2}\beta}{\text{ſin tot}}$: alſo iſt CM der Halbmeſſer der Projection, und C ihr Mittelpunct.

Der 2. Zuſatz.

35. Weil die Meridiane gröſte Kreiſe ſind, ſo iſt für ſie allemahl $\beta = 90^\circ$ und man erhält CF =

$\frac{r\ \mathrm{tg}\,.\,\frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)}{\mathrm{ſin\ tot}}$, $CG = \frac{r\ \mathrm{tg}\,.\,\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha)}{\mathrm{ſin\ tot}}$.

(32. §.) Der Pol der Parallelkreiſe iſt vom Auge um 90° entfernt, wenn daſſelbe im Aequator ſteht: alſo hat man für die äquatoriſche Projection eines Parallelkreiſes $CF = \frac{r\ \mathrm{tg}\,.\,\frac{1}{2}(\beta - 90^\circ)}{\mathrm{ſin\ tot}}$, $CG = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)}{\mathrm{ſin\ tot}}$, oder $CF = -\frac{r\,\mathrm{tg}.\,\frac{1}{2}(90^\circ - \beta)}{\mathrm{ſin\ tot}}$ $CG = \frac{r\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\ (90^\circ + \beta)}{\mathrm{ſin\ tot}}$. Wenn nemlich der Winkel CSB = 90° wird, ſo fällt F an der andern Seite von C, und CF erhält die entgegen geſetzte Lage. Alsdenn iſt der Durchmeſſer der Projection = $(CG - CF) = \frac{r(\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(90^\circ + \beta) - \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(90^\circ - \beta))}{\mathrm{ſin\ tot}}$.

Der 3. Lehrſatz.

36. **Wenn zwey Winkel oder Kreisbogen** 253 *AB* und *EB* einander zu 90° ergänzen, und Fig. *EB* > *AB* iſt; ſo hat man tg. *EB* = ſec (*EB* — *AB*) + tg (*EB* — *AB*), und tg. *AB* = ſec . (*EB* — *AB*) — tg (*EB* — *AB*).

Beweis. Man nehme BM = AB, ſo iſt EM = EB — AB und EK = tg. (EB — AB). Man nehme ferner EG = AB, ſo iſt BG = EB — AB = EM, und EH = AD = tg. AB. Noch ſey EN = EM = BG, alſo EL = EK, und KL = 2tg (EB — AB): ſo iſt ACB = BCM, ACB = CFE; (101. § Geom.) alſo CFE = BCM, und KF = CK

CK = CL, folglich auch KF + EK oder EF = CK + EK, d. i. tg. EB = ſec (EB — AB) + tg. (EB — AB)

Ueberdem iſt AB = EG, BG = EN, alſo AG = GN, und ACH = HCL auch iſt ACH = CHL, (101. §. Geom.) alſo CHL = HCL und LH = CL, oder EH + EL = CL, folglich EH oder AD = CL — EL, d. i. tg. AB = ſec (EB — AB) — tg. (EB — AB.)

Zuſatz.

37. Man ſetze EB = $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, ſo iſt AB = 90° — EB = $45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, alſo EB — AB = α, und man erhält tg. $(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = \text{ſec}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha$, $\text{tg}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \text{ſec}\,\alpha - \text{tg.}\,\alpha$. Daraus folgt $\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) + \text{tg}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 2\,\text{ſec}\,\alpha$, und $\text{tg}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) - \text{tg}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 2\,\text{tg.}\,\alpha$: mithin iſt im 35. §. $\frac{1}{2}\,(CF + CG) = \frac{r\,\text{ſec}\,\alpha}{\text{ſin tot}}$ der Halbmeſſer der Projection eines Meridians, und der Halbmeſſer der Projection des Parallelkreiſes $\frac{1}{2}$ $(CG - CF) = \frac{r\,\text{tang}\,\beta}{\text{ſin tot}}$.

Die 3. Aufgabe.

38. Die äquatoriſche Projection der Meridiane und Parallelkreiſe auf der Tafel zu entwerfen.

251 Fig. Aufl. Mit dem Halbmeſſer CP = r zeichne man den Kreis, welcher den erſten Meridian, und zugleich die Tafel vorſtellet, und theile ihn mit den Durchmeſſern DE, PQ, in vier Quadranten: ſo iſt

PQ die Projection der Weltaxe, und zugleich des Meridians, welcher den erſten Meridian rechtwinklicht ſchneidet, wenn DE die Projection des Aequators vorſtellet. Ueberdem iſt PQ die Durchſchnittslinie aller Meridiane mit der Tafel; alſo liegen die Mittelpuncte ihrer Projectionen in DE. Man theile die Quadranten PD, PE, von P nach D und E in ihre Grade, auch eben ſo die Quadranten QD, QE, von Q nach D und E. Das Auge ſteht im Pol des erſten Meridians PDQE, und ſeine Entfernung vom Pol eines jeden andern Meridians iſt dem Winkel gleich, unter welchen dieſer den erſten Meridian ſchneidet. Dieſer Stundenwinkel ſey alſo $= \alpha$. Man nehme $DR = ES = \alpha$, ſo iſt $PR = 90° - \alpha$, $PS = 90 + \alpha$. Man ziehe QR, QS, welche DE in F und G ſchneiden, ſo iſt CF

$$= \frac{r \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° - \alpha)}{\text{ſin. tot.}},\quad CG = \frac{r \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° + \alpha)}{\text{ſin. tot.}};$$

mithin iſt FG der Durchmeſſer der Projection, den man alſo in A halbiren kann, um aus dem Mittelpunct A mit dem Halbmeſſer $AF = AG$ die Projection PFQ zu verzeichnen. (35. §.) Eben der Mittelpunct A und Halbmeſſer AF wird auch noch bequemer ſo gefunden. Es iſt $CA = \frac{1}{2}(CG - CF)$

$$= \tfrac{1}{2} r \; \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° + \alpha) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90° - \alpha)}{\text{ſin. tot.}} \quad (35.\ §.),$$

alſo $CA = \frac{r \tan \alpha}{\text{ſin. tot.}}$. (37. §.) Man nehme alſo

$QB = 2\alpha$, ziehe PB, ſo iſt $CA = \frac{r \tan \alpha}{\text{ſin. tot.}}$, AP

=

$= \frac{r \sec \alpha}{\text{ſin. tot.}}$, und man hat beydes zugleich den Mittelpunct A und Halbmeſſer AP = AF der Projection. (37. §.)

Die Durchſchnitte der Parallelkreiſe und der Tafel ſind mit DE parallel: alſo liegen die Mittelpuncte ihrer Projectionen in CP. Demnach nehme man $EH = 90° - \beta$, $EK = 90° + \beta$, ziehe DH, DK; ſo iſt $Cf = \frac{r \,\text{tg}\, \frac{1}{2}(90° - \beta)}{\text{ſin. tot.}}$, $Cg = \frac{r \,\text{tg}\, \frac{1}{2}(90° + \beta)}{\text{ſin. tot.}}$, und fg iſt der Durchmeſſer der Projection, (35. §.) den man in a halbirt, um ſie aus dem Mittelpunct a mit dem Halbmeſſer $af = ag$ zu verzeichnen. Alsdenn iſt $Ca = \frac{1}{2}(Cg + Cf) = \frac{1}{2} r . \frac{\text{tg}\, \frac{1}{2}(90° + \beta) + \text{tg}\, \frac{1}{2}(90° - \beta)}{\text{ſin. tot.}}$ $= \frac{r \sec . \beta}{\text{ſin. tot.}}$: (37. §.) mithin kann man noch vortheilhafter den Halbmeſſer CH, und durch H eine Tangente der Tafel auf CH ſenkrecht ziehen, ſo iſt a der Mittelpunct, und $aH = af$ der Halbmeſſer der Projection. Denn nun iſt $Ca = \frac{r \sec \beta}{\text{ſin. tot.}}$, und $Ha = \frac{r \,\text{tg}\, . \beta}{\text{ſin. tot.}}$ iſt der Halbmeſſer. (37. §.)

Allgemeine Anmerkungen.

39. Die unumgänglich nothwendige Kürze, worin ich mich einſchränken muß, macht es nothwendig, bey dieſen Proben davon, wie man die Kugelprojectionen zeichnet, es bewenden zu laſſen vollſtändigere Unterſu-

chungen darüber findet man im VII Theil meines Lehrbegriffes der Mathematik im XIX bis XXVII Abſchnitt. Wenn die geographiſche Länge und Breite eines Ortes bekannt iſt, ſo wird ſeine Stelle, die er auf der Charte einnehmen muß, leicht gefunden, weil es diejenige iſt, wo der Meridian des Ortes und ſein Parallelkreis einander ſchneiden. Die Seekarten ſind gewöhnlich nicht dergleichen perſpectiviſche Entwürfe der Erdfläche, und das hat ſeinen Grund in dem beſondern Gebrauch, welchen der Schiffer von ſolchen Karten macht. Soviel thunlich ſegelt der Schiffer von einem Orte zum andern nach einerley Compaßſtrich, und alsdenn ſchneidet der Weg des Schiffes, welcher die Loxodromie genannt wird, alle Meridiane unter einerley Winkel. Dieſe Linie ſoll der Schiffer auf ſeiner Karte leicht finden können, eine grade Linie, die er auf der Karte von einem Orte zum andern ziehet, ſoll ihm den Compaßſtrich angeben, welchen er zu halten hat. Dadurch ſind zuerſt die ſo genannten Plankarten veranlaſſet worden, welche eigentlich nur dienen können, kleine Gegenden der Erd- und Waſſerfläche vorzuſtellen, ſo lange die Krümme der Erde nicht zu ſehr merklich wird. Die Meridiane werden durch grade Linien vorgeſtellet, die einander parallel laufen, und die Parallelkreiſe ebenfalls durch grade Linien, welche jene rechtwinklicht ſchneiden.

40. Die Länge der Grade der Parallelkreiſe nimmt gegen die Pole zu immer mehr ab, da im Gegentheil die Grade der Meridiane immer einerley Länge behalten. Das Verhältniß der Grade der Meridiane zu den Graden eines Parallelkreiſes in gegebener Breite iſt einerley mit dem Verhältniſſe des ganzen Sinus zum Coſinus der Breite. Bey Verzeichnung ſolcher Seekarten, die groſſe Gegenden vorſtellen ſollen, muſte man hierauf nothwendig Rückſicht nehmen, ob man gleich auch davon nicht abgehen konnte, die Meridiane als grade Parallellinien vorzuſtellen, wenn die loxodromiſchen

Linien auf der Karte grade Linien bleiben ſollten. Dies hat die Erfindung der reducirten Karten veranlaſſet. Ein Engelländer, **Eduard Whrigt**, verfiel zuerſt darauf, und **Mercator** brachte die Sache mit allem Fleiß zur Ausführung. Weil die Meridiane parallele grade Linien bleiben ſollten, ſo muſte man nothwendig die Grade aller Parallelkreiſe mit den Graden des Aequators von gleicher Gröſſe verzeichnen. Damit aber doch in jeder Breite das richtige Verhältniß der Grade des Parallelkreiſes gegen die Grade des Meridians beobachtet werde, ließ man die Grade der Meridiane gegen die Pole zu in eben den Verhältniſſen wachſen, in welchen die Grade der Parallelkreiſe hätten abnehmen ſollen. Dieſerwegen verhält ſich auf ſolchen Karten in einer gegebenen Breite der Grad des Parallelkreiſes zum Grade des Meridians, wie der Coſinus der Breite zum ganzen Sinus, oder wie der ganze Sinus zur Secante der Breite. Weil nemlich in der 89 Figur die Drenecke ACT, BCD, einander ähnlich ſind, ſo iſt CD : CB = CA : CT, oder coſ : ſin tot = ſin tot : ſec. Auf dergleichen Karten können die Länder, Inſeln und Meere zwar nicht in ihrer wahren Geſtalt erſcheinen: ſie bleiben aber deſſen ungeachtet dem Schiffer auf ſeinen Seereiſen zu dem beſondern Gebrauch, welchen er davon machen kann, ſehr dienlich.

Kurzer Begriff
der
Architectoniſchen Wiſſenſchaften.

Erſte Gründe der bürgerlichen Baukunſt.

Die 1. Erklärung.

1. Die bürgerliche Baukunſt giebt von demjenigen Unterricht, was man wiſſen muß, um feſte, nach der jedesmahligen Abſicht bequem eingerichtete, auch ſchön ins Auge fallende Gebäude aufzuführen.

Anmerkung.

2. Die ausübende Baukunſt, wie der Nahme ſchon anzeigt, iſt von dem, was man Bauwiſſenſchaft nennen könnte, ohngefehr ſo unterſchieden, als die ausübende Tonkunſt von der theoretiſchen Tonwiſſenſchaft. So wenig man die ausübende Tonkunſt deßwegen als eine mathematiſche Wiſſenſchaft anſehen kann, weil es eine allgemeine mathematiſche Theorie von Berechnung der Töne giebt: ſo wenig kann auch die ausübende Baukunſt darum für eine mathematiſche Wiſſenſchaft angenommen werden, weil die allgemeinen Lehren der Rechenkunſt, Geometrie und der Mechaniſchen Wiſſenſchaften dabey ihre Anwendung finden.

Der 1. Grundſatz.

3. Der Boden, auf welchem das Gebäude ſtehen ſoll, muß entweder ſchon ſeine natürliche Feſtigkeit haben, oder man muß ihm durch die Kunſt zu helfen ſuchen.

Der 1. Zuſatz.

4. Nur ſelten wird man das Gebäude auf einem Felſen aufführen können: aber auch ſelbſt der Fels

liegt nur darum feſte genug, weil er ſich ſeit undenklichen Jahren in den lockern Erdbeben tief genug eingeſenkt hat, und weil ſein Gewicht durch die Laſt des Gebäudes nicht beträchtlich vermehrt wird. Allemahl wird eine auf der lockern Erde liegende Laſt, ſo lange nach und nach einſinken, bis der Druck der Laſt mit dem Gegendruck des Bodens ins Gleichgewicht kommt.

Der 2. Zuſatz.

5. In Anſehung dieſes Erfolgs hat der weiche Erdboden einige Aehnlichkeit mit einer flüßigen Maſſe, worin ſich ein ſpeciſiſch leichterer feſter Körper wegen des von der Flüßigkeit herrührenden Gegendrucks nur bis auf eine gewiſſe Tiefe eintaucht. (28. §. Hydroſt.) Das Maaß des ſpeciſiſchen Gewichts einer flüßigen Maſſe worin ſich die Laſt bey gleicher Figur, Gröſſe und Gewicht eben ſo tief als in den weichen Erdboden ſenkt, könnte man alſo zugleich für das Maaß der Feſtigkeit des Bodens annehmen.

Der 2 Grundſatz.

6. Je gröſſer die Fläche des Bodens iſt, worauf man einerley Laſt vertheilt hat, deſto weniger trägt jede Stelle des Bodens von gegebener Gröſſe. Der Druck, den jede Stelle leidet, verhält ſich wie die Laſt, und umgekehrt wie die Grundfläche. Wenn eine Laſt von 100000 Pfunden über 100 Quadratfuß Fläche gleichförmig vertheilt iſt; ſo trägt jeder Quadratfuß 1000 Pfund. Wäre aber die Laſt über 200 Quadratfuß gleichförmig vertheilt; ſo trüge jeder Quadratfuß nur 500 Pfund.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Laſt hat die Figur eines rechtwinklichten Parallelepipedi, ſie ſteht lothrecht auf dem Erdboden, ihr Gewicht, ihre Grundfläche und die Tiefe, um welche ſie ſich geſenkt hat, ſind gegeben: man ſoll die Feſtigkeit des Bodens finden.

Aufl. Man ſetze das Gewicht der Laſt $= p$, ihre Grundfläche $= b^2$, die Tiefe des Einſinkens $= a$, das Gewicht eines Cubicfuſſes einer ſolchen flüßigen Maſſe $= q$, worin die Laſt eben ſo tief ſinken würde: ſo iſt die körperliche Gröſſe des eingetauchten Theils $= ab^2$, und dieſer mit q multiplicirt muß dem Gewicht der Laſt gleich ſeyn. (28. §. Hydroſt.) Demnach erhält man $p = ab^2q$, folglich $q = \frac{p}{ab^2}$, und das iſt das Maaß der Feſtigkeit des Bodens. (5. §.)

Der 1. Zuſatz.

8. Wäre die Feſtigkeit des Bodens bekannt, ſo fände man die Tiefe des Einſinkens $a = \frac{p}{b^2q}$.

Der 2. Zuſatz.

9. Das Gewicht des Parallelpipedi müſte ſehr anſehnlich ſeyn, wenn es ſich in einem nur mäßig feſten Boden um eine beträchtliche Tiefe einſenken ſollte. Läßt man dagegen ein etwas ſchweres Gewicht auf das Parallpipedum herab fallen, ſo wird ſelbiges dadurch in die Erde hineingetrieben, und es läßt ſich aus mechaniſchen Gründen beweiſen, daß der Widerſtand des Bodens gefunden werde, wenn man das Gewicht mit der Höhe des Falles multiplicirt, und mit dem Product der Grundfläche

in die Tiefe des Einſinkens dividirt. (Die Gründe hievon findet man im 4ten Theile des Lehrbegriffes im XVI. Abſch. 248 – 252. §. der Mech.)

Der 3. Grundſatz.

10. Die Baumaterialien müſſen nicht allein für ſich ſchon hinlänglich feſte, ſondern auch ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie von der freyen Luft und der ſo mannigfaltig abwechſelnden Witterung nicht leicht zerſtört und ihrer Feſtigkeit beraubet werden.

Der 1. Zuſatz.

11. Stein und Holz ſind es vornemlich, welche dieſe Eigenſchaften beſitzen. Man braucht natürlich gewachſene, auch durch Kunſt gemachte Backſteine, wohin die Mauerſteine und Dachziegel gehören. Steine, die man durch Zerſprengung eines Felſens erhält, heiſſen Bruchſteine, und Quaterſteine, wenn ihnen durchs Behauen die Figur eines rechtwinklichten Parallelepipedi gegeben iſt. Unter den mancherley Holzarten dienen vornemlich an naſſen Orten das Eichene, Erlen, Weißbüchen und Föhrenholz: an trockenen Orten, Eichen, Föhren, Tannen und Fichten.

Der 2. Zuſatz.

12. Holz und Steine müſſen unter einander verbunden werden, um ein Gebäude daraus aufzuführen. Dazu iſt ſchon dienlich, dem Holz auch den Steinen eine ſolche Figur zu geben, daß ſie in einander greifen, und wegen ihrer Figur einander nicht leicht ausweichen können. Zur noch feſtern Verbin-

bindung dienen überdem Kalk und Leimen. Von den Kalkſteinen, aus welchen der Kalk gebrannt wird, geben die weicheſten den Spaar- oder Gyps-kalk, die härteſten den Leder- oder Bitterkalk. Der Spaarkalk bindet gleich, ſobald er naß geworden iſt, und wird gleich hart: man miſcht ihn mit Sande, damit er weiter reichen möge. Der Lederkalk bindet beſſer, wenn er mit Sande vermiſcht iſt, und er heißt alsdenn Mörtel. Cement iſt eine Miſchung aus Kalk mit zerſtoſſenen Ziegelſteinen und derſelbe iſt vornemlich zu Gebäuden im Waſſer dienlich.

Die 2. Erklärung.

13. In den meiſten Fällen wird ein Gebäude in mehrere theils zur Wohnung theils zu andern Abſichten beſtimmte Zimmer vertheilt: daher kommt es, daß man die äuſſere Umfaſſungsmauer, von den innern Scheidewänden unterſcheidet. Wenn auf dem Bauplatz vielleicht nicht Raum genug iſt, ſoviele Zimmer als nöthig ſind, neben einander anzulegen, oder auch vielleicht andre Urſachen hinzu kommen, ſo bauet man mehr Geſchoſſe oder Etagen über einander. Halbgeſchoſſe bauet man nicht gern unter 7 Fuß, ganze Geſchoſſe nicht unter 11 Fuß hoch.

Der 1. Zuſatz.

14. In mehrern über einander gebaueten Geſchoſſen müſſen die Mauern lothrecht über einander ſtehen, und die nächſt untere muß allemahl etwas ſtärker, als die obere, alſo die unterſte am ſtärkſten ſeyn, welche die Grundmauer heißt. Mauern, die von der Seite her dem Windſtoſſe, oder ſonſt einem ſtarken Druck ausgeſetzt ſind, verſtärkt

man durch Strebemauern: auch läßt man wohl die Querſchnitte der Mauer gegen ihre untere Grundfläche zu gröſſer werden, da dann die Abweichung der Seitenflächen von der lothrechten Stellung das **Mauerrecht** heißt. Man erhält dadurch zugleich den im 6. §. erwehnten Vortheil der vergröſſerten Grundfläche.

Der 2. Zuſatz.

15. Wenn gleich die Materialien an ſich gut und auch feſt mit einander verbunden ſind; ſo muß doch vermöge der Erfahrung die ſchwächſte Mauer von Backſteinen bey einer Höhe von 12 Fuß nicht unter 2 Fuß eine Mauer von Bruchſteinen nicht unter 2 Fuß 4 Zoll Dicke haben. Bey mehrern Geſchoſſen über einander muß die nächſtuntere Umfaſſungsmauer 3 bis 4 Zoll ſtärker ſeyn, als die nächſtobere. Den Scheidewänden giebt man $\frac{2}{3}$ der Dicke der Umfaſſungsmauern. Bey einem aus Backſteinen aufzuführenden Gebäude von 3 Etagen erhält alſo die Umfaſſungsmauer der oberſten Etage 2 Fuß, der zweyten von oben herunter 2 Fuß 3 Zoll, der dritten 2 Fuß 6 Zoll, und die obere Fläche der Grundmauer 2 Fuß 9 Zoll. Wären es Bruchſteine, ſo erhielte die oberſte Mauer 2 Fuß 4 Zoll Dicke, die zweyte 2 Fuß 8 Zoll, die dritte 3 Fuß, und die obere Fläche der Grundmauer 3 Fuß 4 Zoll. Die Grundmauer erhält allemahl ein ſtarkes Mauerrecht, ſo daß die Dicke auf jede 3 Fuß Höhe um 1 Fuß verſtärkt wird.

Der 3. Zuſatz.

16. Die Feſtigkeit eines Gebäudes hängt vornemlich von der Grundmauer ab. Wäre es möglich

lich ein ganzes Gebäude auf einmahl auf einen ſonſt ebenen, aber nicht völlig felſenfeſten Boden zu ſetzen, ſo würde es ſich bis auf eine gewiſſe Tiefe einſenken, ſo lange bis alles mit dem Wiederſtande des Bodens im Gleichgewicht wäre. Eben ſo tief müſte man den Graben für die Grundmauer machen, aber auch ſobald die Grundmauer aufgeführt iſt, den übrigen Raum wieder eben ſo dichte und feſte als vorher wieder mit Erde ausfüllen laſſen. Das hiernächſt über der Grundmauer aufgeführte Gebäude würde ſich nun nicht mehr tiefer ſenken.

Die 2. Aufgabe.

17. **Die Feſtigkeit des Bodens iſt durch Verſuche gefunden, auch iſt die Laſt des ganzen Gebäudes gegeben: man ſoll finden, wie tief die Grundmauer ſeyn muß, um das Sinken des Gebäudes zu verhüten.**

Aufl. Es ſey $AB = c$ die obere Dicke der Grund- 265 Fig.
mauer, $AC = x$ die Höhe oder Tiefe, $EF = CD + 2\,DE$ die untere Dicke, und $2\,DE = m\,.\,AC$; ſo wird m durch das Mauerrecht beſtimmt, und es iſt gewöhnlich $m = \frac{1}{3}$. (15. §.) Weiter ſey das Gewicht des Gebäudes $= p$, die Länge der Mauer $= l$, die Feſtigkeit des Bodens $= q$; ſo iſt $q = \frac{p}{x\,.\,EF\,.\,l}$ (§. 7.) der Vorausſetzung gemäß vermöge eines Verſuchs bekannt, alſo auch $x\,.\,EF\,. = \frac{p}{q\,.\,l}$. Ueberdem iſt $DE + CF = 2\,DE = m\,.\,AC$, alſo $EF - C = mx$, und $EF\,.\,x - c\,.\,x = mx^2$. Weil nun $EF\,.\,x$ bekannt iſt, ſo ſetze man

man EF . $x = h^2$, und man erhält $mx^2 + cx = h^2$, oder $m^2x^2 + c . mx = mh^2$. Daraus findet man $mx = \surd(mh^2 + \frac{1}{4}c^2) - \frac{1}{2}c$. (46. §. Allg. Rech.), alſo EF $= \surd(mh^2 + \frac{1}{4}c^2) + c$, und $x = \frac{1}{m}(\surd(mh^2 + \frac{1}{4}c^2) - \frac{1}{2}c$.

Der 1. Zuſatz.

18. So läßt ſich wengiſtens überſehen, wie es möglich ſey, die nöthige Tiefe der Grundmauer den Gründen der Theorie gemäß zu finden. M. ſ. H. **Lamberts Anmerkungen über die Baukunſt im 3 B. der Beyträge zum Gebrauch der Mathematik** 35 bis 39. §, 353 – 358. S. In der Ausübung läßt man gewöhnlich mit einer Hacke verſuchen, ob ſie viel oder wenig in den Boden eindringt, und ſchätzt darnach die Feſtigkeit des Bodens. Nachdem man nun das Erdreich mehr oder weniger feſte findet, giebt man der Grundmauer $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, von der Höhe der Hauptmauern des Gebäudes zur Tiefe.

Der 2. Zuſatz.

19. Ein Boden, der aus rohen eckigten Felſenſtücken beſtehet, wenn ſich derſelbe wenigſtens 10 Fuß in die Tiefe erſtreckt, hält ſehr feſte, und wird einem zuſammenhängenden Felſen gleich geſchäzt. Im kleinern Kieſe iſt ſchon eine Grundmauer wenigſtens von 4 bis 5 Fuß nöthig. Im moraſtigen Boden werden ſoviele Pfähle als möglich eingeſchlagen, die Köpfe eben gemacht, der Raum dazwiſchen wird mit Schutt und kleinen Steinen ausgefüllet, und dieſe werden mit Gewalt zuſammen gerammet. Auf die Köpfe der Pfähle wird hiernächſt ein Roſt aus Balken gelegt, die kreuzweiſe mit ein-

einander verbunden werden, und auf dieſe wird die Grundmauer geſetzet.

Die 3. Erklärung.

20. Eine Decke von Steinen ſie mag auf Pfeilern oder Mauern ruhen, die man hier **Widerlagen** nennt, heißt überhaupt ein **Gewölbe**: ihre untere Fläche kann eben oder auch gekrümmet ſeyn, und im letztern Fall erhält das **Bogengewölbe** von der Art der Krümmung einen eigenen Unterſcheidungsnahmen. Die Figur kann einen Kugelabſchnitt, oder auch ein Stück eines hohlen Cylinders vorſtellen, da dann im erſten Fall der Nahme **Kugelgewölbe**, im letzten Fall **Tonnengewölbe** gebraucht wird. Wenn ſich zwey Tonnengewölber kreuzweiſe ſchneiden, ſo wird daraus ein **Kreuzgewölbe**.

Zuſatz.

21. In der 256. Figur ſtellet AFD den auf der Axe ſenkrechten Durchſchnitt eines Tonnengewölbes, und AB, CD, die Widerlagen vor. Sollen die Steine EFGH, KLMN, ſo an einander gelegt werden, daß die Fugen EF, HG, KL, NM, gegen die Axe der Cylinderfläche zuſammen laufen, die das Gewölbe vorſtellet; ſo erhalten ſie die Figur eines abgekürzten Keils. Jeder Stein ſtrebt wegen ſeines Gewichts zu ſinken, und die anliegenden aus einander zu treiben; die anliegenden Steine leiſten wenigſtens einigen Widerſtand, auch ſo lange ſie noch nicht mit Mörtel unter einander verbunden ſind. Daher iſt man veranlaſſet worden zu unterſuchen, was das Gewölbe für eine Figur haben müſſe, wenn es ſich ſelbſt durch ſein eigenes Ge-

256 Fig.

Gewicht unterſtützen ſoll, ſo daß kein Stein dem andern ausweichen würde, auch wenn man keinen Mörtel dazwiſchen brächte.

Die 4. Erklärung.

267 Fig. 22. Die grade Linie AB ſey wagrecht, in A ſey das eine und in B das andre Ende einer aus kleinen Gelenken beſtehenden Kette befeſtiget, die übrigens frey herunter hängt. Dieſe Kette wird die Figur einer krummen Linie annehmen, die ganz in einer verticalen Ebene liegt, und den Nahmen der Kettenlinie erhalten hat.

Der 1. Zuſatz.

23. Es ſey D ein Glied der Kette, das vermöge ſeines Gewichts in der Verticallinie DP zu ſinken ſtrebt, ferner ſey DQ eine Tangente der Kettenlinie und DR darauf ſenkrecht, PR aber mit DQ, und PQ mit DR parallel: ſo ſtellet DQ das relative Gewicht des Kettengliedes vor, wenn DP das abſolute Gewicht vorſtellet, und DR den ſenkrechten Druck. Nun ſind nicht allein alle relative Gewichte der Kettenglieder, ſondern auch die ſenkrechten Kräfte um deßwillen im Gleichgewicht weil ihre gemeinſchaftliche Wirkung theils von dem, was die Kette in A und B hält, theils von dem Zuſammenhange der Kettenglieder unter einander aufgehalten wird.

Der 2. Zuſatz.

24. Man ſtelle ſich vor, das Gewicht des Kettengliedes D wirke lothrecht aufwärts, nehme DS = DP, und verzeichne das dem vorigen entgegengeſetzte Rechteck DVST; ſo erhellet, daß zwar die Glieder der Kette ſich nicht würden im Gleich-

gewicht erhalten können, wohl aber Gewölbſteine ſtatt der Kettenglieder, wenn ſie wegen der keilförmigen Figur dem lothrechten Druck DV nicht nachgeben könnten, der ſeitwärts gehende Druck DT aber auf der Seitenfläche des keilförmigen Gewölbſteines ſenkrecht wäre. Die Figur der aufwärts gekehrten Kettenlinie, ſo daß die hohle Seite unten kommt, würde demnach für ein Gewölbe die vortheilhafteſte ſeyn. Die Steine müſſen alsdenn ſo gehauen werden, daß die Fugen die Kettenlinie ſenkrecht durchſchneiden, und das Gewölbe wird nun noch um ſo mehr Feſtigkeit erhalten, wenn die Steine in den Fugen mit Mörtel verbunden werden.

Der 3. Zuſatz.

25. Die Widerlagen müſſen nicht allein das Gewicht des Gewölbes tragen, ſondern auch überdem noch einem Druck des Gewölbes gewachſen ſeyn, der dieſe Widerlagen von einander zu treiben ſtrebt. Ein Bogen der aus einem einzigen völlig feſten Stück beſtünde, würde einen ſolchen Seitendruck nicht äuſſern: alſo würde es nicht nöthig ſeyn, den Widerlagen mehr Stärke zu geben, als nöthig wäre, das Gewicht des Gewölbes zu tragen, wenn der Mörtel oder Steinkütt die Gewölbſteine ſo feſt verbände, als wenn der ganze Bogen aus einem feſten Stück beſtünde. Die Regeln, welche man bey den practiſchen Schriftſtellern findet, um die nöthige Stärke der Widerlagen zu finden, leiden gröſtentheils Einſchränkungen. Die ſicherſte Regel wäre, das Gewölbe nach der Kettenlinie zu bauen, und dieſe bis zum Fundament zu verlängern, ſo würde man ſehen, wie breit das Gewölbe

auf

auf dem Fundament werden würde, und darnach lieſſe ſich die Stärke der Widerlage proportioniren. (M. ſ. Lamberts Anmerkungen, a. a. O. 68. u. f. §. 376. u. f. S.)

Die 5 Erklärung.

264 Fig. 26. Um eine Wand aus Holzwerk zu verbinden, legt man zuerſt die **Hauptſchwelle** AB auf der Grundmauer wagrecht, darüber ſtellt man eine reihe **Pfoſten**, oder **Stender**, CD, EF, lothrecht, etwa 3 bis 4, und höchſtens 8 bis 9 Fuß weit von einander, oben darüber legt man das **Plattſtück**, oder die **Mauerplatte**, GH. Die Pfoſten ſind oben und unten mit Zapfen verſehen, welche in die Hauptſchwelle und das Plattſtück eingreifen. Jedes paar Stender, wenn ſie nicht über 12 Fuß hoch ſind, bezapfet man noch mit zweenen horizontalen **Riegeln**, wie IK. Wo die Pfoſten aber 4 Fuß und darüber von einander entfernt ſind, zapfet man die **Sturmbänder** LM, NO, nach der Diagonallinie des Rechtecks ein, welches zwiſchen den Stendern mit der untern und obern Schwelle oder Riegel befindlich iſt. Da wo Sturmband und Riegel einander ſchneiden, wie bey P, müſſen ſie Falzen haben, womit ſie in einander greifen. Die zwiſchen dem Holzwerk leer gebliebenen Fächer füllt man hiernächſt ſo mit Mauerwerk aus, daß die Backſteine auf die breite Seite gelegt werden. Von einer ſolchen Wand ſagt man alsdenn, ſie beſtehe aus **Fachwerk**

Die 6. Erklärung.

27. Jedes Geſchoß in einem Gebäude muß ſeine eigene Decke haben. Wenn dieſe nicht gewölbt iſt,

iſt, ſo legt man mehrere **Balken**, wovon Q, R, die Köpfe vorſtellen, oben auf den Plattſtücken einander gegenüber ſtehender Wände in paralleler Lage höchſtens 4 Fuß weit von einander. Dieſe Balken werden mehrerer Feſtigkeit wegen nicht allein in das Plattſtück GH, ſondern auch in die darüber liegende **Laufſohle** oder **Saumſchwelle** ST eingelaſſen, wenn noch ein Geſchoß darauf geſetzt wird. In die Zwiſchenräume der Balken werden **Welgerhölzer** gebracht, die man mit Stroh und Leimen umwickelt, und in die dazu dienlichen Falzen der Balken hineinſchiebt. **Geſchaalte Decken** beſtehen aus ganz nahe an einander gelegten Balken. **Stichbalken** nennt man ſolche, die in andre Balken eingezapfet ſind, und **Träger** diejenigen, welche queer unter andre Balken gezogen werden, um dieſe gegen das Einbiegen oder Zerbrechen in Sicherheit zu ſetzen. Ein Balken AB, 268 Fig.
den man aus zweyen andern ſo zuſammen ſetzt, daß in beyden Zacken gehauen werden, die genau in einander eingreifen, heißt ein **Sprengwerk**. Ein **Hängewerk** aber beſtehet, aus zweyen parallelen 269 Fig.
Balken, in einer lothrechten Ebene, die wie AB, CD, vermittelſt der Säulen EF, und **Sturmbänder** oder **Streben** GH ſo verbunden ſind, daß ſich einer allein nicht biegen kann, ohne den andern zugleich mit zu biegen.

Zuſatz.

28. Die Hängewerke ſind vornemlich beym Brückenbau ſehr brauchbar.

Die 7. Erklärung.

29. Ein gutes **Dach** wird beym Gebäude vorzüglich erfodert, weil es das ganze Gebäude von

oben her gegen Regen und Schnee ſchützen ſoll. Man giebt dem Thurmdach gewöhnlich die Figur einer Pyramide, eines Kegels, auch wohl ſonſt eines runden kugelähnlichen Körpers. Dächer auf andern Gebäuden, wenn ſie zwey ebene gegen einander geneigte Flächen vorſtellen, heißen Satteldächer, oder deutſche Dächer; wenn ſie aber aus vier Ebenen beſtehen, welche nach allen vier Seiten des Gebäudes abhängig ſind, ſo nennt man ſie Zeltdächer, oder holländiſche Dächer. Altane ſind ſo niedrige Dächer, daß man darauf umher gehen kann. Das franzöſiſche oder manſardiſche Dach beſtehet aus einem abgekürzten hohen Satteldach, mit einem andern darüber erbaueten Satteldach oder Zeltdach.

Zuſatz.

30. Wofern ein Gebäude mit dem menſchlichen Körper einerley Symmetrie haben muß, und das Dach den Kopf vorſtellet, ſo bauen die Italiäner nach dem beſten Geſchmack das Dach kleiner als alles andre. In Deutſchland, ſagt man, müſſen die Dächer wegen des kältern Clima höher ſeyn, damit Regen und Schnee den Gebäuden nicht ſo ſehr ſchade, welches in Italien nicht ſo ſehr zu fürchten iſt. Die hohen Dächer können bey manchen Gebäuden auch ſonſt noch andre Abſichten haben, wie wenn daſelbſt noch mehrere Böden über einander angelegt werden.

Die 8. Erklärung.

270 Fig. 31. Es ſey AB ein Balken von der Decke, der oberſten Etage, welcher beym hölzernen Gebäude auf dem Wandrahmen, beym gemauerten aber oben

auf

auf der Mauer mit Hülfe der Mauerlatten eingekammet iſt, und ſich auf jeder Seite 1 bis 1½ Fuß über der Wand hinaus erſtreckt. Hierüber ſetzt man vermittelſt der Verzapfung oder Einlaſſung zwey gleich lange Dachſparren CD, ED, die mit dem Balken ein gleichſchenklichtes Dreyeck ausmachen. In einer Höhe von 10 Fuß verzapfet man den horizontal liegenden Kehlbalken FG, auch wenn das Dach hoch iſt, mehrere über einander, um mehr Böden anzulegen. In ſolchem Fall wird der oberſte HI der Hahn- oder Haynbalken genannt. Die kleinen Hölzer *ab*, *cd*, welche Aufſchöblinge heiſſen, legt man unten an die Sparren um das Ablaufen des Regens deſto beſſer zu befördern. Man ſtellt auf dieſe Art entweder über jeden Balken, oder wechſelsweiſe auf einem Balken um den andern, ein paar Sparren, benagelt ſie von auſſen mit Brettern oder mit Latten, befeſtiget auf erſtere Bley, oder Kupfer, oder Schieffer, oder hängt auf letztere Dachziegel; ſo wird daraus das gewöhnliche Dach.

Die 9. Erklärung.

32. Um dem Dache noch mehr Feſtigkeit zu geben, wird der ſo genannte Dachſtuhl darunter gebauet. Man ſetzt unter dem Kehlbalken FG eine Wand, die aus dem Spannriegel KL mit den Säulen MN, CP, und Streben QR, ST, beſtehet. Auf dieſe längſt des Gebäudes unter jedem Sparren erbaueten Wände kann man die Träger, wie V, X, legen, die ſowohl in den Spannriegel, als in den drüber liegenden Kehlbalken eingreifen. Dieſe Träger dienen zugleich einen Boden anzulegen.

Zuſatz.

33. Das alte deutſche Dach erhält die ganze Breite des Gebäudes, das neue deutſche Dach nur die halbe Breite des Gebäudes zu ſeiner Höhe. Die Höhe des italiäniſchen Daches, wenn es nicht ein Altandach iſt, worauf man herumgehen kann, macht den vierten oder auch nur den fünften Theil
271 Fig. von der Höhe des Gebäudes aus. Von dem letztern ſtellt AB den bey A und B eingekammten Balken vor, AC, BC, die Sparren, DE, FG die Streben, und CH die Hängſäule.

Die 10. Erklärung.

34. Aus einer untern Etage ſteigt man in die obere auf Treppen hinauf, die aus gleich hohen und gleich breiten Stuffen beſtehen müſſen. Sie heiſſen nach Verſchiedenheit ihrer Anlage grade Treppen oder Windeltreppen. Die graden Treppen werden auch mit Ruheplätzen unterbrochen.

Zuſatz.

35. Die Stuffen der Haupttreppen macht man zwiſchen 6 und 8 Zoll hoch, und nicht unter 1 Fuß breit. Bey Nebentreppen weicht man hievon mehr oder weniger ab. Wieviele Stuffen die Treppe haben müſſe, wird gefunden, wenn man die ganze Höhe der Treppe mit der Höhe einer Stuffe dividirt. Die Breite einer Haupttreppe, alſo die Länge der Stuffen, muß der Breite der Hausthür gleich ſeyn. Wenn dieſe Länge der Stuffen mit ihrer Breite, und ihre Anzahl feſtgeſetzt iſt; ſo findet man leicht den Quadratinhalt des Raums, den die Treppe wegnimmt, wozu auch noch der Raum für den Ruheplatz gehört.

Die

Die 11. Erklärung.

36. Fenſteröfnungen ſind nöthig, damit das Tageslicht in die Zimmer fallen könne, und Thüren, damit man nicht allein ins Haus ſelbſt hinein, ſondern auch aus einem Zimmer ins andre kommen könne. Die Wand unter dem Fenſter heißt die Brüſtung. Portale, Thore und Thorwege ſind ſo groſſe Thüröfnungen, daß man durchfahren kann.

Der 1. Zuſatz.

37. Eine Fenſterbrüſtung macht man zwiſchen 3 und 4 Fuß hoch. Die Fenſteröfnung nicht unter 3 Fuß breit, die Höhe wird $1\frac{1}{2}$ bis 2mahl ſo groß als die Breite gemacht. Hauptthüren in Zimmern werden nicht unter 4 Fuß breit, und zwiſchen 6 und 7 Fuß hoch gemacht. Portale und Thore müſſen wenigſtens 8 Fuß breit, und 10 bis 12 Fuß hoch ſeyn.

Der 2. Zuſatz.

38. Die Feſtigkeit einer Wand leidet allemahl bey vielen und groſſen Thür- und Fenſteröfnungen: darum müſſen dieſe mit Zwiſchenwänden, die man Schäfte nennt, abwechſeln. Dieſe Schäfte müſſen wenigſtens ſo breit als die Fenſter ſeyn, wiewohl man bey hölzernen Gebäuden es nicht allemahl ſo genau beobachtet.

Der 4. Grundſatz.

39. Unſer Urtheil darüber, in wie weit eine Sache ſchön ins Auge falle, hängt vornemlich davon ab, daß wir bey Verbindung ihrer Theile unter einander Ordnung und Uebereinſtimmung wahrnehmen,

und die Verhältniſſe dieſer Theile leicht nach dem Augenmaſſe erkennen, wenn ſie gleich eben nicht ſo ganz einfach ſind.

Zuſatz.

40. Daher kommt es, daß man diejenigen für gute architectoniſche Verhältniſſe erkennet, welche ſich durch kleine Zahlen ausdrücken laſſen. Eben darauf gründen ſich die Regeln, wie man die Höhe einer Thür- oder Fenſteröfnung zu ihrer Breite, die Länge und Breite eines Zimmers zu der Höhe proportioniren, und überhaupt dahin ſehen muß, daß die Ordnung und Uebereinſtimmung aller Theile eines Gebäudes zu gewiſſen nützlichen Abſichten, ſo wie auch ihre Verhältniſſe gegen einander leicht bemerkt werden können.

Grundſätze bey Vertheilung der Zimmer in jedem Geſchoß.

41. Wenn nur auf einer Seite Fenſter angebracht werden können, ſo iſt nur eine Reihe von Zimmern möglich, zwo Reihen, wenn man auch hinten heraus Fenſter haben kann, drey Reihen, wenn das Gebäude frey ſtehet, und an allen vier Seiten Fenſter haben kann. Die Haupttreppe erfordert allemahl den Raum eines Zimmers, auch wenigſtens ein Fenſter zur nöthigen Erleuchtung.

Zimmer, die von einander unabhängig ſind, haben etwas vorzügliches: auch ſoll man von der Hausthüre unmittelbar in jedes Zimmer kommen können, ohne erſt durch andre zu gehen. Dies leidet nur ſeine Ausnahmen, wenn zwey Zimmer unmittelbar zuſammen gehören, als Wohn- und Schlafzimmer, Studierzimmer und Bücherſaal, Küche und Speiſekammer.

Um

Um zur Winterszeit die Wohnzimmer zu erwärmen, ſind Oefen nöthig, die Camine und Schornſteine erfodern, ſo wie in der Küche für das Küchenfeuer der Rauchfang mit dem Haupt-Schornſtein erforderlich iſt. Der Raum, wo die Röhren von dieſen Schornſteinen auch in den obern Etagen durchgeführt werden, geht hie und da noch von demjenigen ab, der ſonſt mit zu den Zimmern genützt werden könnte.

Der Symmetrie zu gefallen, ſoll die Hausthüre in der Mitte ſeyn, und das Haus auf beyden Seiten der Hausthüre gleichviele Fenſter haben, wenn es ſich thun läßt. Das verurſacht ebenfalls einige Einſchränkungen bei Vertheilung der Zimmer. M. ſ. mit mehrern Lamberts Anmerkungen a. a. O. 95. u. f. §. 401 u. f. S. Succows Erſte Gründe der bürgerlichen Baukunſt, Jena 1751. zweyter Abſchnitt, 492. u. f. §. §.

Die 12. Erklärung.

42. Anſtatt der Mauern können auch Stützen gebraucht werden, gewölbte oder andre Decken, oder auch ſonſt darauf liegende Laſten zu tragen. Eckigte Stützen heiſſen Pfeiler, runde Stützen aber nennt man Säulen.

Zuſatz.

43. Bey Waſſerleitungen, bedeckten Gängen und Luſthäuſern, die ſchattig und luſtig ſeyn ſollen, können Stützen ohne Mauern allein genügen. Bey Gängen, die mit groſſen Gebäuden, beſonders öffentlichen Gebäuden zuſammen gehören, dient oft, um überall darin Licht und freye Luft zu haben, eine Reihe Säulen, die mit einer Mauer parallel läuft,

um die Decke des Ganges, und vielleicht noch einen Theil der obern Stockwerke des Gebäudes mit zu tragen. In Kirchen und ähnlichen groſſen Gebäuden, dienet oft ein Paar Reihen parallel laufender Stützen ganze Gewölber zu tragen.

Die 13. Erklärung.

44. Wenn der Boden worauf die Säule ſteht, nicht an ſich ſchon felſenhart iſt, welches immer der ſeltenſte Fall ſeyn wird; ſo iſt die Säule, ſie mag aus Stein oder Holz beſtehen, feſter als der Boden, und bedarf einer Unterlage mit einer ungleich gröſſern Grundfläche, als die Säule ſelbſt hätte. (6. §.) Daher giebt man der Säule ein **Pideſtal** oder **Poſtament** BC, welches die Figur eines Würfels oder
272 Fig. rechtwinklichten Parallelepipedi hat. Dieſem Poſtament kann mehrerer Feſtigkeit wegen eine noch breitere nicht ſo hohe Unterlage AB gegeben werden: auch kann man es mit einer hervorragenden Bedeckung CD verſehen. Solchergeſtalt erhält das Poſtament drey Theile, das **Fußgeſimſe** AB den **Würfel** BC und das **Poſtamentgeſimſe** CD. Die Säule EF ſelbſt mögte nun wohl ohne weitere Unterlage auf dem Poſtament ſtehen können, und oben zur Bedeckung auch eben nichts nöthig haben, weil ſie ohnehin durch das, was ſie tragen ſoll, bedeckt wird. Wenn alſo der **Säulenſchaft** EF unten noch wieder ein **Schaftgeſimſe** DE, und oben das **Capital** FG erhält; ſo ſind das wohl nur Verzierungen: oder vielleicht werden eiſerne Ringe oder Bänder dadurch vorgeſtellet, welche den Fuß und Kopf der Säule, die bey ihrem erſten Gebrauch allemahl aus Holz beſtanden hat, gegen Beſchädigung ſicher ſtellen ſollen.

Zuſatz.

Zuſatz.

45. Der Säulenſchaft ſoll eigentlich einen Baum vorſtellen, deſſen Dicke nach dem Gipfel zu abnimmt: alſo giebt es demſelben ein deſto mehr natürliches Anſehen, wenn er gegen das Capital zu ein wenig verjüngt wird, oder an Dicke etwas abnimmt. Unten läßt man dem Schaft in der Höhe von einigen Fuſſen einerley Dicke, weil auch die Dicke natürlich gewachſener Bäume unten nicht gleich merklich abnimmt.

Die 14. Erklärung.

46. Die Geſimſe haben die alten Griechiſchen und Römiſchen Baumeiſter ſchon aus kleinen Theilen unter dem Nahmen der Glieder zuſammen geſetzt, wovon die Figuren 273 bis 278 Durchſchnitte vorſtellen. Sie ſind entweder von ebenen, oder von krummen cylindriſchen Flächen begränzt, und heiſſen im erſten Fall Platten, im letzten Fall Stäbe, Hohlkehlen und Karnieſſe, nachdem ſie erhaben ſind, wie die 273 Figur, oder hohl, wie die 275 Figur, oder zum Theil hohl, zum Theil erhaben, wie die 276 Figur vorſtellet. Ueberdem iſt es gewöhnlich, wenn ein Stück über dem andern hervorraget, daß man den Ueberſchuß die Ausladung, oder Auslaufung nennt. Eine hohle Krümme aber die zwey platte Glieder an einander hängt, heißt ein Anlauf, oder Ablauf, wie BC in der 279 Fig.

Der 1. Zuſatz.

47. Der Stab wird gezeichnet, wenn man die Höhe AB in C halbirt, und aus C einen Halbkreis beſchreibt. Theilet man die Höhe AB in 3 gleiche Theile, und nimmt die Ausladung AC = AD = 273 Fig. 274 Fig.

$= \frac{2}{3}$ AB, ſo begränzt der Bogen BC einen Vierthelſtab, wozu man den Mittelpunct findet, wenn man mit dem Halbmeſſer BC aus B und C in E den Durchſchnitt macht.

Der 2. Zuſatz.

275 Fig. 48. Die Hohlkehle zeichnet man, wenn die Höhe AB in E halbirt, und die Ausladung AC = AE $= \frac{1}{2}$ AB genommen, alsdenn mit BC aus B und C ein Durchſchnitt in D gemacht, aus D aber der Bogen BC beſchrieben wird. Um den Karnieß zu

276 Fig. zeichnen, nimmt man AE $= \frac{1}{2}$ AB, und die Ausladung AC = AB. Ferner zeichnet man das Rechteck ACDE, und beſchreibt aus D den Quadranten CF, aus E den Quadranten BF.

Der 3. Zuſatz.

49. Man zeichnet den Karnieß auch umgekehrt auf folgende Art. Es wird die Ausladung AC

277 Fig. = AD $= \frac{1}{2}$ AB, und man halbirt BC in E. Aus E und C macht man in F, aus E und B in G einen Durchſchnitt, da dann aus F der Bogen EC, aus G der Bogen BE beſchrieben wird. Noch ſtellt

278 Fig. DEC eine doppelte Hohlkehle vor, die man ſo zeichnet. Man macht AE $= \frac{1}{3}$ AB = AD, und BE $= \frac{2}{3}$ AB = BC, verzeichnet die Quadrate AEFD, BEGC, beſchreibt aus F den Bogen DE, aus G den Bogen EC.

Der 4. Zuſatz.

279 Fig. 50. Um den Ablauf oder Anlauf zu zeichnen, macht man AB = 2 AC, ſchlägt aus B und C Bogen die ſich in D ſchneiden, ſo iſt D der Mittelpunct für den Bogen BC.

Die

Die 15. Erklärung.

51. Was die Säule zu tragen hat, das iſt an ſich ſehr gleichgültig, wenn die Säule für die darauf liegende Laſt nur ſtark genug iſt. Eine Reihe Säulen kann eben ſo, wie eine Reihe Pfoſten in einer aus Holzwerk aufgeführten Wand, (264. Fig.) eine Mauerplatte mit darauf liegenden Balkenköpfen, und über denſelben noch die Saumſchwelle mit der obern Wand, oder ſtatt deſſen die Sparren mit einem Dach tragen. Säulen können auch gewölbte Schwibbogen unterſtützen. Dies alles gehört eigentlich nicht zur Säule. Indeſſen hat man doch aus dieſen ſehr zufälligen Dingen noch ein Hauptgeſimſe für die Säule gemacht. Es heißt auch das Gebälke, und man rechnet dahin die folgenden drey Stücke. Der Architrab GH ſtellt das vor, was 272 an der hölzernen Wand (264 Fig.) das Plattſtück Fig. iſt, der Frieß, oder der Borten, HI, einen darauf liegenden Balkenkopf, das Karnieß, oder der Kranz IK, die Lauffohle der obern Etage, oder an deren ſtatt das Dachgeſimſe, wenn etwa mehr Säulen ein Dach zu tragen hätten. Das alles erhält nur ein natürliches Anſehen, wenn zwey oder mehr Säulen in einer Reihe neben einander ein Hauptgeſimſe tragen, und eine Colonnade oder Säulenſtellung ausmachen. Da haben nun die Balkenköpfe zur Verzierung Einſchnitte erhalten, und heiſſen alsdenn Triglyphen: oder vielleicht ſollen dieſe Triglyphen kleine Tafeln zur Bedeckung der Balkenköpfe vorſtellen. Im Kranze erſcheinen Sparrenköpfe, die auch unter dem Nahmen der Kragſteine vorkommen, wenn die Säulenſtellung Mauer-

werk

werk trägt. Kleinere Hervorragungen im Kranze mit Zwiſchentiefen heiſſen Zahnſchnitte.

Die 16. Erklärung.

52. Bogengewölbe, wenn ſie auſſer ihren Widerlagen zu beyden Seiten mit Säulen verziert ſind, heiſſen Arcaden, oder Bogenſtellungen. Die Widerlagen heiſſen alsdenn Nebenpfeiler. Da wo das Gewölbe, welches hier der Schwibbogen heiſſet, auf der Widerlage ruhet, bringt man unter dem Nahmen des Kämpfers eine Verzierung an, die bey dem Nebenpfeiler ohngefehr das vorſtellet, was das Capital bey der Säule iſt: auch pflegte man den Schlußſtein mit eigenen Zierrathen auszuzeichnen.

Zuſatz.

53. Decken, ſie mögen aus Holzwerk beſtehen, oder gewölbt ſeyn, ſind gewöhnlich dazu beſtimmt, daß noch andre Laſten darauf ruhen ſollen, wovon Brücken, Waſſerleitungen, auch ſolche Decken Beyſpiele abgeben, die in Gebäuden ein unteres Geſchoß vom obern abſondern. Ueberdem dienen Gebälke und Schwibbogen, die Säulen unter ſich zu verbinden und in ihrer Lage zu erhalten. Das Gebälke ſollte nach ſeinem urſprünglichen Gebrauch von Holz ſeyn, und es kommt ziemlich unnatürlich heraus, wenn man ſteinerne Balken und Sparrenköpfe als etwas ſchönes bewundern ſoll. Gebälke und Schwibbogen haben freylich ihr eigenes Gewicht, welches die Säulen und Widerlagen tragen müſſen: weil aber doch der Regel nach noch auſſerdem andre Laſten darüber vertheilt ſeyn ſollen; ſo würde man darauf vorzüglich mit Rückſicht nehmen

men müſſen, wenn nach richtigen mathematiſchen Gründen die Entfernung zwiſchen den Säulen einer Colonnade, oder Arcade, ſo wie die Höhe und Stärke der Säulen nicht allein im Ganzen, ſondern auch das Verhältniß ihrer Theile gegen einander feſtgeſetzt werden ſoll.

Die 17. Erklärung.

54. **Eine Säulen-Anordnung oder Säulenordnung** beſtehet in dem richtigen nach Gründen feſtgeſetzten Verhältniſſe ſowohl der einzelnen Theile einer Säule unter ſich, als auch der übrigen zu ganzen Säulen- und Bogenſtellungen gehörigen Theile gegen einander, mit Rückſicht auf die im 39. §. bemerkten Geſetze der Schönheit. Hiebey wird der halbe Durchmeſſer der untern Grundfläche des Säulenſchaftes unter dem Nahmen des **Moduls** als der Maaßſtab gebraucht, den man in 30 gleiche Theile unter dem Nahmen der **Modulstheilchen** am beſten mit Hülfe der Transverſallinien, wie ſonſt einen verjüngten Maaßſtab eintheilt, wie es die 280 Figur, ohne daß eine weitere Beſchreibung nöthig wäre, deutlich macht. 280 Fig.

Zuſatz.

55. Man ſetze voraus, daß die Höhe des Säulenſchaftes ein vielfaches von der Höhe ſowohl des Piedeſtals, als auch des Gebälkes ſeyn müſſe, und daß die zuletzt erwehnten Höhen ebenfalls vielfache des Moduls ſeyn müſſen. Man nehme ferner an, daß n und m ein Paar kleine Primzahlen bezeichnen, wovon $n > m$ iſt. Dies vorausgeſetzt ſey

die

die Höhe des Poſtaments = *n* Modul
— — des Gebälkes = *m* Modul
— — des Schaftes = *mn* Modul:
alsdenn iſt die ganze Säulenhöhe = $(n + mn + m)$ Modul.

Die 18. Erklärung.

56. Die architectoniſche Schnecke iſt eine aus Kreisbogen von ungleichen Halbmeſſern nach der folgenden Vorſchrift zuſammengeſetzte krumme Linie. Man theilt die ganze Höhe AB des für die
281 Fig. Schnecke beſtimmten Raums in acht gleiche Theile, nimmt nun von dieſen Theilen denjenigen, welcher zwiſchen dem 4ten und 5ten Theilungspunct bey N und O liegt, für den Durchmeſſer des kreisförmigen Schneckenauges an. Aus der Mitte dieſes Durchmeſſers NO beſchreibt man alſo einen Kreis und darin ein Quadrat. Die Seiten dieſes Quadrats halbirt man in den Puncten 1, 2, 3, 4, ziehet die graden Linien von 1 bis 3, von 2 bis 4, und theilt jede von dieſen in 6 gleiche Theile. Hiernächſt beſchreibt man nach der Ordnung aus den Puncten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, die Bogen AC, CB, BD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KL, LM, MN.

Anmerkung.

So wird dieſe Schnecke nach Palladii Vorſchrift gezeichnet. Goldmann zeichnet ſie etwas anders. M. ſ. Wolfii Elem. Math. Univ. Tom. IV. Archit. Civ. §. 135. pag. 407. Succows Baukunſt 298. §, 73. Seite.

Die 19. Erklärung.

57. Die Schriftſteller von der Baukunſt zählen gewöhnlich fünf Säulenordnungen, welche die

Nah-

Nahmen der Toſcaniſchen, Doriſchen, Joniſchen, Corinthiſchen und Römiſchen erhalten haben: ihre Unterſcheidungsmerkmahle werden gewöhnlich nur von den am Capital und Gebälke angebrachten Zierrathen hergenommen. Unter andern hat man Schnitzwerk dazu gebraucht, welches Blätter von Kräutern und Bäumen, und insbeſondre Olivenblätter, Lorbeerblätter, Bärenklau- und Petersilienblätter vorſtellet. Aus den Blättern hat man die architectoniſchen Roſen mit Blumen und Obſt vermengt, die Blumen- und Fruchtſchnüre gemacht. Der Borten im Gebälk der Doriſchen Ordnung wird mit Triglyphen verziert, das Capital der Joniſchen Ordnung mit acht Schnecken, oder 4 Paaren, und zwiſchen jedem Paare eine Fruchtſchnur: daher die im vor. §. beſchriebene Schneckenlinie, auch die Joniſche Schnecke heißt. An das Capital der Corinthiſchen Ordnung hat Callimachus auſſer acht groſſen Schnecken mit Fruchtſchnüren und acht kleinen Schnecken drey Reihen Blätter gebracht. Die Römiſche wird als eine aus den beyden letzten zuſammengeſetzte Ordnung angeſehen, das Capital wird auſſer acht Schnecken mit Fruchtſchnüren noch mit zwo reihen Blätter verziert. Die von Leonhard Chriſtoph Sturm hinzu geſetzte ſo genannte neue deutſche Ordnung hat am Capital 4 Paar groſſe Schnecken mit Fruchtſchnüren, 4 Paar kleine Schnecken und eine reihe Blätter.

Zuſatz.

58. Beßere und mehr weſentliche Unterſcheidungsmerkmahle kann man aus den allgemeinen im 55. §. feſtgeſetzten Gründen hernehmen. Es ſey

für das Poſtament	*n*	3	5	7	5	7
— den Schaft	*mn*	6	10	14	15	21
— das Gebälke	*m*	2	2	2	3	3
ſo iſt die ganze Höhe —		11	17	23	23	31

Dieſe fünf Columnen ſtellen fünf Ordnungen vor, unter welchen die erſte zu niedrig ausfällt. Die zweyte Ordnung kommt mit der Toſcaniſchen, die dritte mit der Doriſchen, die vierte mit der Joniſchen, die fünfte mit der Corinthiſchen überein; von dieſer letztern ſind die Römiſche und deutſche Ordnung nur in zufälligen Zierrathen verſchieden. M. ſ. mit mehrern davon H. Kraffts Abhandlung: Specimen emendatioris theorice ordinum architectonicorum, in den Comment. Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. XI. ad. A. 1739. p. 288. ſqq. auch H. Lamberts Anmerkungen über die Baukunſt. a. a. O. 18 u. f. §. §.

Die 20. Erklärung.

59. Wenn ein Körper die Geſtalt eines graden Priſmen oder Cylinders hat, ſo beurtheilet man die abſolute Feſtigkeit ſeiner Maſſe aus der Kraft, welche grade mit den Kräften des Zuſammenhanges das Gleichgewicht hält, wenn ſie den Körper nach ſeiner Länge zu zerreiſſen ſtrebt, die relative Feſtigkeit aber aus der Kraft, welche mit den Kräften des Zuſammenhanges im Gleichgewicht iſt, wenn ſie den Körper nach der Queere zu zerbrechen ſtrebt.

Der 1. Zuſatz.

60. Wenn der ſenkrechte Querſchnitt eines Balkens ein Rechteck iſt, ſo verhält ſich bey gleicher Länge deſſelben ſeine reſpective Feſtigkeit, wie die

Breite mit dem Quadrat der Dicke multiplicirt; und der Balken trägt, wie auch ſo begreiflich iſt, mehr wenn er ſo liegt, daß die kürzere Seite ſeiner Querſchnitte die Breite, und die längere Seite die Dicke oder Höhe abgiebt. M. ſ. davon mit mehrern im 3ten Theil meines Lehrbegriffes der Mathematik den XI Abſchnitt der Statik feſter Körper, 166. folg. S. Das Verhältniß der Breite zur Dicke kann verſchieden ſeyn, wenn der Balken gleich aus einem Stamm von einerley Durchmeſſer gehauen wird, und es läßt ſich zeigen, daß die reſpective Feſtigkeit deſſelben am gröſten ausfalle, wenn ſich die Breite zur Dicke, wie $1 : \sqrt{2}$, alſo beynahe wie $2 : 3$ verhält. Man kann dieſen Satz auch als Erfahrungsſatz annehmen.

Der 2. Zuſatz.

61. Das iſt der Grund von der gewöhnlichen Regel, weßwegen das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe der Triglyphen, welche Balkenköpfe vorſtellen (51. §.) $= 2 : 3$ ſeyn ſoll, oder auch ſtatt deſſen $= 3 : 4$, welches ebenfalls dem Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ nahe kommt. Ueberdem verbinden die Baumeiſter hiemit die Regel, daß die Zwiſchentiefen zwiſchen den Triglyphen Quadrat ſeyn müſſen, und daß bey Säulenſtellungen allemahl über jeder Säule ein Balkenkopf liegen müſſe. Daraus folgt, daß die Breite der Zwiſchentiefen der Höhe der Balkenköpfe gleich ſey.

Der 3. Zuſatz.

62. Die Entfernung zwiſchen der Mitte zweyer zunächſt nach einander folgender Balken, oder die

Balkenweite iſt der Summe der Breite und Höhe eines Balkenpopfes gleich; die Entfernung zwiſchen der Mitte jeder zweener andrer Balken, alſo auch die Entfernung einer jeden Säule von der nächſtfolgenden, oder die Säulenweite, iſt ein multiplum von der Balkenweite.

Der 4. Zuſatz.

63. Es ſey a die Höhe, ma die Breite eines Balkenkopfes, b die Säulenweite, und n die Anzahl der Balkenköpfe zwiſchen den Säulen: ſo iſt $a + ma = (m + 1)\,a$ die Balkenweite, und $b = n\,(m + 1)\,a$. Weil nun m gegeben iſt, ſo kann man von den Gröſſen a, b, n, allemahl die dritte finden, wenn zwey davon gegeben oder willkührlich angenommen ſind.

Die 21. Erklärung.

64. Der Bauanſchlag iſt das Verzeichniß nicht allein der geſammten Baumaterialien, welche zur Aufführung eines gewiſſen Gebäudes erforderlich ſind, ſondern auch der geſammten deßhalb aufzuwendenden Koſten.

Der 1. Zuſatz.

65. Um den Bauanſchlag mit deſto mehr Zuverläßigkeit zu verfertigen, wird zuförderſt ein Grundriß von jedem Geſchoß des Gebäudes, auch der Balkenriß, und auſſerdem noch ein Aufriß des ganzen Gebäudes verfertiget, um nach Anleitung dieſer Riſſe alle die Räume richtig auszumeſſen, die mit Baumaterialien ausgefüllet werden ſollen. Hiernächſt muß man die Preiſe der Baumaterialien kennen, und das übliche Arbeitslohn. Man

muß

muß auch wiſſen, wie weit man mit einer gewiſſen Menge Materialien reiche, um gewiſſe Räume damit auszufüllen.

Der 2. Zuſatz.

66. Die nachſtehenden Angaben, nach welchen man die Menge der nöthigen Materialien finden kann, ſind aus einem Verzeichniſſe genommen, welches Herr Succow in den erſten Gründen der bürgerlichen Baukunſt 648. §. mittheilt.

1.) Neun Schlußziegel und zwölf glatte Ziegel bedecken 7 Quadratfuß.

2.) Acht Backſteine geben einen Cubicfuß Mauer: vier Steine auf die breite Seite gelegt geben einen Quadratfuß Fläche zur Wand, die einen halben Fuß Dicke hat.

3.) Eine Cubicruthe Bruchſteine, zu 512 Cubicfuß gerechnet, giebt 350 Cubicfuß Mauer.

4.) Auf einen Scheffel Kalk gebraucht man $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ auch 2 Fuder Sand, nachdem noch andre Dinge mehr oder weniger damit vermiſcht werden. Zu jeder Ruthe Mauer braucht man 3 Scheffel Leder- und drey Scheffel Spaarkalk, imgleichen drey Fuder Sand.

5.) Zu 76 Cubicfuß Mauer gebraucht man ein Fuder Leimen, alſo 7 Fuder zu einer Cubicruthe.

6.) Ein tauſend Backſteine zu vermauren gebraucht man $1\frac{1}{2}$ Scheffel Leder- und 2 Scheffel Spaarkalk, imgleichen 2 Fuder Sand, und $4\frac{1}{2}$ Fuder Leimen.

7.) Zu 72 Quadratfuß Welgerhölzer braucht man ein Fuder Leimen; 24 Quadratfuß Welger-

hölzer mit Stroh zu bewickeln erfordern ein Bund Stroh, 5 Welgerhölzer geben eine laufende Elle Wand.

8.) Um 36 Quadratfuß Wände zu beſchienen braucht man 8 Schienſtöcke; 200 Quadratfuß beſchiente Decke oder Wand erfordern 5 Fuder Leimen, 2 Scheffel Kalk, 3 Fuder Sand.

9.) Unter ein Fuder Leimen zur Gleichmachung der beſchienten Decken und Wände, auch zu den innern Schornſteinröhren, gebraucht man 1½ Bund geſchnitten Stroh.

10.) Zur innern Verkleidung der Schornſteinröhren braucht man auf jede 60 Fuß Höhe zu einer jeden Röhre ein Fuder Leimen, zur äuſſern Verkleidung auf 420 Quadratfuß ein Fuder. Und 200 Quadratfuß Wand abzuweiſſen hat man einen Scheffel Kalk und 1 Fuder Sand nöthig.

Erſter Grundriß der Kriegsbaukunſt.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Feſtung heißt zwar überhaupt jeder Ort, der durch ſolche Anlagen umher eingeſchloſſen iſt, daß ſich wenige Perſonen in demſelben gegen viele ſicher und mit Vortheil vertheidigen können: jedoch pflegt man im beſondern eine Stadt oder ſonſt einen wichtigen Platz an deſſen Erhaltung viel

viel gelegen iſt, wenn er gegen den Angrif eines Feindes durch dergleichen Vorkehrungen geſichert iſt, eine **Feſtung** zu nennen. Die Kriegsbaukunſt lehrt, wie dergleichen Feſtungen erbauet werden müſſen.

Die 2. Erklärung.

2. Eine **Bruſtwehr** iſt eine um die Feſtung aufgeführte Erhöhung, die ſo ſtark iſt, daß die feindlichen Geſchützkugeln nicht durchdringen. Die beſte Materie dazu iſt Erde: um dieſe Erde zu bekommen, ziehet man einen **Graben** und leget in den gewöhnlichſten Fällen die Bruſtwehr hinter dem Graben an. Die Wände der Bruſtwehr ſowohl als auch die innern Wände des Grabens müſſen gegen den Horizont geneigte Flächen ſeyn. Bey der Bruſtwehr nennt man das ihre **Böſchung**, beym Graben an der Seite nach der Feſtung zu die **Scarpe**, an der andern Seite gegen über die **Contreſcarpe**. Wenn an der Auſſenſeite des Grabens noch eine Bruſtwehr gegen den Feind aufgeführt wird, ſo iſt es vortheilhaft, daß ihre äuſſere Böſchung ſich nur ſehr langſam ſenke und ins offene Feld verliere: alsdenn heißt ſie ein **Glacis**.

Zuſatz.

3. Eine Bruſtwehr von drey bis ſechs Fuß Dicke kann ſchon gegen Flintenkugeln ſchützen. Gegen das Feldgeſchütz muß ſie eine Dicke von 9 bis 15 Schuhe haben: dem ſtärkſten Kanonenfeuer aber muß man eine Bruſtwehr von 18 bis 24 Fuß Dicke entgegen ſetzen. Die Gröſſe des Grabens richtet ſich alsdenn nach der Gröſſe der Bruſtwehr.

Die 3 Erklärung.

4. Eine Bank hinter der Bruſtwehr iſt eine Erhöhung von Erde, worauf der Soldat tritt, wenn er ſein Gewehr gegen den Feind braucht. Die oberſte Fläche der Bruſtwehr heißt die Krone, ſie muß nach auſſen einige Böſchung oder Abdachung haben, damit die Schüſſe auch den ſchon ziemlich nahe gekommenenen Feind noch treffen können. Einſchnitte in die Bruſtwehr, um mit Kanonen dadurch zu feuern, heiſſen Schießſcharten. Wird hinter der Bruſtwehr eine Erhöhung von Erde gemacht, um darauf die Kanonen zu ſtellen, und ſie gegen den Feind zu brauchen, ſo heißt das über Bank feuern.

Zuſatz.

5. Man feuert nur über Bank, ſo lauge man weiß, daß der anrückende Feind nicht ſelbſt Kanonen zur Gegenwehr brauchen kann. Auch kann man von einer Anhöhe über Bank feuern, wenn der Feind in der ganzen Gegend keine Anhöhe findet, wovon er entgegen feuern könnte.

Die 4. Erklärung.

6. Wenn die Bruſtwehr mit dem Graben nach einer graden Linie geführt iſt, und eine Ebene dieſe grade Linie ſenkrecht ſchneidet, ſo heißt die Durchſchnittsfigur das Profil der Bruſtwehr mit dem Graben. Ein horizontaler Grundriß davon wird eben ſo, wie jeder andre horizontale Grundriß entworfen.

Der 1. Zuſatz.

282 Fig. 7. Die 282. Figur ſtellet ein ſolches Profil vor. In demſelben iſt AC die Anlage der Böſchung der Bank, CE die Breite, CB = ED die Höhe

der

der Bank, EG die Anlage der innern Böſchung DF der Bruſtwehr, GI ihre obere Dicke und IK die Anlage der äuſſern Böſchung HK. Ferner iſt LM die Anlage der innern Böſchung LN des Grabens MO = NP die untere Breite, OQ die Anlage der äuſſern Böſchung PQ.

Der 2. Zuſatz.

8. Eine andre der vorigen parallel gelegte Ebene würde noch ein dem vorigen gleiches und ähnliches Profil geben: zwiſchen beyden Ebenen aber iſt alsdenn ein körperliches Stück von der Bruſtwehr und dem Graben enthalten, welches die 284. Figur 284 perſpectiviſch vorſtellet. Bruſtwehr und Graben Fig. ſind nemlich von ebenen Flächen begränzt, wovon die Durchſchnittslinien insgeſammt unter einander parallel und auf der Ebene des Profilſchnittes ſenkrecht ſind. Man nehme die Horizontallinie AT für die Grundlinie der Tafel an, und ziehe die Horizontallinie des Auges OH damit parallel in der Entfernung RO, die der Höhe des Auges über dem Horizont RT gleich iſt. Wenn alsdenn O der Augenpunct iſt; ſo müſſen alle auf der Ebene des Profilſchnittes ſenkrechte Parallellinien, die durch A, B, D, E, F, G, H, I, K, laufen, in O ihren Vereinigungspunct haben. (12. §. Perſpect.) In der 286. Fig. iſt eben das Profil nach der Cavalier-Perſpectiv gezeichnet. (54. §. Perſp.)

Die 5. Erklärung.

9. Es trägt zur Feſtigkeit der Bruſtwehr bey, 286 wenn man die äuſſere Böſchung EF der Bruſtwehr Fig. und die innere Böſchung GH des Grabens nicht in

einem fortgehen läſſet, ſondern einen Gang GF*fg* dazwiſchen machet, der die Berme heiſſet. Dieſer Gang muß aber nur wenige Fuß breit ſeyn, damit er dem Feinde nicht behülflich werde, die Bruſtwehr deſto leichter zu erſteigen.

Die 6. Erklärung.

10. Eine Schanze iſt eine Bruſtwehr, die einen Platz an allen Seiten ringsherum einſchließt: man kann alſo runde oder eckigte Schanzen aufführen, die im letzten Fall, wenn der Platz dadurch in eine gradlinichte Figur eingeſchloſſen wird, den Nahmen von der Anzahl ihrer Winkel oder Ecken erhält. Eine Redoute iſt eine viereckte Feld-
288 Fig. ſchanze ABCD, in der Mitte der einen Seite AB iſt der Eingang EF, der durch eine Bruſtwehr GH, die hinter demſelben liegt, unter dem Nahmen einer Traverſe bedeckt wird. Wenn die Winkel der Figur abwechſelnd auswärts und einwärts laufende ſind; ſo braucht man den Nahmen einer Sternſchanze. Iſt man im Rücken ſicher, ſo verſchanzt man ſich auch wohl hinter einer Bruſtwehr die nach zwoen zuſammenlaufenden graden Li-
283 Fig. nien AB, BC, aufgeführt iſt, welche man Façen nennt. Man ſiehet die Schanze alsdenn als eine halbe Redoute an, und nennt ſie eine Fleſche oder ein pfeilförmiges Werk. Die hintere Oefnung AC heißt alsdenn die Kehle.

Zuſatz.

11. Damit der Feind ſich einer ſolchen Schanze nicht ſo leicht nähern könne, muß man ihm den Zugang möglichſt beſchwerlich machen. Kann man die Bruſtwehr hinter einem Fluß oder Moraſt bauen,

en, ſo iſt die Bruſtwehr dadurch ſchon gedeckt. Eben das iſt der Fall, wenn man ſich auf einem hohen und ſteilen Berge verſchanzen kann. Sonſt aber bedient man ſich im freyen Felde der Palliſaden, der Sturmpfähle, der ſpaniſchen Reuter, der Verhaue, der Wolfsgruben, der künſtlichen Ueberſchwemmung der Gegend vor der Bruſtwehr, wenn vielleicht in der Nähe ein Bach fließet. Kann der Feind vielleicht nur auf engen Wegen zur Bruſtwehr kommen, ſo verſperrt man ſie durch hingeworfene Bäume, die mit den Aeſten dem Feinde zugekehrt ſind, oder andre Mittel. Alle dergleichen Vorkehrungen muß man aber mit dem kleinen Gewehrfeuer vertheidigen können, weil der Feind ſie ſonſt bald wegſchaffen würde.

Die 7. Erklärung.

12. Eine **Mine** iſt ein Keller, welchen man in der Nähe vor einer Bruſtwehr, oder ſonſt an einem Orte, wovon man den Feind abhalten will, in der Erde ausgräbt, mit Schießpulver anfüllet, und nachher wieder dem übrigen Erdboden gleich mit Erde bedeckt, um hiernächſt durch Entzündung des Pulvers die darauf liegende Erde in die Luft zu ſprengen, und den anrückenden Feind im Vorrücken aufzuhalten. Der Keller A, worin das Pulver liegt, heißt die **Minenkammer**, und der Ort E, wo das Pulver angezündet wird, der **Minenheerd**. Von dieſem Ort bis zur Kammer muß unter der Erde ein Leitfeuer veranſtaltet werden, und dazu dient ein Schlauch von Leinwand, der mit Pulver angefüllet, und unter dem Nahmen der Zündwurſt nach einer beliebigen Linie EDCA von E bis A geführet wird. Die grade Linie AB, welche von der Minenkammer die nächſte Erdoberfläche ſenkrecht trift, nennt man die **kürzeſte Widerſtandslinie**, und den leeren Raum in der Erde FHG, welcher nach dem Zerſprengen der Mine entſteht, den **Trichter**. Die Mine

291 Fig. 289 Fig.

heißt eine Fladdermine, wenn die kürzeſte Widerſtands-linie nicht über 12 Fuß beträgt.

Zuſatz.

13. Dieſe Fladderminen gehören mit zu den Mitteln, wodurch man den Feind abhalten kann, daß er ſich einer Verſchanzung nicht leicht nähern, und die Bruſtwehr erſteigen könne.

Die 8. Erklärung.

14. Eine Bruſtwehr kann vermittelſt des Schießgewehrs auf eine dreyfache Art vertheidiget werden. Sie wird grade zu von forne vertheidiget, wenn Soldaten hinter derſelben ſtehen, die auf den ankommenden Feind Feuer geben; ſie wird von der Seite her vertheidiget, wenn eine andre Bruſtwehr mit ihr einen einwärts gehenden Winkel macht, und die Schüſſe von dieſer Bruſtwehr nach Richtungen gehen, die mit jener, die vertheidiget wird, entweder völlig, oder doch beynahe pa-
285 Fig. rallel ſind. So kann die Bruſtwehr BC eine Seitenvertheidigung von CE erhalten, und CE heißt alsdenn eine Flank in Anſehung der Seitenvertheidigung, welche BC daher erhält. Endlich kann eine Bruſtwehr auch ihre Vertheidigung von einer andern erhalten, die hinter jener beynahe oder völlig mit ihr parallel läuft.

Der 1. Zuſatz.

15. Eine Bruſtwehr, die nach einer graden Linie, oder auch nach einer krummen auswärts gebogenen Linie geführt iſt, hat keine andre Vertheidigung, als von forne: auch kann von zwoen Linien, die einen auswärts laufenden Winkel machen, eine jede nur ſich ſelbſt von forne vertheidigen. Von zwoen graden Linien aber, die einen einwärts laufenden Winkel mit einander machen, giebt jede der andern auch eine Vertheidigung von der Seite.

Der 2. Zuſatz.

16. Um alſo den Winkel B der Fleſche ABC zu vertheidigen, läßt man an die Facen AB, BC, zwo gradlinichte Bruſtwehren AD, CE, als Flanken unter rechten Winkeln anſchlieſſen, die auch auf der Seite aufs neue durch die Bruſtwehren DF, EG, gedeckt werden.

Der 3. Zuſatz.

17. Weil den Redouten, und andern Schanzen, wenn ſie nur auswärtslaufende Winkel haben, die Seitenvertheidigung fehlt, so hat das die Sternſchanzen veranlaſſet. Man halbire die Seite AB der Redoute, oder 293
jeder andern gradlinichten Schanze, ſetze darauf nach 295
dem innern der Schanze FG ſenkrecht, mache dieſen Fig.
Perpendikel beym Viereck dem 8ten, beym Fünfeck den 7ten, beym Sechseck den 6ſten Theile der Seite AB gleich, und ziehe die Facen AG, BG; ſo erhält man die einwärts gehenden Winkel. Der Eingang wird in einem einwärts laufenden Winkel, oder hinter einer von den vorſpringenden Fleſchen angelegt, und wie bey der Redoute bedeckt.

Die 9. Erklärung.

18. Die Richtung, nach welcher die Vertheidigungsſchüſſe geſchehen, heißt die Defenslinie, oder Vertheidigungslinie.

Der 1. Zuſatz.

19. Die Vertheidigungslinie muß mit der Bruſtwehr, welche durch die Schüſſe von forne vertheidiget wird, rechte Winkel machen: denn nur alsdenn können eben ſoviele Soldaten und Kanonen zur Vertheidigung gebraucht werden, als hinter der Bruſtwehr neben einander Platz haben; bey einer ſchiefen Vertheidigung verhält ſich dieſe Anzahl, wie der Sinus des Winkels, den die Defenslinie mit der Bruſtwehr macht.

Der 2. Zuſatz.

20. Eine ſchiefe Vertheidigung iſt auch wegen andrer Gründe nicht vortheilhaft. Der Soldat ſchießt am leichteſten und natürlichſten grade vor ſich hin, und verfehlt bey einer ſchiefen Vertheidigung leicht den richtigen Winkel unter welchem er anſchlagen ſoll. Ueberdem fällt der Gebrauch der Kanonen bey einer ſchiefen Vertheidigung faſt ganz weg. Zwo grade Linien alſo, die unter einem einwärts laufenden Winkel zuſammen ſtoſſen, verſchaffen einander die ſtärkſte Vertheidigung, wenn der Winkel ein rechter Winkel iſt.

Der 3. Zuſatz.

21. Die Vertheidigung ſoll nicht allein mit dem Kanonenfeuer, ſondern überall auch mit dem kleinen Gewehr geſchehn: alſo muß die Defenslinie nicht über 300 Schritte, oder 60 rheinländiſche Ruthen lang ſeyn, weil ein Flintenſchuß ſelten in gröſſerer Entfernung die rechte Wirkung mehr hat.

Die 10. Erklärung.

22. Damit um die ganze Schanze herum jeder Punct nicht allein von forne, ſondern auch von der Seite her vertheidiget werden könne, hat man die Figur der Stern-
291 ſchanze noch auf folgende Art abgeändert. Es ſey
292 WGSLX ein Stück von der Peripherie einer Sternſchan-
Fig. ze, die nach den Regeln des 17. §. gezeichnet iſt. Man halbire die auswärts laufenden Winkel FGH, KLM, mit den graden Linien GC, LC, und ziehe entweder durch die Spitze S des dazwiſchen liegenden einwärts laufenden Winkels eine grade Linie mit GL parallel; oder man verlängere GS nach T, nehme LV = GT, ſo wird VT mit GL parallel, (172. §. Geom.) und ſchneidet GC, LC, in A und B. Auf den Façen nehme man GF = LK, auf AB aber AD = BE, und ziehe DF, EK. Nun erhält man zwo kürzere Façen GF, KL, mit einer jeden davon iſt eine daran ſchlieſſende Flanke DF, EK, verbunden, und die zwiſchen beyden liegende gradlinichte Bruſtwehr DE heißt nun die Curtine.

Die 11. Erklärung.

23. An jeder Ecke der Schanze entſteht nun ein Bollwerk oder Baſtion wie DFGHI, EKLMN, zwiſchen zwoen Facen HG, GF, und zwoen Flanken HI, FD, die unter ſich in den Schulterpuncten F, H, ſo wie die Flanken mit der Curtine in den Curtinenpuncten D und I zuſammen hängen. Die hintere Ofnung des Bollwerks DI heißt die Kehle, und AG Capitallinie. Wenn der äuſſere Umfang der Schanze, den die graden Linien zwiſchen den Bollwerksſpitzen einſchlieſſen, ein reguläres Polygon iſt, ſo iſt GL die Polygonſeite, DAI der Polygonwinkel, welcher auch hier der Kehlwinkel heißt, und AB wird die Seite eines innern

dem

dem vorigen ähnlichen regulären Polygons. Die Ingenieurs nennen kurzweg GL das äuſſere, AB das innere Polygon.

Zuſatz.

24. Die Facen KL, LM, müſſen vornemlich von den ihnen zur Seite liegenden Flanken der benachbarten Bollwerke vertheidiget werden: um deßwillen iſt es vortheilhaft (19. 20. §.), wenn die Face FD und die verlängerte Flank KL, welche von jener vertheidiget werden ſoll, einander ſenkrecht ſchneiden. Dieſerwegen kann man, nachdem dem 22. §. gemäß die Länge der Façen GF, LK, feſtgeſetzt iſt, aus den Schulterpuncten F und K auf die verlängerten Façen LS, GS, die graden Linien FD, KE, ſenkrecht ziehen, ſo werden das die Flanken, und DE kann die Curtine werden. (292. Fig.)

Aufgabe.

25. Ein Feldlager, oder eine Gegend, die von einer Armee beſetzt iſt, zu befeſtigen.

Aufl. Man lege von dreyhundert zu dreyhundert Schritten Fleſchen an, die ſo groß ſind, daß 250 bis 300 Soldaten darin Platz haben, ſich zu vertheidigen. Dieſe Fleſchen heiſſen hier Redans. Der Zwiſchenraum wird durch eine gradlinichte Bruſtwehr unter dem Nahmen der Curtine bedeckt, und in dieſen Curtinen werden die Eingänge ins Lager acht bis zehn Schritte breit angelegt: dieſe Eingänge werden durch eine dahinter gelegte Traverſe, oder durch eine davor liegende Fleſche gedeckt.

Wenn ſtatt der gradlinichten Curtine CD die Bruſtwehr zwiſchen den Fleſchen ABC, DEF, aus zween graden Linien CG, DG, zuſammen geſetzt wird, die einen vorſpringenden Winkel machen, ſo wird die Vertheidigung vollkommener. In ſolcher Abſicht halbirt man in G die grade Linie BE zwiſchen den Spitzen zweyer benachbarter Redane, und ziehet GC, GD. Der Ritter von Clairac, nach deſſen Vorſchlag die Curtine ſo gebrochen werden ſoll, giebt noch diejenige Art einer ſägeförmigen Verſchanzung an; welche die 290 Figur vorſtellet. Die Linien AB, BC, ſollen 30 Ruthen

287 Fig.

then lang, und die Perpendikel BF, CG, $7\frac{1}{2}$ Ruthen, ſo wie BD, CE, $2\frac{1}{2}$ Ruthen lang ſeyn.

Will man die Vertheidigung noch ſtärker haben, ſo lege man die Verſchanzung anſtatt der Redane mit Bollwerken an. Der ganze Plaz ſey in eine gradlinichte Figur eingeſchloſſen, wovon AB, BE, zwey aneinander liegende Seitenlinien vorſtellen, die etwa 65 bis 70 Ruthen lang ſeyn können. Man halbire AB in C, BE in F, ſetze CD, FG, darauf ſenkrecht, und gebe ihnen die Länge von 12 bis 13 Ruthen. Weiter ziehe man AD, BD, BG, EG, und nehme die Facen AK, BL, BP, EQ, 17 bis 18 Ruthen lang, ſo werden K, L, P, Q, die Schulterpuncte, und man kann dem 24. §. gemäß die Flanken KH, LI, PM, QN, auf die verlängerten Facen ſenkrecht ziehen, da dann HI, MN, die Curtinen werden können.

294 Fig.

Die Eingänge kommen mitten in die Curtine, wenn die Verſchanzung Redane oder Bollwerke hat; bey ſägeförmigen Verſchanzungen in die einwärts gehenden Winkel. An dieſen Stellen durchkreuzet ſich das meiſte Feuer der Verſchanzung, um deßwillen wird der Feind ſeinen Angriff nicht eigentlich dahin richten. Acht bis zehn Schritte ſind wenigſtens für die Breite des Einganges nöthig. Ueberhaupt aber müſſen die Eingänge möglichſt breit und ihrer nicht zu wenige ſeyn, damit die Truppen in deſto mehr Kolonnen ausmarſchiren, und benöthigten Falles ſich deſto geſchwinder in Schlachtordnung ſtellen können. Dieſe Eingänge werden mit Gatterthoren, ſpaniſchen Reutern, und dergleichen verſperret, auch mit Traverſen oder Fleſchen gedeckt.

Der 1. Zuſatz.

26. Weil die Zeit und Gelegenheit oft fehlt, Wolfsgruben zu machen, ein Verhau zu Stande zu bringen, oder ſonſt Mittel vorzukehren, den Feind in einer ziemlichen Entfernung von der Verſchanzung aufzuhalten; ſo kann man auch nach des Ritters von Folard Rath vor der Front der Verſchanzung in einer Entfernung von 20 bis 30 Ruthen Fleſchen aufwerfen, die mit der Verſchanzung einen bedeckten Zuſammenhang haben; und

und alsdenn Brillen, oder Lünetten, heiſſen. Sie müſſen von den Linien der Verſchanzung ihre Vertheidigung erhalten, und durch ihr kreuzendes Feuer hindern, daß er der Hauptverſchanzung nicht ſo leicht nahe kommen könne.

Der 2. Zuſatz.

27. Die Armee kann aus einer geſchloſſenen Verſchanzung nicht anders als durch ſchmale Oefnungen ausmarſchieren, da es doch oft vortheilhaft wäre, daß die Armee ſchleunig in Schlachtordnung ausrücken könne. Wenn das der Fall iſt, ſo wirft man vor der Front des Lagers nur einzelne Redouten auf, die vierhundert bis höchſtens 600 Schritte von einander entfernt ſind. Um deſto mehr Vertheidigung zu gewinnen, legt man hinter der erſten Reihe eine zweyte Reihe ſolcher Redouten, welche die Zwiſchenräume in der erſten Reihe decken.

Der 3. Zuſatz.

28. Wenn ein Platz in einer vollkommenen Ebene befeſtiget werden ſoll, wo die Vortheile auf allen Seiten gleich ſind; ſo kann man ihn in eine reguläre Figur einſchlieſſen, und alle Seitenlinien und Winkel gleich groß machen. Indeſſen iſt dieſe vollkommenſte Regularität gar nicht ſo ſehr nothwendig, um ringsumher nach allen Seiten eine gleich ſtarke Vertheidigung zuwege zu bringen. Die Figur des ganzen Platzes kann irregulär, die Seiten und Winkel können ungleich groß ſeyn, und man kann auf eine von den vorhin beſchriebenen Arten eine ganz gute Befeſtigung dennoch zu Stande bringen. Auſſerdem aber ſind noch mehr andre Umſtände in Betrachtung zu ziehen, die zum Theil von der Beſchaffenheit der Gegend, und der Lage der umher befindlichen Oerter abhängen. Hier kann von dem allen kein völlig umſtändlicher Unterricht gegeben werden: auch gehört manches zu den allgemeinen Maximen der Kriegskunſt überhaupt, und nicht ſo ſehr für die Befeſtigungskunſt insbeſondre.

Die 12. Erklärung.

29. Bey Befeſtigung einer Stadt, oder ſonſt eines Ortes, an deſſen Erhaltung viel gelegen iſt, wird un-

ter

ter dem Nahmen des Walles eine Erhöhung von Erde umher aufgeführet, die eine hinlängliche Breite hat, um oben auf demſelben nach auſſen zu die Bruſtwehr aufzuführen, hinter dieſer Bruſtwehr aber einen genugſam breiten Wallgang für das grobe Geſchütz ſowohl, als auch für die Soldaten zu behalten, welche die Feſtung vertheidigen ſollen

Der 1. Zuſatz.

30. Der erhöhete Wallgang iſt nöthig, damit die Beſatzung den Feind deſto beſſer von weiten ſchon beſchieſſen könne; auch wird dadurch der innere Raum der Feſtung deſto beſſer gegen das feindliche Kanonenfeuer gedeckt. Wie hoch der Wallgang anzulegen ſey, das muß aus der Beſchaffenheit der umher liegenden Gegend beurtheilet werden. Gewöhnlich iſt eine Höhe von 8 bis 10 Fuſſen hinreichend, wenn in der Gegend umher keine Anhöhen ſind, die der Feind zum Nachtheil der Feſtung brauchen kann.

Der 2. Zuſatz.

31. Wenn auf dem Wallgang einer Feſtung die gröſten Kanonen gebraucht werden ſollen, ſo muß derſelbe wenigſtens 24 Fuß breit ſeyn. Weil übrigens oben auf demſelben die Bruſtwehr zu ſtehen kommt, und wegen aller nöthigen Vertheidigungsanſtalten der Wall ſehr viele Laſt zu tragen hat: ſo wird demſelben auſſer den nöthigen Böſchungen auch noch durch Futtermauren deſto mehr Feſtigkeit gegeben. Wenn keine ſolche Futtermauern gebraucht werden; ſo iſt um ſo mehr eine Berme nöthig, damit die Laſt des Walles nicht zu ſehr auf die Scarpe drucke, und die vom Wall abgefallene, oder bey einem Angriff abgeſchoſſene Erde nicht ſogleich in den Graben falle.

Der 3. Zuſatz.

32. Der Graben um den Wall dient vorzüglich mit zur guten Vertheidigung der Feſtung. Seine Gröſſe überhaupt betrachtet hängt von der Gröſſe des Walles und der Bruſtwehr ab, weil er dazu die nöthige Erde liefern muß. Bey dem allen kommt es doch noch auf eine richtige Vertheilung der Breite und Tiefe an. Ein naſſer Graben muß wenigſtens ſo tiefes Waſſer haben,

daß

daß kein Soldat durchwaden kann: ein trockener Graben muß ſo tief ſeyn, daß niemand ohne Lebensgefahr hinein ſpringen kann. Jeder Graben muß dabey ſo breit ſeyn, daß kein Balken von dem einen Ufer bis zum andern reichet. Ob übrigens naſſe oder trockene Graben am beſten ſind, das läßt ſich nicht ohne alle Einſchränkung entſcheidend beantworten. Ein Graben der zwar ſonſt trocken wäre, aber mit Hülſe regelmäßig angelegter Schleuſen nach Gutbefinden der Beſatzung tief genug unter Waſſer geſetzt werden könnte, würde der Feſtung ohne Zweifel äuſſerſt vortheilhaft ſeyn.

Der 4. Zuſatz.

33. Am gewöhnlichſten wird der Wall um eine Feſtung nach ſolchen Linien geführt, wie die im 22. §. beſchriebene Verſchanzung, da dann die Bollwerke die vornemſten Theile des Walles werden. Die Façen der Bollwerke liegen aber dem Feinde alsdenn am meiſten im Geſicht, und haben auch eine ſchwächere Seitenvertheidigung, als die übrigen Theile des Walles. Daher kommt es, daß der Feind gewöhnlich zuerſt die Façen beſchieſſet, und durch dieſe in die Feſtung einzudringen ſucht, um deßwillen iſt die Vertheidigung der Façen eine Hauptſache bey der Feſtung.

Die 13. Erklärung.

34. Die Linie nach welcher die Façen von den zur Seite liegenden Flanken vertheidiget werden, heißt hier ſchlechthin die Defenslinie, und es kommt auf die Lage der Flank und Façe gegen einander an, ob dieſe allein von der Flank, oder zugleich von einem Theil der Curtine mit vertheidiget werden könne. Die grade Linie EG zwiſchen dem Curtinenpunct E und der gegenüberlie- 291
genden Bollwerksſpitze G heißt die groſſe auch die be- Fig.
ſtändige Defenslinie, weil ſie bey jeder Feſtung ſeyn muß. Fällt dieſe mit der Façe FG zuſammen, wie in der 292 Figur, ſo kann die Face von der Curtine her keine Seitenvertheidigung haben: wohl aber in dem Fall, welchen die 291 Figur vorſtellt, wenn die verlängerte Face GF die Curtine in T trift. Nun heißt ET eine Nebenflank, oder Secondflank, und TG die kleine oder ſtreichende Defenslinie, weil die Face nach

dieſer Richtung von der Secondflank eine Seitenvertheidigung haben kann.

Der 1. Zuſatz.

35. Wegen der ſchiefen Vertheidigung von der Nebenflank ſcheint es, daß es beſſer ſeyn mögte, ſie ganz wegzulaſſen, nur in dem Fall, wenn zur beſſern Vertheidigung der Contreſcarpe von den Facen des Bollwerks noch unter dem Nahmen der Fauſſebraye eine niedrige von den Hauptfacen durch einen Graben abgeſonderte Bruſtwehr angelegt iſt, giebt die Secondflank eine gute Vertheidigung dieſer Fauſſebraye mit ihrem Graben. Um die ſchiefe Vertheidigung in eine grade zu verwandeln, kann die Secondflank ſägeförmige Einſchnitte erhalten.

Der 2. Zuſatz.

36. Anſtatt der Eckbollwerke, die auf den vorſpringenden Winkeln der Feſtung angelegt werden, empfielt Rimpler, daß man die Bollwerke in der Mitte der Seitenlinien da erbauen ſoll, wo ſonſt die Mitte der Curtine hinkommt. Sie können alsdenn zum Unterſcheid Mittelbollwerke heiſſen. Man erhält freylich davon einige Vortheile, allein dagegen fallen auch einige Vortheile der Eckbollwerke wieder weg.

Der 3. Zuſatz.

37. Die Befeſtigungsart mit Eckbollwerken hat bisher die Ingenieurs am meiſten beſchäftiget, und man hat ſich viele Mühe gegeben, die vortheilhafteſte Anordnung aller Theile gegeneinander ausfündig zu machen. Wer in der Geometrie geübt iſt, wird leicht finden, wieviele Linien und Winkel er als gegeben annehmen kann, ſo daß alle übrige dadurch beſtimmt werden, damit ſie hiernächſt ſowohl durch Zeichnung, als auch durch Rechnung gefunden werden können. Daher haben nun die mancherley Manieren zu befeſtigen ihren Urſprung, welche ihre Nahmen gewöhnlich von den Kunſtverſtändigen erhalten haben, von welchen ſie als beſonders vortheilhaft ſind empfohlen worden.

Der 4. Zuſatz.

38. Die Thore, welche als Ein- und Ausgänge dienen, werden mitten in der Curtine angeleget. Ein

ſolches Thor wird durch den ganzen Wall durchgeführet: und oben mit einem bombenfeſten Gewölbe bedecket: Man ſchließt ſie auſſer den gewöhnlichen Thorflügeln noch mit Fallgattern und Fallbäumen. Weiter hat man noch Brücken nöthig, um über den Graben zu kommen, welches hier Zugbrücken ſeyn müſſen. Auſſer den Hauptbrücken ſind auch alsdenn, wenn der Graben naß iſt, noch Nebenbrücken nöthig, um mit den vielleicht noch jenſeits liegenden Werken die Verbindung zu erhalten.

Die 14. Erklärung.

39. Auſſenwerke heiſſen bey einer Feſtung alle jenſeits des Grabens liegende zur deſto beſſern Bedeckung des Hauptwalles und Grabens aufgeführte Werke. Das Ravelin OPQ beſtehet aus zweyen Facen, wie eine Fleſche, und es wird vor der Curtine angeleget, um beyde Flanken, auch zugleich das Thor, die dazu gehörige Hauptbrücke, und vielleicht noch ein oder andres im Graben liegendes geſenktes Werk zu decken. Liegt ein ſolches Werk vor den Facen des Bollwerks, ſo heißt es ein Contregarde. Aus dem Ravelin vor der Curtine wird ein halber Mond, wenn es auſſer den Facen OP, PQ, noch mit zweyen Flanken OV, QW, verſehen wird. Wenn zwey gradlinichte Bruſtwehren an der Front des Auſſenwerks einen einwärts gehenden Winkel machen, ſo heißt es eine Scheere; dieſe iſt gedoppelt, wenn vier grade Linien wechſelsweiſe aus- und einwärts laufende Winkel machen. Die Front des Hornwerks iſt eine Curtine mit zwey halben zur Seite liegenden Bollwerken: die Front des Kronenwerks hat ein ganzes Bollwerk in der Mitte, und an jeder Seite eine Curtine, die noch wieder an ein halbes Bollwerk anſchließt. Die Front des Kronenwerkes kann auch ſägeförmig ſeyn.

291 Fig.

292 Fig.

Zuſatz.

40. Das Ravelin, die Contregarde, und der halbe Mond ſind Auſſenwerke, die man gewöhnlich zur unmittelbaren Bedeckung des Hauptwalles und Hauptgrabens anlegt; eben dieſe Auſſenwerke müſſen auch vom Hauptwalle aus vertheidiget werden, und bey ihrer

Anordnung muß darauf vorzüglich Rückſicht genommen werden. Tritt dagegen der Fall ein, daß man einen von der Feſtung ſchon etwas entfernten Platz um deßwillen beſetzen muß, weil es der Feſtung zuviel Nachtheil bringen könnte, wenn man ihn dem Feinde frey liegen lieſſe; ſo dient eine Scheere, ein Hornwerk oder Kronwerk, welches ſich ſelbſt unabhängig vom Hauptwall vertheidigen muß. Indeſſen muß doch ein ſolches Werk durch befeſtigte Linien, die man Flügel nennt, mit der Hauptfeſtung verbunden ſeyn.

Die 15. Erklärung.

41. Unter dem Nahmen des bedeckten Weges wird ein Gang um die ganze Feſtung, die eigentlich dazu gehörigen Auſſenwerke mit eingeſchloſſen, herum geführt, der 2 bis 6 Ruthen breit ſeyn kann. Man bedeckt ihn mit einer eigenen Bruſtwehr, deren äuſſere Böſchung das Glacis der Feſtung ausmachen, und ſich ganz gelinde ins freye offene Feld verlieren muß.

Zuſatz.

42. Das Glacis bedeckt einigermaſſen alle dahinter liegende Werke der Feſtung, und hindert den Feind, ſie grade zu mit ſichern Erfolg zu beſchieſſen. Es hat den Vorzug vor andern Bruſtwehren, daß keine Kanonenſchüſſe es niederſtürzen können. Die Linien dieſer Bruſtwehr werden ſo geführt, daß ſie aus- und einwärts gehende Winkel machen, alſo einander von der Seite her vertheidigen können. Von der Feſtung her kann allemahl ein ſehr ſtarkes Feuer auf dieſe Bruſtwehr gerichtet, und dadurch der Feind abgehalten werden.

Die 16. Erklärung.

43. Unterirdiſche überwölbte Gallerien werden in einer Feſtung vornemlich der Minen wegen angeleget. Der Hauptminengang läuft unter dem bedeckten Wege längſt der äuſſern Böſchung des Grabens herum: von dieſem Gange laufen viele andre als ſoviele Minenäſte unter das Glacis, auch wohl völlig bis unter das freye Feld. Dieſe Gänge dienen zugleich dazu, den feindlichen Minirer, wo er ſich etwa eingraben mögte, zu entdecken, und ihm überall zuvorzukommen, und wegen dieſes Nutzens heiſſen ſie auch Gegenminen.

Zuſatz.

44. Die Beſatzung kann vermittelſt dieſer Gänge leicht unter jede Stelle auf dem Glacis kommen, daſelbſt eine Minenkammer anlegen, und nach geſchehener Verdämmung der Gänge den Feind, wenn er ſich etwa auf dem Glacis feſt ſetzen wollte, in die Luft ſprengen. Bey dem allen muß dieſe Anſtalt mit Vorſicht vorgekehrt werden, weil die Beſatzung hiemit einen Theil ihrer Gänge verdirbt, und überdem hiernächſt der Feind in dem Trichter der geſprungenen Mine ſicher iſt. Hieſelbſt kann er ſich verſchanzen, und ſeine Batterien errichten, ohne daß ihm alle übrige Gegenminen davon abhalten könnten. Dies hat Vorſchläge veranlaſſet, gleichſam in verſchiedenen Stockwerken mehr Minen über einander zu bauen, wobey ſich doch in der Ausführung manche Schwierigkeiten hervorgeben. Sicherer iſt es, eine ſolche Vorkehrung zu treffen, daß eben dieſelbe Gegend durch neben einander liegende Minenkammern mehr als einmahl geſprengt werden könne.

Einige Verbeſſerungen und Druckfehler

S. 33. Z. 13. ſtatt (59. §.) l. (63. §.)
S. 53. Z. 2. 3. 4. 5. von unten ſtatt Mk. l. Lt.
S. 61. Z. 2. nach den Worten: hohl ſind, ſetze man hinzu: und einander nicht ſchneiden.
S. 67. Z. 21. 22. ſtatt 53. §. l. 52. §. und Z. 6 von unten 18. §. l. 17. §.
S. 73. Z. 12. ſtatt Grundfläche, l. Grundlinie.
S. 74. Z. 18. ſtatt 75. §. l. 77. §.
S. 78. Z. 7. von unten ſtatt AD l. HD.
S. 96. Z. 16. ſtatt 40 Fig. l. 41 Fig.
S. 97. Z. 1 ſtatt $\frac{4}{3}$ l. $\frac{5}{4}$.
S. 101. Z. 18. ſtatt 7. l. 5. und Z. 5. von unten, ſtatt 48. §. Rech. l. 93. §. Rech.
S. 122. Z. 18. ſtatt $d > \delta$ l. $\delta > d$.
S. 123. Z. 3 ſtatt 212. §. l. 217. §.

S. 130. Z. 1 ſtatt $3\frac{70}{71}$ l. $3\frac{10}{71}$ und Z. 4. ſtatt $\frac{355}{173}$ l. $\frac{355}{113}$.
S. 141. Z. 20 ſtatt AG l. AC.
S. 142. Z. 5 ſtatt Erkſäule l. Eckſäule.
S. 144. Z. 5 ſtatt 170 §. l. 175. §.
S. 159. oben am Rande fehlt: 81 Fig.
S. 167. Z. 8. nach AB, CD, ſetze man hinzu: eines Trapezii ABC.
S. 185. Z. 6. von unten ſtatt 28. §. l. 29. §.
S. 202. Z. 3. ſtatt eine Summe, l. mit einer Summe.
S. 204. Z. 5. ſetze man am Rande 94. Fig.
S. 205. Z. 7. von unten ſtatt E l. H. ganz unten ſtatt rechtwinklichten, l. gleichſchenklichten.
S. 206. Z. 7. von unten l. 125. §.
S. 209. Z. 10 ſtatt Quotienten l. Coefficienten.
S. 217. Z. 19. übrigen drey, l. übrigen zwey.
S. 218. Z. 2. ſtatt $+ = a - y$, l. $x = a - y$.
S. 227. Z. 18. ſtatt $44\frac{1}{2}$ l. $66\frac{1}{2}$.
S. 230. Z. 22. l. 261. §. Geom.
S. 235 Z. 6. P = 3Q, l. Q = 3P.
S. 241. Z. 4 von unten, ſtatt + ABP l. + AB . P.
S. 247. Z. 9. l. 193. §. Geom.
S. 252. Z. 12. l. 29. §. Trig. und 2 Z. von unten AC : BD l. AC : AD, in der letzten Zeile l. 168. §. Geom.
S. 254. 8 Z. von unten 261 §. Geom.
S. 255. 14. Z. l. 248 §. Geom. und 21 Z. l. 259. §. Geom.
S. 256. 6. Z. von unten l. 177. §. Geom. auch eben ſo 258. S. 13. Z. von unten.
S. 260. Z. 6. l. 250 §. Geom.
S. 269. Z. 8. ſtatt AC. (§. Geom.) l. BC. (307. §. G.)
S. 270. Z. 18. l. 307. §. Geom.)
S. 273. Z. 12. von unten ſetze man am Rande: 126 Fig.
S. 282. Z. 1 ſtatt BDGH, l. BDHI.
S. 284. Z. 16 und 19. ſtatt 9600 Gran l. 153600 Gran.
S. 290. Z. 10 ſtatt KL l. ML.
S. 302. Z. 9 von unten l. (336. §. Geom.) und Z. 7. von unten ſtatt $r^3 - \varrho^2$ l. $r^3 - \varrho^3$.
S. 303. Z. 2. von unten l. 13. §. Stat.
S. 305. Z. 4 von unten l. 166. §. Geom.
S. 306. Z. 15. l. 14. §. Trigon.
S. 309. Z. 8. l. 20 §. Trigon.
S. 313. Z. 2. ſtatt $\frac{1}{3}$ l. $\frac{1}{30}$.
S. 317. Z. 13. ſtatt $\frac{34}{16}$ l. $\frac{84}{16}$.

S. 322.

S. 322. Z. 13. nach Unterricht ſetze man hinzu: geben.
S. 326. Z. 10. ſtatt $= s$ l. $= c$.
S. 328. Z. 4 ſtatt 16. §. l. 17. §. und Z. 2 und 6 von unten ſtatt 17. §. l. 18. §.
S. 333. Z. 5 von unten l. 236. §. Geom.
S. 336. Z. 11. am Rande ſtatt 147. Fig. l. 141 Fig.
S. 343. Z. 19 ſtatt MN l. MN — LF.
S. 349. Z. 9. aber auch, l. oder auch. und Z. 16. am Rande 145 Fig. l. 154. Fig.
S. 355. Z. 13. ſtatt 6. 7. §. l. 6. 7. §. Hydraul.
S. 366. Z. 9. ſtatt 445 Pfund l. 318 Pfund.
S. 400 Z. 1. ſtatt hin und her, l. hin oder her.
S. 431. nach dem Worte: optiſchen, ſetze man hinzu: und aſtronomiſchen
S. 446. Z. 15 oder $\frac{ar}{r+\varrho}$ l. $\frac{a\varrho}{r+\varrho}$.
S. 449. Z. 6 von unten, ſtatt GW l. CW.
S. 450. Z. 9. von unten ſtatt $\sin tot. tg\frac{1}{2}\delta$ l. $\sin tot : tg\frac{1}{2}\delta$.
S. 459. Z. 13 ſtatt ſeines l. eines.
S. 467. Z. 10. ſtatt *nokp* l. *nvkp*.
S. 471. Z. 4 von unten, ſtatt Kriegsbogen l. Kreisbogen.
S. 480. Z. 9. ſtatt F, C, Y, l. F, G, Y.
S. 490. Z. 7. von unten ſtatt GP l. G*p*.
S. 491. Z. 2. ſtatt $\mu + 1$ l. $\mu - 1$.
S. 494. Z. 3 ſtatt $C\pi + v$ l. $C\pi + r$.
S. 495. letzte Z. ſtatt BAQ l. PAQ.
S. 510. letzte Z. ſtatt $\delta f \alpha f$ l. $\delta f = \alpha f$.
S. 531. Z. 8 ſtatt T l. F.
S. 536. Z. 13 von unten, ſtatt nur halb l. doppelt.
S. 545. Z. 5. ſtatt M*o* l. M*v*.
S. 554. Z. 11 ſtatt 9^4 l. q^4.
S. 576. Z. 7 von unten, ſtatt Geom. l. Aerom.
S. 577 Z. 9 von unten l. 22. 23. §. Opt.
S. 585. Z. 5 l. 29. §. Opt.
S. 603. Z. 13. Conar l. Conon.
S. 625. Z. 4 des ganzen, l. das ganze.
S. 631. Z. 12. 20. 25. Raugondy, l. Vaugondy.
S. 633. Z. 13. l. 15. §. Opt.
S. 634. Z. 4. CD — CH l. CD — DH.
S. 649. Z. 17 ſtatt FF l. FT.
S. 666. Z. 4. Zeitvergleichung, l. Zeitgleichung.
S. 680. Z. 11. von unten l. 55. §.

Verzeichniß des Inhalts
der gröſſern mathematiſchen Werke des Verfaſſers.

Anfangsgründe der Mathematiſchen Wiſſenſchaften. *)

Erſter Band.

Anfangsgründe der Rechenkunſt.

Der I. Abſchnitt. Von einigen allgemeinen Grundwahrheiten der Mathematik überhaupt und der Rechenkunſt insbeſondre.

Der II. Abſ. Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

Der III. Abſ. Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

Der IV. Abſ. Von der Diviſion mit ganzen Zahlen und dem Urſprung der Brüche.

Der V. Abſ. Von dem Unterſchied der Primzahlen und zuſammengeſetzten Zahlen.

Der VI. Abſ. Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

Der VII. Abſ. Von den Decimalbrüchen insbeſondre.

Der VIII. Abſ. Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Der

*) Dieſes Werk iſt bisher unter dem Titel: **Lehrbegriff der geſammten Mathematik. Des Erſten Theils der zweyten Auflage** 1. 2. 3. Band diſtribuirt worden. Indem der Herr Verfaſſer die Abſicht hatte, bey einer erforderten neuen Auflage des erſten Theils des Lehrbegriffs, dieſen Theil ſo umzuarbeiten, daß er aus 3 Bänden beſtehen, und zu Vorleſungen mehr beſtimmt werden ſollte. Da ſich aber unter der Hand dieſer Plan ſo erweiterte, daß nunmehro 4 Bände daraus werden, in welchen alle Theile der Math. Wiſſenſchaften eben ſo, wie im Lehrbegriff, jedoch nur etwas abgeänderter und kürzer abgehandelt werden; ſo paßte dieſe neue Auflage nicht mehr in die Reiche der Theile des groſſen Lehrbegriffes. Sondern man entſchloß ſich beym 3ten Bande die Titel zu allen 3 Bänden beyzufügen, welche dies Buch nun **Anfangsgründe der Mathem. Wiſſenſchaften** nennen. Und dieſe 3 und der folgende 4te Band, werden ein beſonderes Werk für ſich ausmachen. Daher wird nun auch der Erſte Theil, ſo wie er zu den bisjetzo fertigen 8 Theilen des Lehrbegriffs gehört, von neuen aufgelegt, und in der Oſter-Meſſe 1782 geliefert werden. Man ſehe mit mehrern hievon die Vorrede des 3ten Bandes, dieſes Werks.

Der IX. Abſ. Von den arithmetiſchen Verhältniſſen, Proportionen und Progreßionen.
Der X. Abſ. Von den geometriſchen Verhältniſſen, Proportionen und Progreßionen.
Der XI. Abſ. Die Regeln, nach welchen man aus jeder Zahl die Quadratwurzel findet.
Der XII. Abſ. Die Regeln, nach welchen man aus jeder Zahl die Cubicwurzel findet.
Der XIII. Abſ. Von der Zuſammenſetzung und Theilung der Verhältniſſe, als dem Urſprung der Logarithmen.
Der XIV. Abſ. Die Regel Detri mit ihren Anwendungen.
Der XV. Abſ. Anwendung der Regel Detri auf die Maaß- und Gewichts-Vergleichung.
Der XVI. Abſ. Die umgekehrte Regel Detri, auch eine kurze Erklärung der zuſammengeſetzten Regel Detri.

Der Geometrie erſter Theil

Die ebene Geometrie.

Der I. Abſchnitt. Von den erſten Grundwahrheiten der Geometrie, und insbeſondre von graden Linien und Winkeln.
Der II. Abſ. Vom Umfange der ebenen Figuren überhaupt, und insbeſondre von der Kreislinie.
Der III. Abſ. Von den Dreyecken und Parallellinien.
Der IV. Abſ. Von den Vierecken und insbeſondre den Parallelogrammen.
Der V. Abſ. Anwendung der Rechenkunſt auf die Ausmeſſung grader Linien und Winkel.
Der VI. Abſ. Von den Sehnen und Berührungslinien des Kreiſes.
Der VII. Abſ. Von den vielſeitigen und beſonders den regulären Figuren.
Der VIII. Abſ. Fernere Lehren von den Proportionen mit Anwendungen auf die Lehren von der Proportionalität grader Linien.
Der IX. Abſ. Von der Aehnlichkeit der Figuren.
Der X. Abſ. Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.
Der XI. Abſ. Anwendung der Rechenkunſt auf die Ausmeſſung des Flächen-Inhalts ebener Figuren.

Die ebene Trigonometrie mit ihren Anwendungen.

Der XII. Abſchnitt. Die erſten Grundlehren von den trigonometriſchen Linien.
Der XIII. Abſ. Nähere Anleitung zur Berechnung und zum Gebrauch der trigonometriſchen Tafeln.
Der XIV. Abſ. Von der Kreismeſſung.
Der XV. Abſ. Trigonometriſche Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke.

Der Geometrie zweyter Theil

Die körperliche Geometrie und Berechnung der körperlichen Gröſſen.

Der XVI. Abſchnitt. Von den verſchiedenen Lagen grader Linien und ebener Flächen gegen andre ebene Flächen.
Der XVII. Abſ. Von den priſmatiſchen Körpern und Pyramiden.
Der XVIII. Abſ. Vom Cylinder und Kegel.
Der XIX. Abſ. Von Inhalt der Kugel.
Der XX. Abſ. Vergleichung der Kugelfläche mit den Flächen des graden Cylinders und Kegels.

Zweyter Band.

Die Statik der feſten Körper.

Der I. Abſchnitt. Die erſten Grundlehren von der Schwere und vom Gewicht der Körper.
Der II. Abſ. Die erſten Grundlehren vom Gleichgewicht auf feſte Körper wirkender Kräfte.
Der III. Abſ. Vom Gleichgewicht der Kräfte am gradlinichten Hebel.
Der IV. Abſ. Vom Schwerpunct der feſten Körper, mit einigen Anwendungen dieſer Lehre.
Der V. Abſ. Vom Gleichgewicht ſolcher Kräfte an feſten Körpern, deren Richtungen nicht parallel ſind.
Der VI. Abſ. Vom ſchiefen Druck gegen eine Fläche, und von der Friction als einem Hinderniß der Bewegung.
Der VII. Abſ. Vom Gebrauch der Rollen und Räder.
Der VIII. Abſ. Vom Keil und der Schraube.

Die Hydroſtatik.

Der I. Abſchnitt. Allgemeine Grundlehren vom Gleichgewicht der Kräfte an flüßigen Maſſen.
Der II. Abſ. Vom Gleichgewicht des ſchweren Waſſers in Gefäſſen und Röhren.
Der III. Abſ. Vom Gleichgewicht flüßiger Maſſen mit hineingetauchten feſten Körpern.
Der IV. Abſ. Von den hydroſtatiſchen Proben des eigenthümlichen Gewichts ſowohl feſter als auch flüßiger Maſſen.
Der V. Abſ. Vom eigenthümlichen Gewicht vermiſchter Maſſen.
Der VI. Abſ. Vom Gleichgewicht ungleichartiger flüßiger Maſſen in Gefäſſen und Röhren.

Die Aeroſtatik.

Der I. Abſchnitt. Allgemeine Geſetze des Gleichgewichts der Kräfte, die auf elaſtiſche flüßige Maſſen wirken.
Der II. Abſ. Die Geſetze des Gleichgewichts der ſchweren elaſtiſchen Luft.
Der III. Abſ. Kurze Beſchreibung der Luftpumpe und einiger damit anzuſtellender Verſuche.

Der

Der IV. Abſ. Vom Barometer und deſſen Gebrauch.
Der V. Abſ. Vom Thermometer und deſſen Gebrauch.
Der VI. Abſ. Vom Manometer und Hygrometer.

Die erſten Gründe der Mechanik feſter Körper.

Der I. Abſchnitt. Die Geſetze der gleichförmigen Bewegung.
Der II. Abſ. Die Geſetze des Falles natürlich ſchwerer Körper.
Der III. Abſ. Allgemeine Vergleichung der gleichförmig beſchleunigenden Kräfte mit der Schwere.
Der IV. Abſ. Vom Falle ſchwerer Körper auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene.
Der V. Abſ. Nähere Beſtimmung der Fliehkraft bey der Umlaufsbewegung im Kreiſe.
Der VI. Abſ. Die Geſetze der Schwingungsbewegung des Pendels.

Die erſten Gründe der Hidraulik.

Der I. Abſchnitt. Von der Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren.
Der II. Abſ. Vom Lauf des Waſſers in Canälen und Flüſſen.
Der III. Abſ. Regeln zur Berechnung des Waſſerſtoſſes gegen feſte Flächen.
Der IV. Abſ. Berechnung des Effects der Saugpumpe.
Der V. Abſ. Vom Effect der Druckpumpe.
Der VI. Abſ. Andre Bewegungen des Waſſers, die der Druck der Luft verurſacht.

Die erſten Gründe der Maſchinenlehre.

Der I. Abſchnitt. Das Allgemeine der Theorie vom Maſchinenweſen.
Der II. Abſ. Anwendung dieſer Lehren bey Anordnung der Pumpenkünſte.
Der III. Abſ. Von Anordnung der Sprützenkünſte.
Der IV. Abſ. Vom unterſchlächtigen Waſſerrade und deſſen Effect.
Der V. Abſ. Vom oberſchlächtigen Waſſerrade, auch vom Lauf= und Tretrade.
Der VI. Abſ. Anwendung der bisherigen Lehren bey Anordnung der Getreyde=Stampf= und Sägemühlen.
Der VII. Abſ. Vom Effect der Windflügel bey Mühlen und andern Maſchinen.
Der VIII. Abſ. Von der Archimediſchen Waſſerſchraube.
Der IX. Abſ. Kurze Beſchreibung der Kaſtenkünſte, Schöpfräder, Roſenkranzmühlen und Schaufelwerke.
Der X. Abſ. Regeln zur Berechnung der Friction bey Maſchinen.

Zuſatz zur Mechanik feſter Körper.

Vom centralen Stoß feſter Körper an einander.

Drit=

Dritter Band.

Die Optik.

Der I. Abſchnitt. Vorläufige Betrachtung einiger Eigenſchaften des Lichts.
Der II. Abſ. Vom Sehewinkel, und einigen davon abhängenden Erſcheinungen.
Der III. Abſ. Von der ſcheinbaren Geſtalt entfernter Gegenſtände.
Der IV. Abſ. Von der ſcheinbaren Lage, der Parallaxe, auch von der ſcheinbaren Bewegung.
Der V. Abſ. Die Gründe der Theorie von der Abirrung des Lichts.
Der VI. Abſ. Vom Schatten und Halbſchatten, beſonders in ſolchen Fällen, wenn die Erleuchtung vom Sonnenlicht kommt.

Die erſten Gründe der Perſpectiv.

Der I. Abſchnitt. Von den allgemeinen Gründen der Kunſt, perſpectiviſche Zeichnungen zu entwerfen.
Der II. Abſ. Die perſpectiviſche Zeichnung ſolcher Figuren, die in einer auf der Tafel ſenkrechten Ebene liegen.
Der III. Abſ. Die Gründe der perſpectiviſchen Zeichnung ſolcher Figuren, die in einer gegen die Tafel geneigten Ebene liegen.
Der IV. Abſ. Die Zeichnung der perſpectiviſchen Höhen auf einer gegen die Tafel geneigten Ebene.
Der V. Abſ. Die allgemeine Theorie der perſpectiviſchen Scenographie.
Der VI. Abſ. Die allgemeine Theorie der Sciagraphie.
Der VII. Abſ. Theorie der orthographiſchen Projection ſolcher ebenen Figuren, welche die Tafel ſenkrecht ſchneiden.
Der VIII. Abſ. Die orthographiſche Projection ſolcher Figuren, deren Ebene die Tafel ſchief ſchneidet.

Die Photometrie mit ihren Anwendungen in der Katoptrik und Dioptrik.

Der I. Abſchnitt. Die erſten Grundlehren der Theorie von Ausmeſſung der Stärke des Lichts.
Der II. Abſ. Von den Geſetzen der Zurückwerfung des Lichts von ebenen Spiegelflächen, als den Gründen der Katoptrik.
Der III. Abſ. Die Geſetze der Zurückwerfung des Lichts von krummen, und vornemlich ſphäriſchen Spiegeln.
Der IV. Abſ. Kurze Erläuterung der Erſcheinungen im coniſchen und cylindriſchen Spiegel.
Der V. Abſ. Von den Geſetzen der Brechung des Lichts in ebenen Flächen, als den Gründen der Dioptrik.

Der

Der VI. Abſ. Die Strahlenbrechung, wenn das Licht durch ein Priſma fällt.
Der VII. Abſ. Die Brechung des gleichartigen Lichts in einer Kugelfläche.
Der VIII. Abſ. Die Brechung des gleichartigen Lichts in linſenformigen Gläſern.
Der IX. Abſ. Vom Bau des Auges, und der Erſcheinungen der Gröſſe und des Glanzes beym deutlichen Sehen.
Der X. Abſ. Vom entlehnten Glanz unpolirter anderswoher erleuchteter Flächen.
Der XI. Abſ. Vom undeutlichen Bilde der Glaslinſen und Hohlſpiegel, mit einigen Anwendungen dieſer Lehren.
Der XII. Abſ. Die Geſetze der Schwächung des Lichts in durchſichtigen Maſſen mit einigen Anwendungen beſonders auf die Atmoſphäre.
Der XIII. Abſ. Die allgemeinen Gründe der Theorie von den Fernröhren und Microſcopen.
Der XIV. Abſ. Die Zerſtreuung der in Glaslinſen gebrochenen Strahlen wegen ihrer ungleichen Brechbarkeit.
Der XV. Abſ. Die von der Kugelgeſtalt herrührende Abweichung der in Glaslinſen gebrochenen Lichtſtrahlen.
Der XVI. Abſ. Die allgemeinen Gründe der Theorie von den Spiegel-Teleſcopen.
Der XVII. Abſ. Die aus verſchiedenen Glasarten zuſammen geſetzten Objectivgläſer.
Der XVIII. Abſ. Vollſtändigere Theorie vollkommener und beſonders der achromatiſchen Fernröhre.
Der XIX. Abſ. Nähere Anleitung zur Berechnung der Spiegel-Teleſcope.
Der XX. Abſ. Vollſtändigere Theorie der Microſcope.

Lehrbegriff der geſamten Mathematik

Der Erſte Theil

Die Rechenkunſt.

Der I. Abſchnitt. Von einigen Eigenſchaften der Zahlen und ihrer Bezeichnung durch Ziffern.
Der II. Abſ. Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.
Der III. Abſ. Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.
Der IV. Abſ. Von der Diviſion mit ganzen Zahlen und dem Urſprung der Brüche.
Der V. Abſ. Von dem Unterſcheid der Prim-Zahlen und zuſammen geſetzten Zahlen.
Der VI. Abſ. Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.
Der VII. Abſ. Von den Decimal-Brüchen insbeſondre.
Der VIII. Abſ. Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Der IX. Abſ. Von den Verhältniſſen und Proportionen.
Der X. Abſ. Von der Regel Detri und ihrer Anwendung.

Der Geometrie erſter Theil.

Die ebene Geometri.

Der I. Abſchnitt. Von den graden Linien und Winkeln.
Der II. Abſ. Vom Umfang der ebenen Figuren überhaupt und insbeſondre von der Kreislinie.
Der III. Abſ. Von den Dreyecken und Parallellinien.
Der IV. Abſ. Von den Parallelogrammen und ihre Vergleichung ſowohl unter ſich, als auch mit den Dreyecken.
Der V. Abſ. Vom Kreiſe und den regulären Polygonen.
Der VI. Abſ. Allgemeine Lehren von den Verhältniſſen und Proportionen.
Der VII. Abſ. Von der Aehnlichkeit der Figuren.
Der VIII. Abſ. Von den zuſammen geſetzten Verhältniſſen.
Der IX. Abſ. Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

Anwendung der Rechenkunſt auf die ebene Geometrie.

Der X. Abſ. Von der Ausmeſſung grader Linien und Winkel.
Der XI. Abſ. Von der Ausmeſſung ebener Figuren.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometri nebſt Berechnung der körperlichen Größen.

Der XII. Abſchnitt. Von den verſchiedenen Lagen grader Linien und ebener Flächen gegen andre ebene Flächen.
Der XIII. Abſ. Von den Prismatiſchen Körpern und Pyramiden.
Der XIV. Abſ. Vom Cylinder und Kegel.
Der XV. Abſ. Vom Inhalt der Kugel.

Der zweyte Theil.

Weitere Ausführung der Rechenkunſt.

Der XI. Abſchnitt. Von den Kennzeichen einiger Diviſoren ganzer Zahlen.
Der XII. Abſ. Von der zuſammengeſetzten Regel Detri und der Regel Multiplex.
Der XIII. Abſ. Von der Rabatt- oder Interuſurien und andern Reductionsrechnungen.
Der XIV. Abſ. Von Zins auf Zins, und der zuſammengeſetzten Interuſurien-Rechnung.
Der XV. Abſ. Von der Geſellſchafts- und Vermiſchungs und Alligations-Rechnung.
Der XVI. Abſ. Von der Regel Coeci.

Die allgemeine Rechenkunſt, oder die Buchſtaben-Rechnung mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunſt.

Der I. Abſchitt. Von den vier allgemeinen Rechnungsarten.

Der

Der II. Abſ. Von den Ausdrücken des Unendlichen.
Der III. Abſ. Von den Potenzen und Wurzeln.
Der IV. Abſ. Von Ausziehung der Wurzeln aus Quadrat- und Cubic-Zahlen.
Der V. Abſ. Von den Sexageſimal-Brüchen.
Der VI. Abſ. Von der Zuſammenſetzung und Theilung der Verhältniſſe als dem Urſprunge der Logarithmen.
Der VII. Abſ. Von den Briggiſchen Logarithmen.
Der VIII. Abſ. Von der Auflöſung mathematiſcher Aufgaben durch Gleichungen, als der verbeſſerten Regel Falſi.
Der IX. Abſ. Von den Progreßionen.
Der X. Abſ. Von der Annuitäten- und Leibrenten-Rechnung.

Weitere Ausführung der ebenen Geometrie.

Der XVI. Abſ. Von den Trigonometriſchen Linien und ihren Logarithmen.
Der XVII. Abſ. Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke und regulärer Polygone.
Der XVIII. Abſ. Vergleichung der Tangenten und Cotangenten einfacher und doppelter Winkel.
Der XIX. Abſ. Anwendung der Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts gradlinichter Figuren.
Der XX. Abſ. Von der Kreismeſſung.
Der XXI. Abſ. Vergleichung des Inhalts der Figuren die einen gleichen Umfang haben.

Weitere Ausführung der körperlichen Geometrie.

Der XXII. Abſ. Von den Kugelſchnitten.
Der XXIII. Abſ. Von den körperlichen Winkeln oder Ecken.
Der XXIV. Abſ. Die ſphäriſche Trigonometrie.
Der XXV. Abſ. Allgemeine Theorie von den eckigten Körpern.
Der XXVI. Abſ. Anwendung der ſphäriſchen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Prismen, Pyramiden und der regulären Körper.
Der XXVII. Abſ. Von der Cylinder- und Kegel-Fläche.
Der XXVIII. Abſ. Von der Kugelfläche und den Abſchnitten und Ausſchnitten der Kugel.

Der dritte Theil.

Die Statik der feſten Körper.

Der I. Abſ. Von den bewegenden Kräften überhaupt, und insbeſondre von der Schwere.
Der II. Abſ. Vom Gleichgewicht der Kräfte am gradlinichten Hebel.
Der III. Abſ. Vom Winkel-Hebel, und dem Gleichgewicht mehrerer an einem Punct angebrachten Kräfte.
Der IV. Abſ. Vom Schwerpunct der feſten Körper.
Der V. Abſ. Von den Wagen, und der eigenen Schwere der Körper.
Der VI. Abſ. Von den Rollen und Flaſchenzügen.

Der

Der VII. Abſ. Vom Rade an der Welle und dem Räderwerk.
Der VIII. Abſ. Vom ſchiefen Druck gegen eine Fläche, und dem Keil.
Der IX. Abſ. Vom Gleichgewicht der Kräfte bey jeder Lage ihrer Richtungen.
Der X. Abſ. Von der Schraube.
Der XI. Abſ. Von der Feſtigkeit und Federkraft der Körper.
Der XII. Abſ. Von der Friction.

Die Hydroſtatik.

Der I. Abſ. Vom Gleichgewicht der flüßigen Körper in Gefäſſen und Röhren.
Der II. Abſ. Vom Druck der flüßigen Maſſen gegen die Gefäſſe.
Der III. Abſ Vom Gleichgewicht feſter Körper mit flüßigen.
Der IV. Abſ. Vom Schwimmen der Körper.
Der V. Abſ. Von der eigenen Schwere flüßiger Maſſen.
Der VI. Abſ. Wie man die eigene Schwere feſter Körper hydroſtatiſch findet.
Der VII. Abſ. Von der eigenen Schwere vermiſchter Körper.
Der VIII. Abſ. Vom Gleichgewicht ungleichartiger flüßiger Maſſen.

Die Aeroſtatik.

Der I. Abſ. Von den Geſetzen des Gleichgewichts elaſtiſcher flüßiger Maſſen.
Der II. Abſ. Von der Federkraft und Schwere der Luft.
Der III. Abſ. Vom Barometer und deſſen Gebrauch.
Der IV. Abſ. Vom Thermometer und deſſen Gebrauch.
Der V. Abſ. Von der Dichtigkeit und der Federkraft der Luft in verſchiedenen Höhen über der Erdfläche.
Der VI. Abſ. Von der Dichtigkeit der Luft nahe an der Erdfläche.
Der VII. Abſ. Vom Manometer und Hygrometer.
Der VIII. Abſ. Von der Dichtigkeit und Federkraft der Luft bey verſchiedener Wärme, und dem Luft-Thermometer.

Die Mechanik der feſten Körper.

Der I. Abſ. Von der gleichförmigen Bewegung und der Trägheit der Körper.
Der II. Abſ. Vom freyen Falle ſchwerer Körper.
Der III. Abſ. Allgemeine Lehren von den gleichförmig bewegenden Kräften; und ihrer Vergleichung mit der Schwere.
Der IV. Abſ. Vom Falle ſchwerer Körper auf einer ſchiefen Ebene.

Der vierte Theil.

Weitere Ausführung der Mechanik der feſten Körper.

Der V. Abſchnitt. Von der freyen Bewegung geworfener

ſchwe-

ſchwerer Körper, nebſt allgemeinen Betrachtungen über die Bewegung in krummen Linien.
Der VI. Abſ. Von den Kräften, die nicht gleichförmig beſchleunigen.
Der VII. Abſ. Von der Schwungbewegung im Kreiſe.
Der VIII. Abſ. Vom Schwunge der einfachen Pendul.
Der IX. Abſ. Von der Schwungbewegung feſter Körper um eine unbewegliche Axe.
Der X. Abſ. Von den Kräften, welche die Schwungbewegung um eine unbewegliche Axe ändern.
Der XI. Abſ. Vom Schwunge der zuſammengeſetzten Pendul.
Der XII. Abſ. Von der relativen und ſcheinbaren Bewegung.
Der XIII. Abſ. Von der Bewegung des Schwerpuncts eines Syſtems mehrerer Körper.
Der XIV. Abſ. Von der freyen Bewegung feſter Körper, die ſich beym Fortgehen zugleich um eine Axe drehen.
Der XV. Abſ. Vom centralen Stoſſe der Körper an einander.
Der XVI. Abſ. Vom Stoſſe feſter Körper an andre, die nicht ausweichen.
Der XVII. Abſ. Vom Maaß der Kräfte des Stoſſes.
Der XVIII. Abſ. Vom eccentriſchen Stoß und dem Mittelpunct des Stoſſes.
Der XIX. Abſ. Vom Widerſtande, den feſte Körper leiden, die ſich im flüſſigen bewegen.
Der XX. Abſ. Vom Steigen und Fall der ſchweren Körper in der Luft.
Der XXI. Abſ. Von der Ueberwucht bey Maſchinen, die durch Gewichte bewegt werden.
Der XXII. Abſ. Von der Friction bewegter Körper.
Der XXIII. Abſ. Das allgemeine der Theorie von Maſchinen-Weſen.
Der XXIV. Abſ. Von Maſchinen, die durch Menſchen oder Thiere bewegt werden.
Der XXV. Abſ. Regeln zur vollſtändigen Berechnung des geſamten Widerſtandes bey Maſchinen.
Der XXVI. Abſ. Beſchreibung eines Korn-Mahl-Ganges, nebſt Berechnung einer Hand- und Roß-Mühle.

Der fünfte Theil.

Die Hydraulik oder die Theorie von der Bewegung flüßiger Körper.

Der I. Abſ. Allgemeine Betrachtungen über die Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren.

Der II. Abſ. Berechnung der Geſchwindigkeit und Menge des durch kleine Oefnungen laufenden Waſſers.
Der III. Abſ. Von Viſirung der Quellen und Berechnung der Waſſermenge nach Zollen.
Der IV. Abſ. Von Gefäſſen, die ganz auslaufen, wenn die Oefnungen klein ſind.
Der V. Abſ. Vom Lauf des Waſſers in Canälen und Flüſſen.
Der VI. Abſ. Vom Stoß des Strom- Rinnen- und Röhr-Waſſers an feſte Körper.
Der VII. Abſ. Von den unterſchlächtigen Waſſer-Rädern bey Mühlen und andern Maſchinen.
Der VIII. Abſ. Vom Mittelpunct des Waſſer-Stoſſes.
Der IX. Abſ. Von oberſchlächtigen Rädern.
Der X. Abſ. Von horizontalen Rädern, und den ihnen ähnlichen verticalen Rädern.
Der XI. Abſ. Vollſtändigere Theorie von der Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren.
Der XII. Abſ. Fortſetzung der vorigen Unterſuchung auch für die Fälle, wenn die Gefäſſe beſtändig voll bleiben.
Der XIII. Abſ. Vergleichung der bisherigen Theorie mit des Hrn. Joh. Bernoulli Hydraulik.
Der XIV. Abſ. Vom Druck des bewegten Waſſers gegen die Gefäſſe und Röhren.
Der XV. Abſ. Von der Bewegung des Waſſers in Röhren von unbeſtimmter Länge.
Der XVI. Abſ. Von den Bewegungen des Waſſers, die der Druck der Luft verurſacht.
Der XVII. Abſ. Theorie der Pumpen und insbeſondre der Saugwerke.
Der XVIII. Abſ. Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel eines Saugwerks und deſſen Druck gegen den Kolben.
Der XIX. Abſ. Das allgemeine der Theorie der Waſſerkünſte mit Anwendungen auf die Saugwerke.
Der XX. Abſ. Von den Schwengelkünſten.
Der XXI. Abſ. Von den Stangenkünſten mit dem krummen Zapfen.
Der XXII. Abſ. Beſchreibung der Schacht- und Feldgeſtänge.
Der XXIII. Abſ. Die Theorie der Druckwerke.
Der XXIV. Abſ. Beſondre Unterſuchung über die vortheilhafteſte Einrichtung der Druckwerke.
Der XXV. Abſ. Von vereinbarten Saug- und Druckwerken.
Der XXVI. Abſ. Prüfung verſchiedener zur Bewegung der Pumpen-Kolben vorgeſchlagenen Maſchinen.
Der XXVII. Abſ. Die Eigenſchaften guter Kolben und Ventile.

Der

Der XXVIII. Abſ. Beſondre Anwendung der bisherigen Lehren auf Pumpenkünſte, die durch Menſchen, Pferde, oder durchs Waſſer getrieben werden.
Der XXIX. Abſ. Theorie der Feuerſprützen.
Der XXX. Abſ. Von Sprützen mit dem Windkeſſel.
Der XXXI. Abſ. Von den mit Schlangen verſehenen Feuerſprützen.
Der XXXII. Abſ. Von dem einer Feuerſprütze beygeordneten Zubringer.

Der ſechſte Theil.

Fortſetzung der Hydraulik.

Der XXXIII. Abſ. Von der Zurückwürkung des Waſſers auf die Gefäſſe.
Der XXXIV. Abſ. Anwendung dieſer Theorie auf die Maſchinenlehre.
Der XXXV. Abſ. Vom Segneriſchen Wäſſerrade nach den verbeſſerten Vorſchlägen des H. Euler.
Der XXXVI. Abſ. Theorie der Archimediſchen Waſſerſchraube.
Der XXXVII. Abſ. Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des durch die Waſſerſchraube flieſſenden Waſſers.
Der XXXVIII. Abſ. Von Schöpfwerken, Kaſtenkünſten, und andern zur Hebung des Waſſers dienlichen Einrichtungen.
Der XXXIX. Abſ. Von Roſenkranz-Mühlen und Schaufelwerken.
Der XL. Abſ. Allgemeine Eintheilung der üblichſten Maſchinen in ihre verſchiedene Claſſen.
Der XLI. Abſ. Theorie der Stampfmühlen.
Der XLII. Abſ. Theorie der Holz-Sägemühlen.

Die Pneumatik, oder die Theorie von der Bewegung elaſtiſcher flüßiger Maſſen.

Der I. Abſ. Die erſten Gründe theoretiſcher Unterſuchungen über die Bewegungsgeſetze elaſtiſcher flüßiger Maſſen.
Der II. Abſ. Die Bewegung der Luft durch kleine Oefnungen.
Der III. Abſ. Die Bewegung der Luft in Röhren von unbeſtimmter Länge.
Der IV. Abſ. Verſuch einer Theorie der Luftpumpen.
Der V. Abſ. Beſchreibung der hauptſächlichſten Arten von Luftpumpen, die ſeit der erſten Erfindung bekannt geworden ſind.

Der VI. Abſ. Nähere Anleitung zur Berechnung des Effects und der mechaniſchen Anordnung einer Luftpumpe.
Der VII. Abſ. Berechnung des Drucks der Luft auf die Gefäſſe, und der nöthigen Feſtigkeit der letztern.
Der VIII. Abſ. Theorie der Windbüchſen mit einigen Anwendungen auf das Pulvergeſchütz.
Der IX. Abſ. Vom Stoß des Windes an feſte Körper.
Der X. Abſ. Theorie der Windflügel bey Mühlen und andern Maſchinen.
Der XI. Abſ. Von krumm gebogenen Windflügeln und dem Anemometer.
Der XII. Abſ. Von Windflügeln, deren Umlaufsaxe mit der Richtung des Windes nicht parallel liegt.

Der ſiebende Theil.

Die Optik, oder allgemeine Theorie vom Licht und Schatten, auch von den Erſcheinungen der Gröſſe, der Geſtalt und Bewegung der Dinge, in wiefern ſie durchs Geſicht empfunden werden.

Der I. Abſ. Vorläufige Betrachtung einiger Eigenſchaften des Lichts.
Der II. Abſ. Vom Sehewinkel und einigen davon abhängenden Erſcheinungen.
Der III. Abſ. Von der ſcheinbaren Geſtalt entfernter Gegenſtände.
Der IV. Abſ. Von der ſcheinbaren Lage entfernter Gegenſtände, und der Parallaxe.
Der V. Abſ. Von der ſcheinbaren Bewegung.
Der VI. Abſ. Von den Erſcheinungen, welche die allmählige Fortpflanzung des Lichts verurſacht.
Der VII. Abſ. Vom Schatten und Halbſchatten.
Der VIII. Abſ. Vom Sonnenlicht insbeſondre.

Die Perſpectiv, oder die Theorie von den Abbildungen der ſcheinbaren Geſtalt ausgedehnter Gröſſen, und ihrer ſcheinbaren Lage gegen einander nach Verſchiedenheit der Lage und Entfernung des Auges.

Der I. Abſ. Von den allgemeinen Gründen der Kunſt perſpectiviſche Zeichnungen zu entwerfen.

Der

Der II. Abſ. Vergleichung der Linien und Winkel des horizontalen geometriſchen Grundriſſes mit ihren perſpectiviſchen Abbildungen.

Der III. Abſ. Die Perſpectiviſch-ichnographiſche Zeichnung grader Linien und Winkel.

Der IV. Abſ. Die perſpectiviſch-ichnographiſche Zeichnung ebener Figuren.

Der V. Abſ. Analytiſche Theorie der Projectionen horizontal liegender krummer Linien auf der vertical ſtehenden Tafel mit Anwendungen auf die Kreislinie.

Der VI. Abſ. Die Regeln der Scenographie für ſolche körperliche Ansdehnungen, die wenigſtens einige ebene auf der Tafel oder dem Horizont ſenkrechte, oder damit parallele Seitenflächen haben.

Der VII. Abſ. Allgemeine Theorie der Projectionen ſowohl gradlinichter Figuren, als auch krummer Linien, die in Ebenen liegen, welche die Tafel ſchief ſchneiden.

Der VIII. Abſ. Die allgemeine Theorie der Scenographie.

Der IX. Abſ. Regeln zur geſchickten Wahl der Lage des Auges gegen die Tafel, und die darauf abzubildende Gegenſtände.

Der X. Abſ. Von den Erſcheinungen perſpectiviſcher Abbildungen, wenn ſie auſſer dem rechten Geſichtspunct betrachtet werden.

Der XI. Abſ. Allgemeine Theorie der Sciagraphie.

Der XII. Abſ. Regeln zur Prüfung und Beurtheilung perſpectiviſcher Gemählde, auch zur geſchickten Nachahmung guter Muſter.

Der XIII. Abſ. Allgemeine Theorie der orthographiſchen Projectionen auf der vertical ſtehenden Tafel.

Der XIV. Abſ. Theorie der orthographiſchen Projectionen auf der ſchiefliegenden Tafel.

Der XV. Abſ. Allgemeine Theorie der Projectionen des Kreiſes zugleich als Kegelſchnitte betrachtet.

Der XVI. Abſ. Von den Durchmeſſern der Kegelſchnitte.

Der XVII. Abſ. Von den Brennpuncten und Berührungslinien der Kegelſchnitte.

Der XVIII. Abſ. Von einigen beſondern Eigenſchaften der Hyperbel und ihren Aſymtoten.

Der XIX. Abſ. Von den mancherley Projectionsarten einer Kugel.

Der XX. Abſ. Allgemeine Theorie der ſtereographiſchen und orthographiſchen Kugel-Projectionen.

Der XXI. Abſ. Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Polar-Projection.

Der XXII. Abſ. Von der ſtereographiſch- und orthographiſch-äquatoriſchen Kugel-Projection.
Der XXIII. Abſ. Von der ſtereographiſchen und orthographiſchen Horizontal-Projection.
Der XXIV. Abſ. Beſondre Regeln zur Eintheilung der Projection eines Kugelſchnitts in Grade.
Der XXV. Abſ. Allgemeine Betrachtung der Projection eines Kugelſchnitts, auch wenn die Tafel auf der Axe durchs Auge und der Kugel Mittelpunct nicht ſenkrecht iſt.
Der XXVI. Abſ. Vergleichung dieſer Lehren mit des Hrn. Haſe Theorie der Kugel-Projectionen.
Der XXVII. Abſ. Von der Central-Projection der Kugelſchnitte.
Der XXVIII. Abſ. Von den Projectionen der Kegelſchnitte beſonders der Ellipſe.
Der XXIX. Abſ. Von den Projectionen der Parabel.
Der XXX. Abſ. Von den Projectionen der Hyperbel.

Der achte Theil.

Die Photometri oder Theorie von der Ausmeſſung der Stärke des Lichts.

Der I. Abſ. Vorläufige Unterſuchungen über die erſten Gründe der Photometrie.
Der II. Abſ. Die Erleuchtung einer Ebene von einer Lichtflamme, in wie weit letztere als ein Punct betrachtet werden kann.
Der III. Abſ. Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht von einer leuchtenden Fläche ausgehet.
Der IV. Abſ. Theorie der Erleuchtung ebener Flächen von leuchtenden Kugeln.
Der V. Abſ. Allgemeinere Theorie der Erleuchtung auch wenn die ſcheinbare Gränze der leuchtenden Fläche nicht zwiſchen einer graden Kugelfläche liegt.
Der VI. Abſ. Anwendung dieſer Theorie auf einige merkwürdige beſondere Fälle.
Der VII. Abſ. Allgemeine Geſetze der Zurückwerfung des Lichts, mit einer kurzen Anwendung auf ebene Spiegelflächen.
Der VIII. Abſ. Die Zurückwerfung des Lichts von ſphäriſchen Spiegeln.

Der

Der IX. Abſ. Allgemeine Geſetze der Brechung des Lichts mit Anwendungen auf ebene brechende Flächen.
Der X. Abſ. Die Strahlenbrechung, wenn das Licht durch ein Prisma fällt.
Der XI. Abſ. Die verſchiedene Brechbarkeit des ungleichartigen und verſchiedene Farben zuwege bringenden Lichts.
Der XII. Abſ. Die Brechung des gleichartigen Lichts in einer Kugelfläche.
Der XIII. Abſ. Die Brechung des gleichartigen Lichts, wenn es durch eine Glaslinſe fällt.
Der XIV. Abſ. Die verſchiedenen Arten der linſenförmigen Gläſer.
Der XV. Abſ. Theorie der Erleuchtung des Bildes linſenförmiger Gläſer und ſphäriſcher Hohlſpiegel.
Der XVI. Abſ. Theorie der Erleuchtung, wenn das Licht vom erhabenen Kugelſpiegel zurück ſtrahlet.
Der XVII. Abſ. Vom Bau des Auges, und dem ſcheinbaren Glanz leuchtender Gegenſtände.
Der XVIII. Abſ. Gründe der Theorie von Ausmeſſung des Lichts, wenn es von unpolirten Flächen zurückſtrahlet.
Der XIX. Abſ. Prüfung der Theorie des Hn. Bouguer vom Licht, das unpolirte Flächen zurück werfen.
Der XX. Abſ. Von der Klarheit für ſich dunkler Körper, die mit entlehntem Licht glänzen.
Der XXI. Abſ. Anwendung dieſer Theorie auf die Ausmeſſung der Klarheit des Monds in ſeinen verſchiedenen Geſtalten.
Der XXII. Abſ. Von einigen Hülfsmitteln, den Glanz leuchtender Körper durch Verſuche zu vergleichen.
Der XXIII. Abſ. Von der ſcheibaren Klarheit beym undeutlichen Sehen.
Der XXIV. Abſ. Allgemeine Geſetze der Schwächung des Lichts in durchſichtigen Maſſen.
Der XXV. Abſ. Vergleichung des von durchſichtigen Maſſen ſpiegelartig zurückgeworfenen, wie auch des durchſcheinenden und zerſtreueten, mit der Menge des auffallenden Lichts.
Der XXVI. Abſ. Von der Abnahme des Lichts in ungleichförmig durchſichtigen Maſſen, mit Anwendungen auf die Atmoſphäre.
Der XXVII. Abſ. Fortſetzung dieſer Unterſuchung nach Hn. Lambert.
Der XXVIII. Abſ. Von der Klarheit der Atmoſphäre; und der Erleuchtung die das Tageslicht verurſacht.

Mathe-

Matheſis Theoretica Elementaris atque ſublimior.

Geometria Elementaris.

Sectio I. De lineis rectis et angulis planis rectilineis.
Sect. II. De figurarum planarum et in ſpecie circuli perimetro generatim.
Sect. III. De triangulis planis rectilineis et rectis parallelis.
Sect. IV. De parallelogrammis eorumque comparatione et inter ſe, et cum triangulis planis.
Sect. V. De lineis rectis et angulis planis ad circulum relatis et circuli proprietatibus, quae inde pendent.
Sect. VI. De comparatione extenſorum geometrica generatim.
Sect. VII. De figurarum planarum rectilinearum *ſimilitudine*.
Sect. VIII. De comparatione figurarum planarum, et quae hinc pendent, problematum planorum conſtructionibus.
Sect. IX. De planorum atque rectarum linearum in reſpectu ad diverſa plana ſitu.
Sect. X. De planis ad ſuperficiem ſphaerae relatis et ſphaerae proprietatibus, quae inde pendent.
Sect. XI. De angulis ſolidis generatim et in ſpecie de triangulis ſolidis.
Sect. XII. De figuris ſolidis earumque ſuperficiebus.

Arithmetica Elementaris.

Sect. I. De numeris eorumque ſignis generatim.
Sect. II. Algorithmus numerorum integrorum et fractionum decimalium.
Sect. III. Algorithmus fractionum.
Sect. IV. De problematum quorundam arithmeticorum, quae poportionum theoria nituntur, ſolutione.
Sect. V. Brevis introductio in Arithmeticam practicam.

Cal-

Calculus extenſorum,

Sect. I. De menſuratione longitudinum et angulorum planorum rectilineorum, vulgo, de longimetria et trigonometria plana.
Sect. II. De menſuratione ſuperficierum et ſolidorum, vulgo de planimetria et ſtereometria.

Analyſis Mathematica.

Sect. I. De algorithmo ſpecioſo.
Sect. II. De ſolutione problematum ſimplicium.
Sect. III. De calculo analytico-trigonometrico.
Sect. IV. De aequationibus non ſimplicibus puris.
Sect. V. De aequationibus quadraticis non puris.
Sect. VI. De quantis variabilibus et limitibus rationum.
Sect. VII. De proprietatibus radicum in aequationibus, quae ſunt quadratica altiores.
Sect. VIII. De ſolutione problematum determinatorum ſecundo ordine altiorum arithmetica.
Sect. IX. De functionum, quae unam vel plures involvunt variabiles, palmariis quibusdam proprietatibus.
Sect. X. De ſolutione problematum indeterminatorum et doctrinae ſerierum principiis.
Sect. XI. De ſolutione problematum indeterminatorum geometrica.
Sect. XII. De ſolutione problematum non ſimplicium determinatorum geometrica.
Sect. XIII. De ſectionibus angulorum et arcuum circularium.
Sect. XIV. De inveſtigatione radicum aequationis impoſſibilium.
Sect. XV. De calculo differentiali functionum unius variabilis algebraicarum.
Sect. XVI. De uſu Calculi differentialis in doctrina ſerierum.
Sect. XVII. De maximis et minimis functionum unius variabilis.

Sect.

Sect. XVIII. De uſu calculi differentialis in aequationibus reſolvendis.

Sect. XIX. De methodo tangentium directa.

Sect. XX. De integratione differentialium unius variabilis algebraicorum incomplexorum et uſu ſerierum in calculo integrali.

Sect. XXI. De logarithmis et quantis exponentialibus.

Sect. XXII. De quantis transcendentibus, quae a circulo pendent.

Sect. XXIII. De reductione integralium ad hyperbolae et circuli quadraturam.

Sect. XXIV. De integratione differentialium algebraicorum unius variabilis complexorum.

Sect. XXV. De integratione functionum unius variabilis transcendentium.

Sect. XXVI. De calculo differentiali functionum, quae una plures involvunt variabiles.

Sect. XXVII. De aequationibus differentialibus.

Sect. XXVIII. De integratione functionum plurium variabilium et aequationum differentialium.

Sect. XXIX. De integratione aequationum differentialium ſecundi et altiorum ordinum.

Sect. XXX. De methodis quibusdam integrandi, quae ad aequationes differentiales primi et altiorum ordinum pari cum ſucceſſu adplicantur.

Geometria Sublimior.

Sect. I. De ramis curvarum in infinitum extenſis eorumque aſymtotis.

Sect. II. De diverſis linearum tertii ordinis ſpeciebus.

Sect. III. De figuris curvarum in ſpatio finito.

Sect. IV. De tangentibus et punctis multiplicibus curvarum.

Sect. V. De curvatura curvarum.

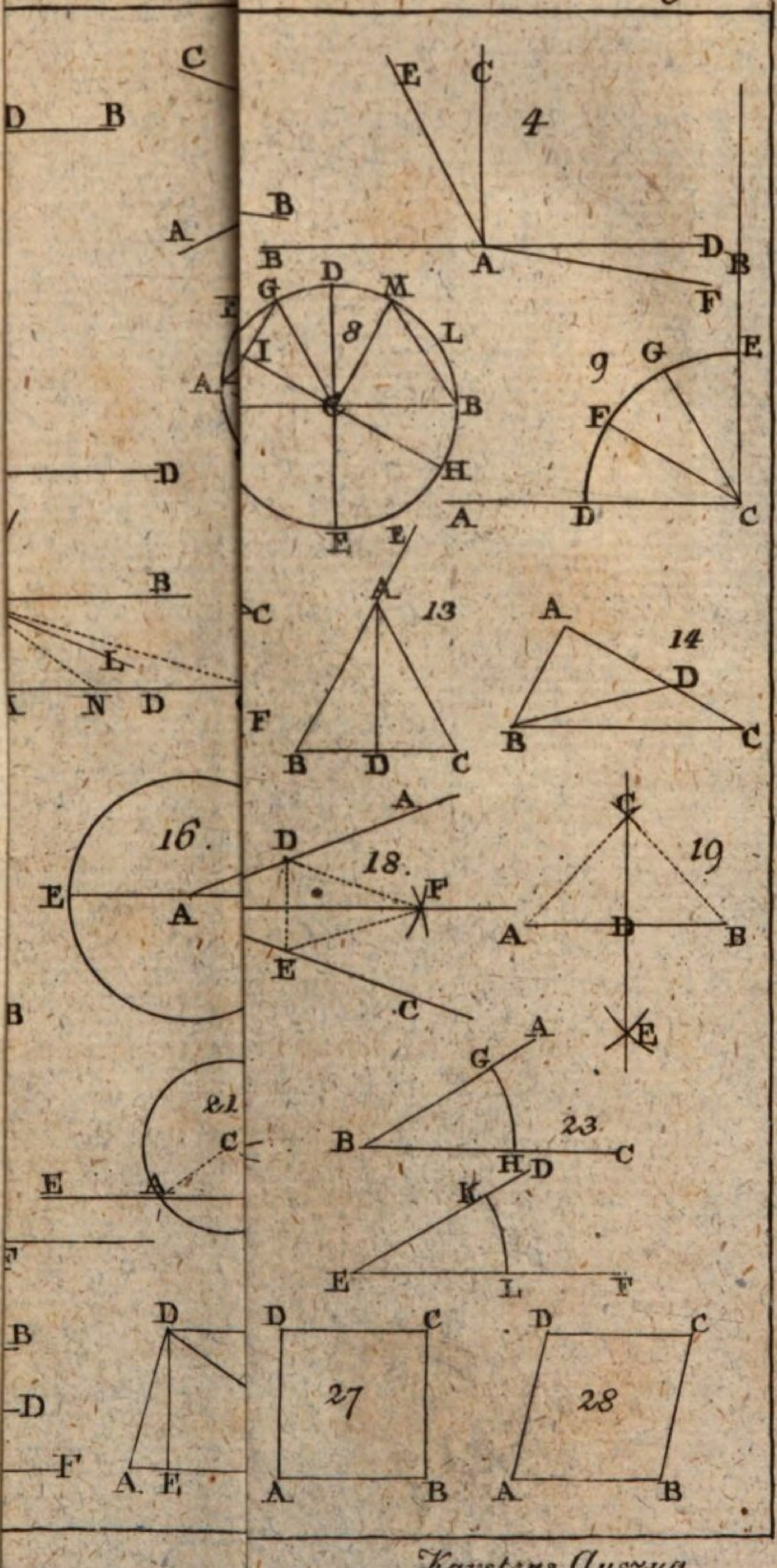
Sect. VI. De ſimilitudine, diametris et centris curvarum.

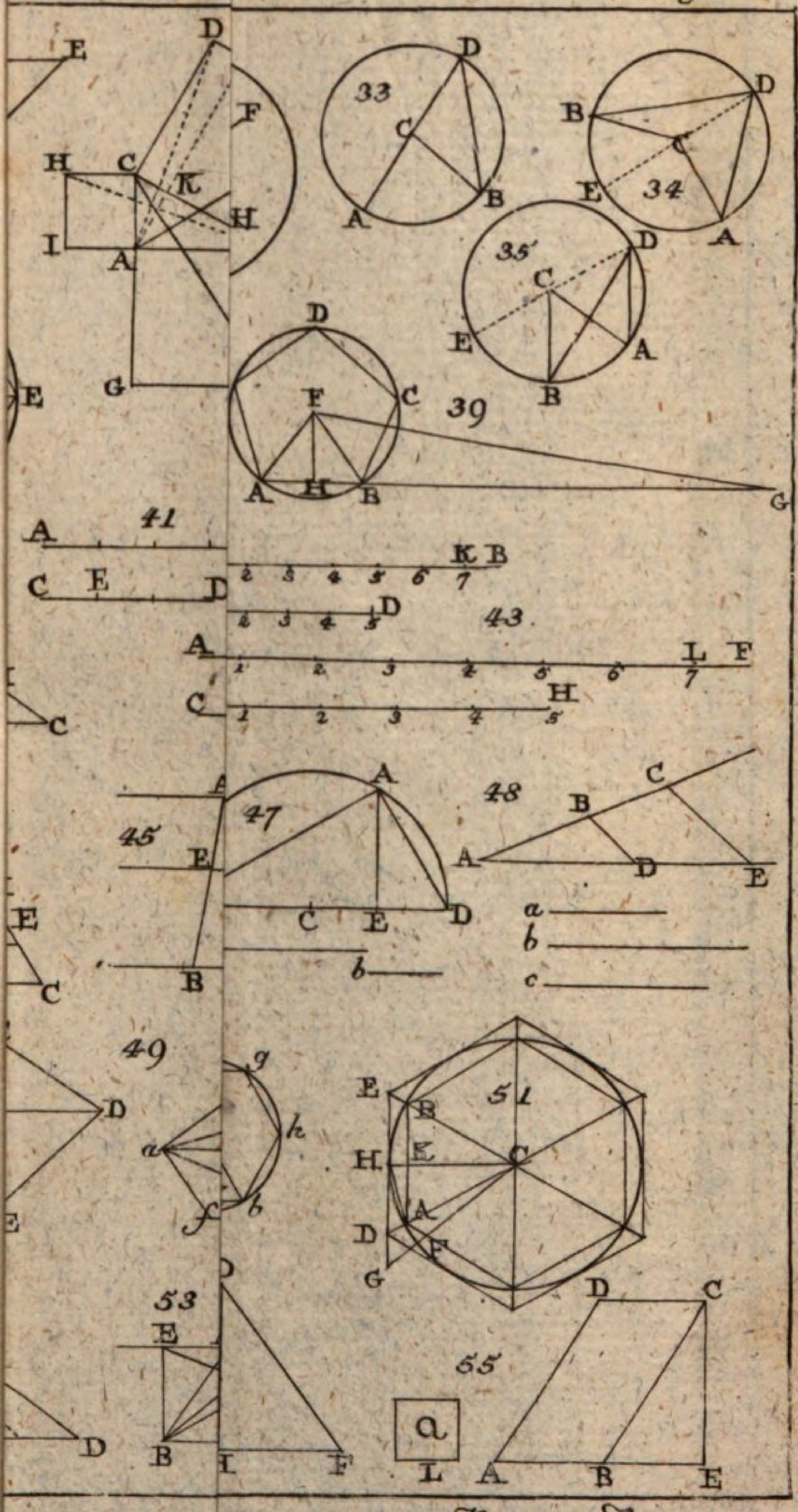
Sect. VII. De inveſtigatione curvarum ex datis proprietatibus.

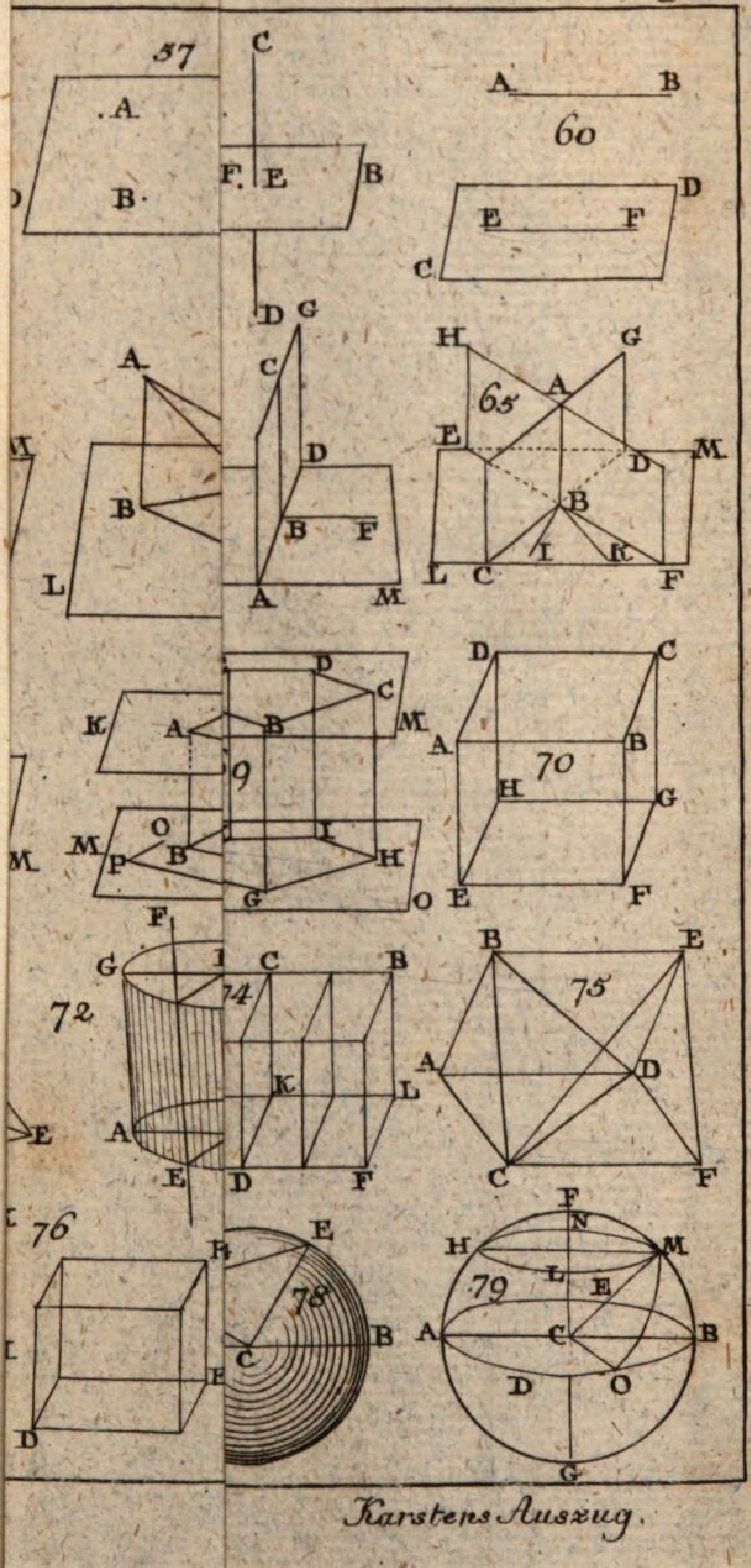
Sect. VIII. De curvis tranſcendentibus.

Sect. IX. De evolutione curvarum.

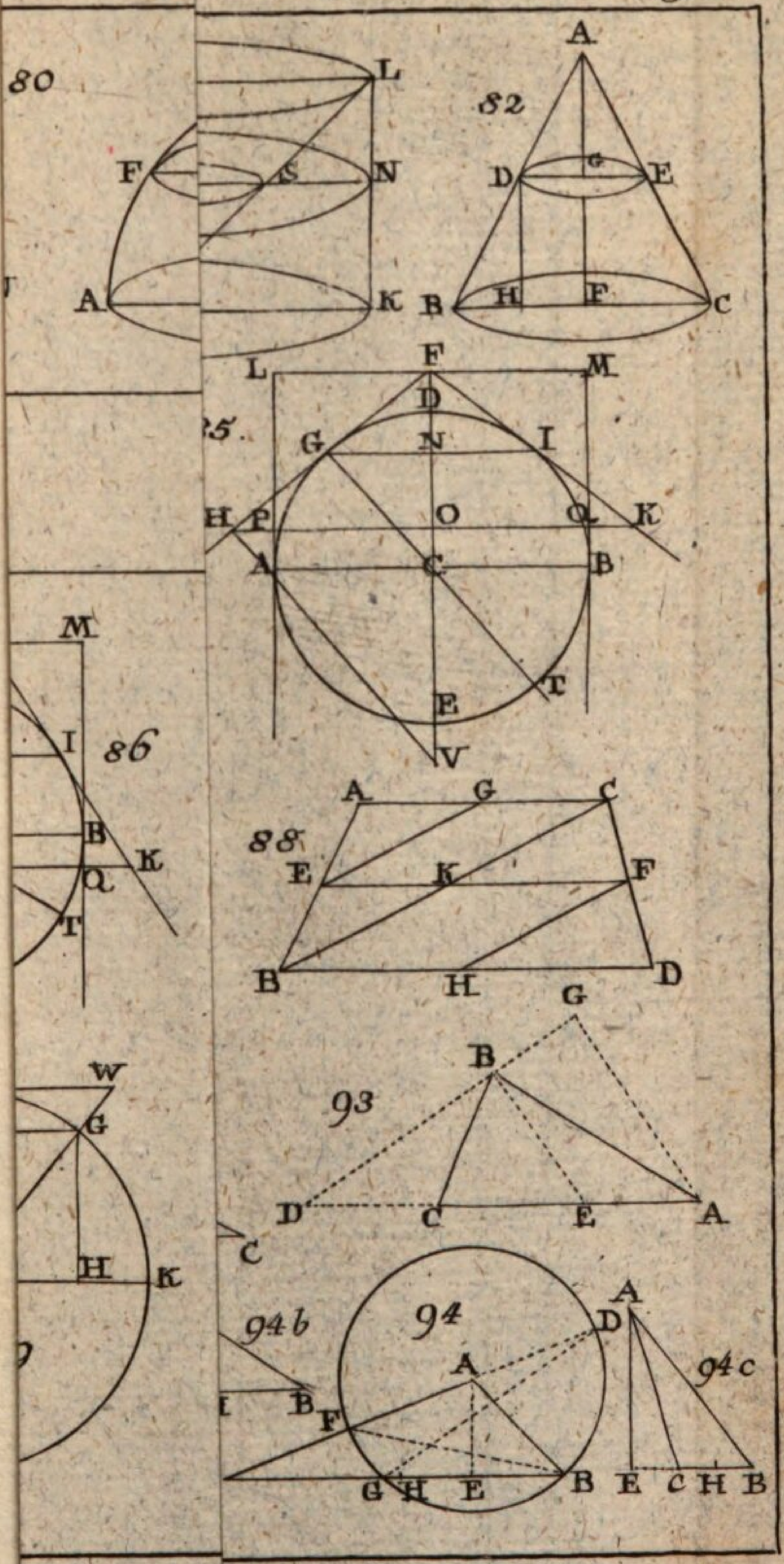
Sect. X. De ſuperficiebus, ſolidis rotundis et curvis duplicis curvaturae.


4
8
9
13
14
16.
18.
19
21
23
27
28

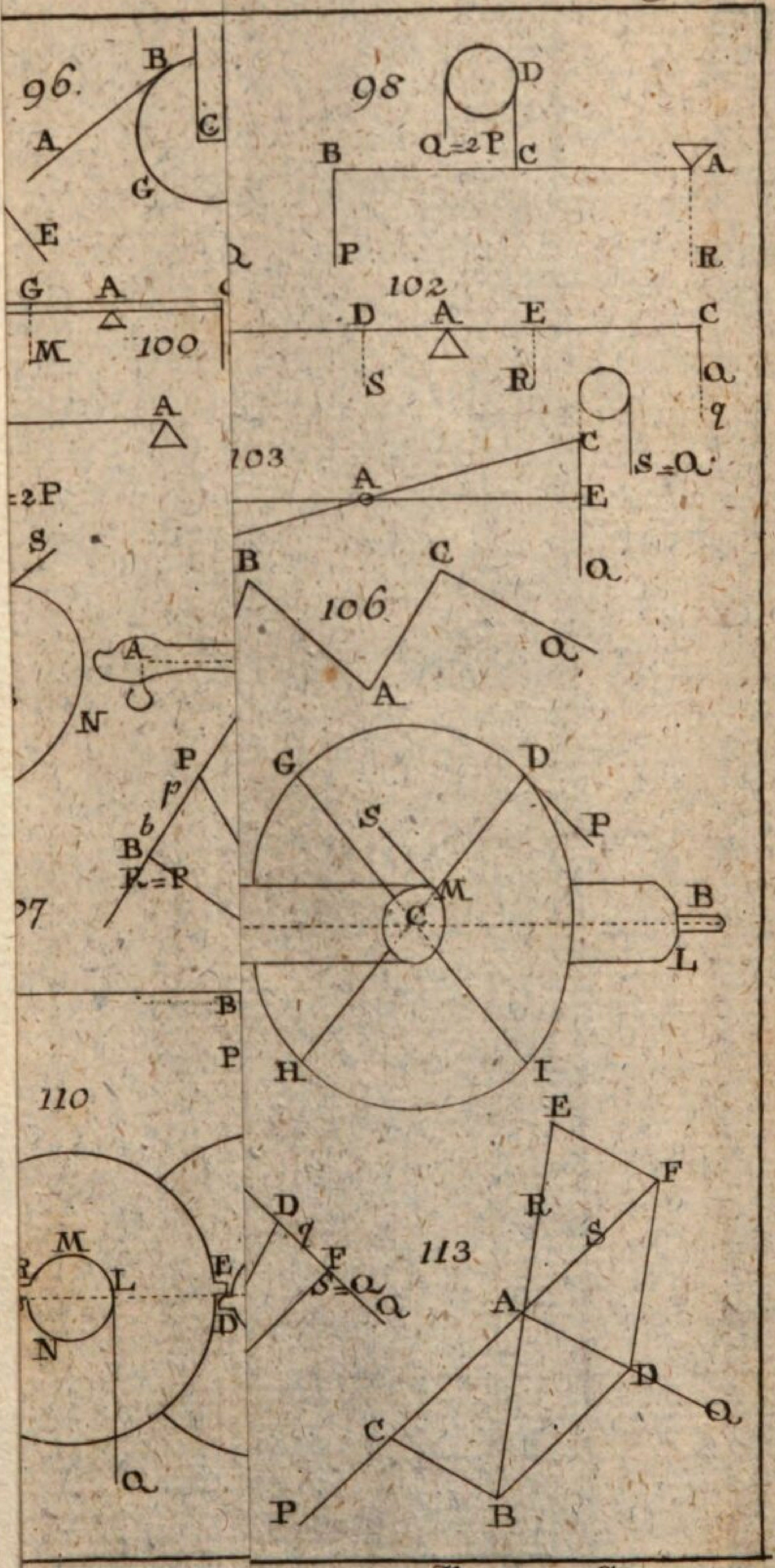

33
34
35
39
41
43
45
47
48
49
51
53
55

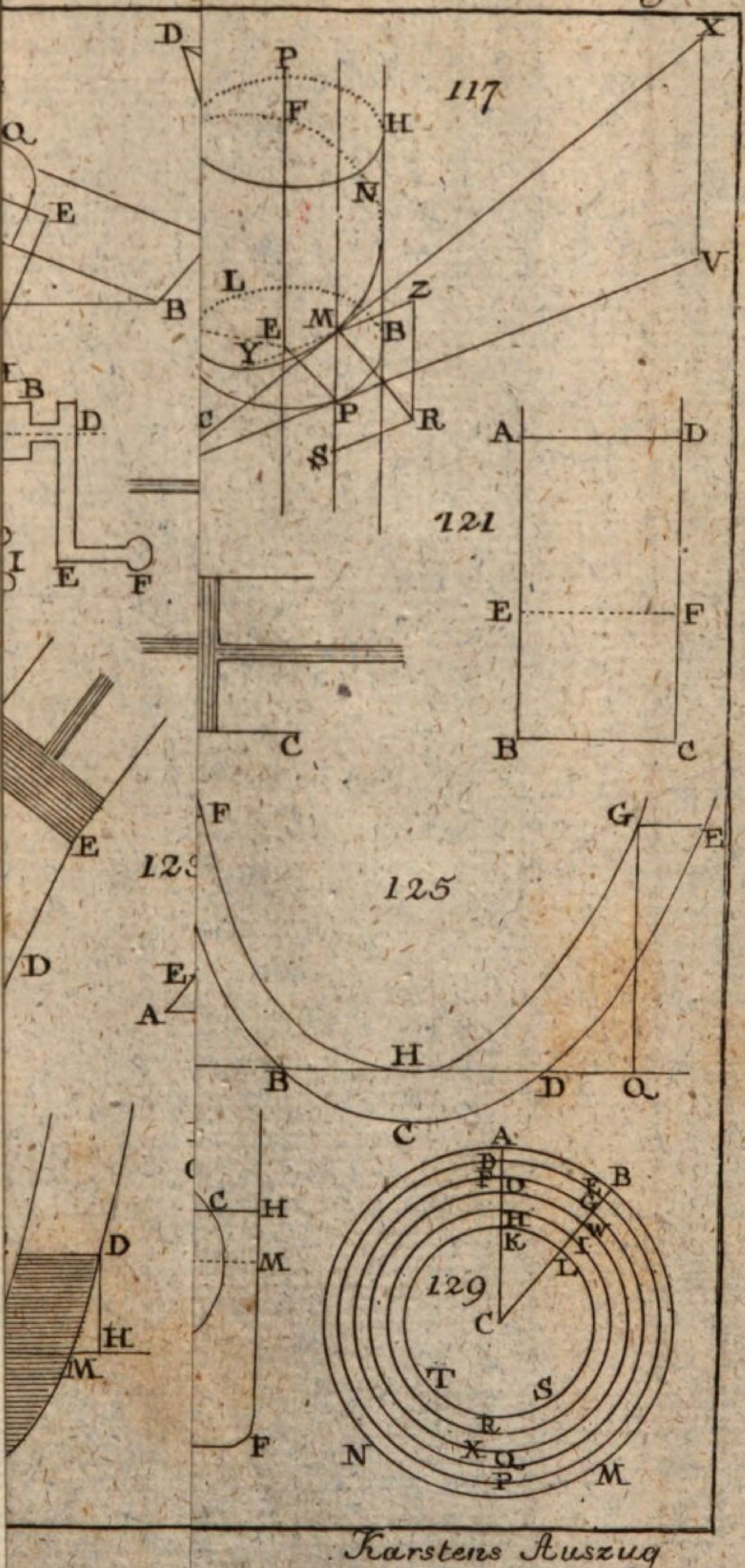

57
60
65
9
70
72
74
75
76
78
79

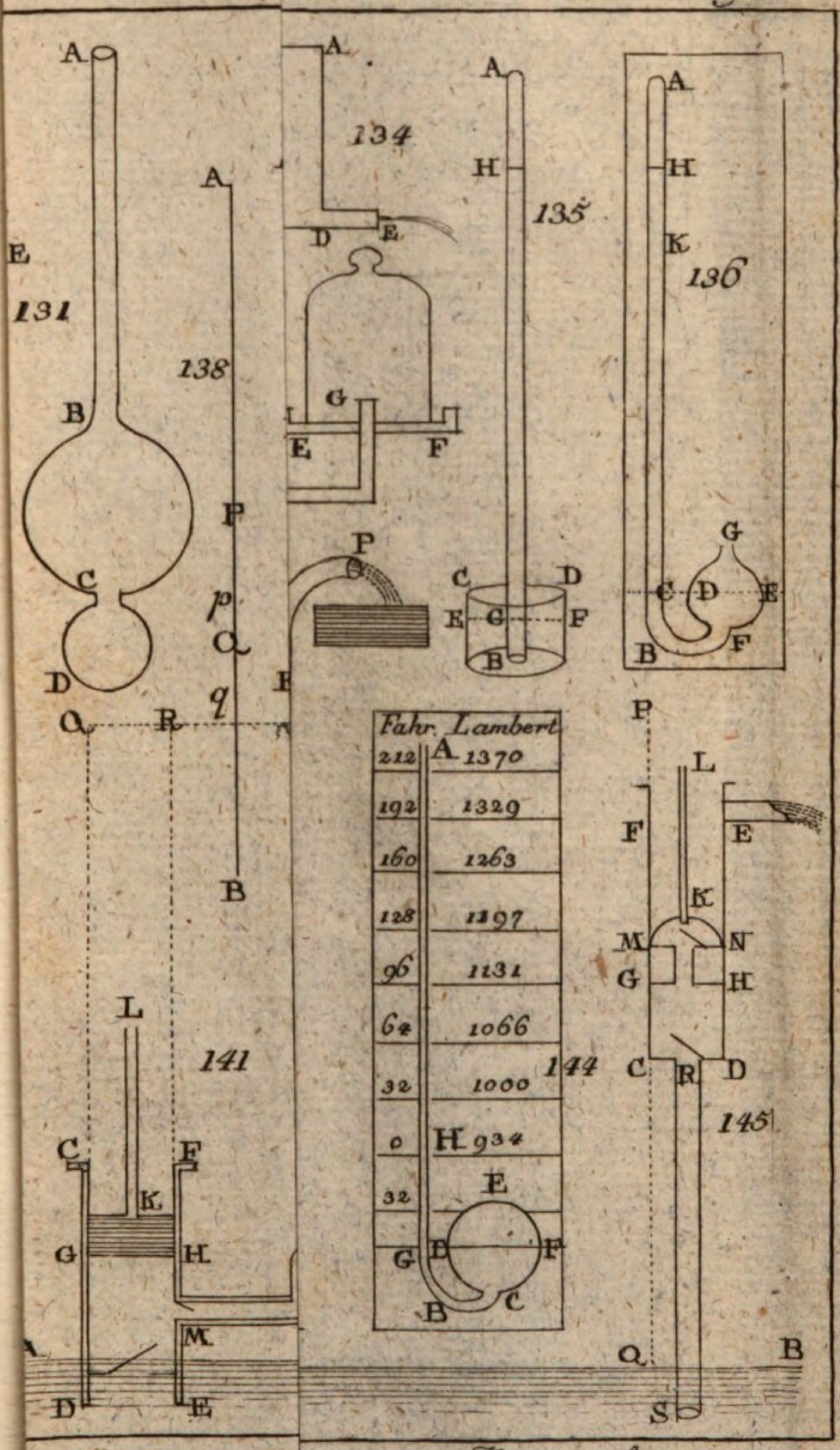
4. Tafel.

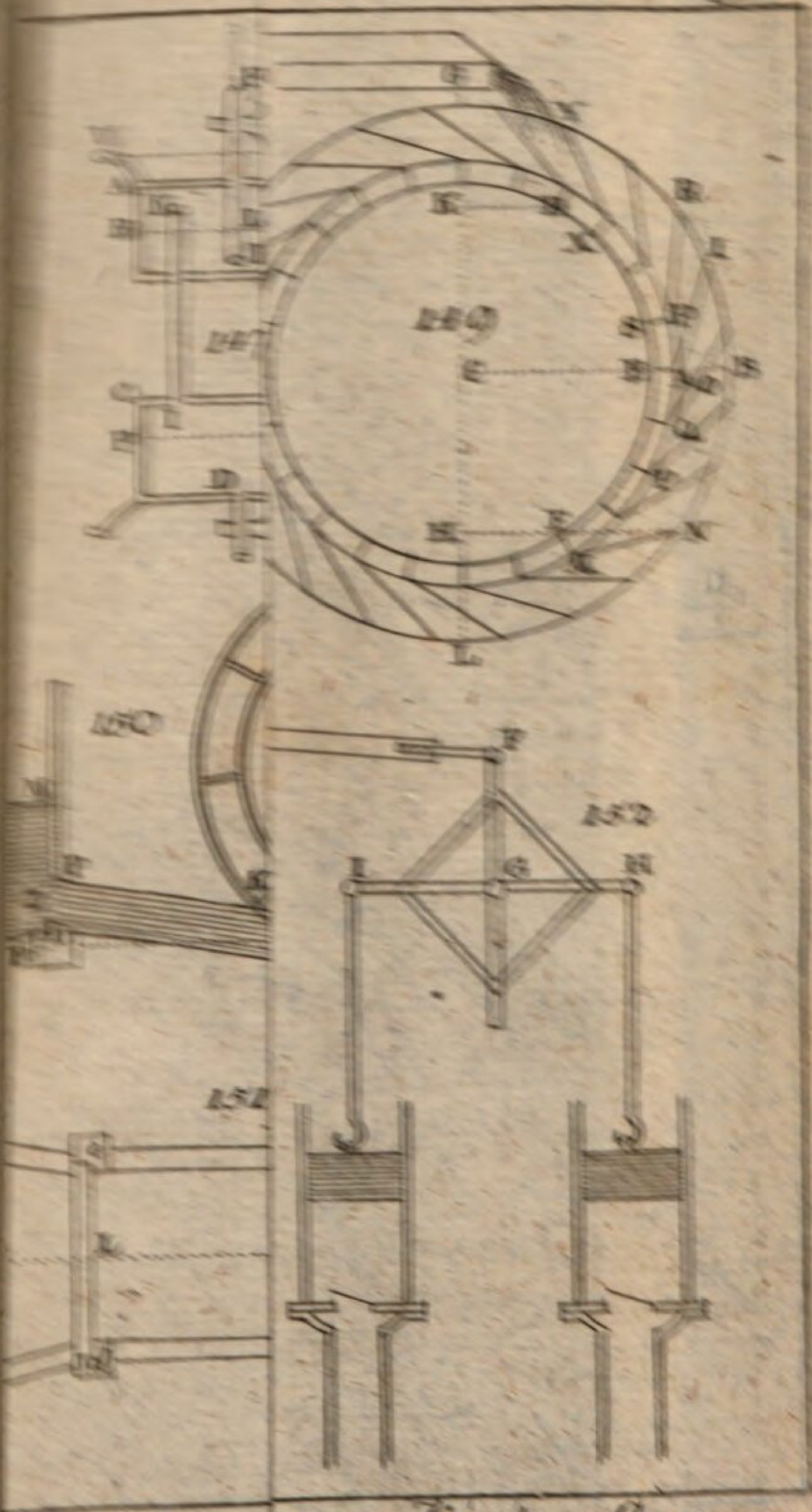


Karstens Auszug

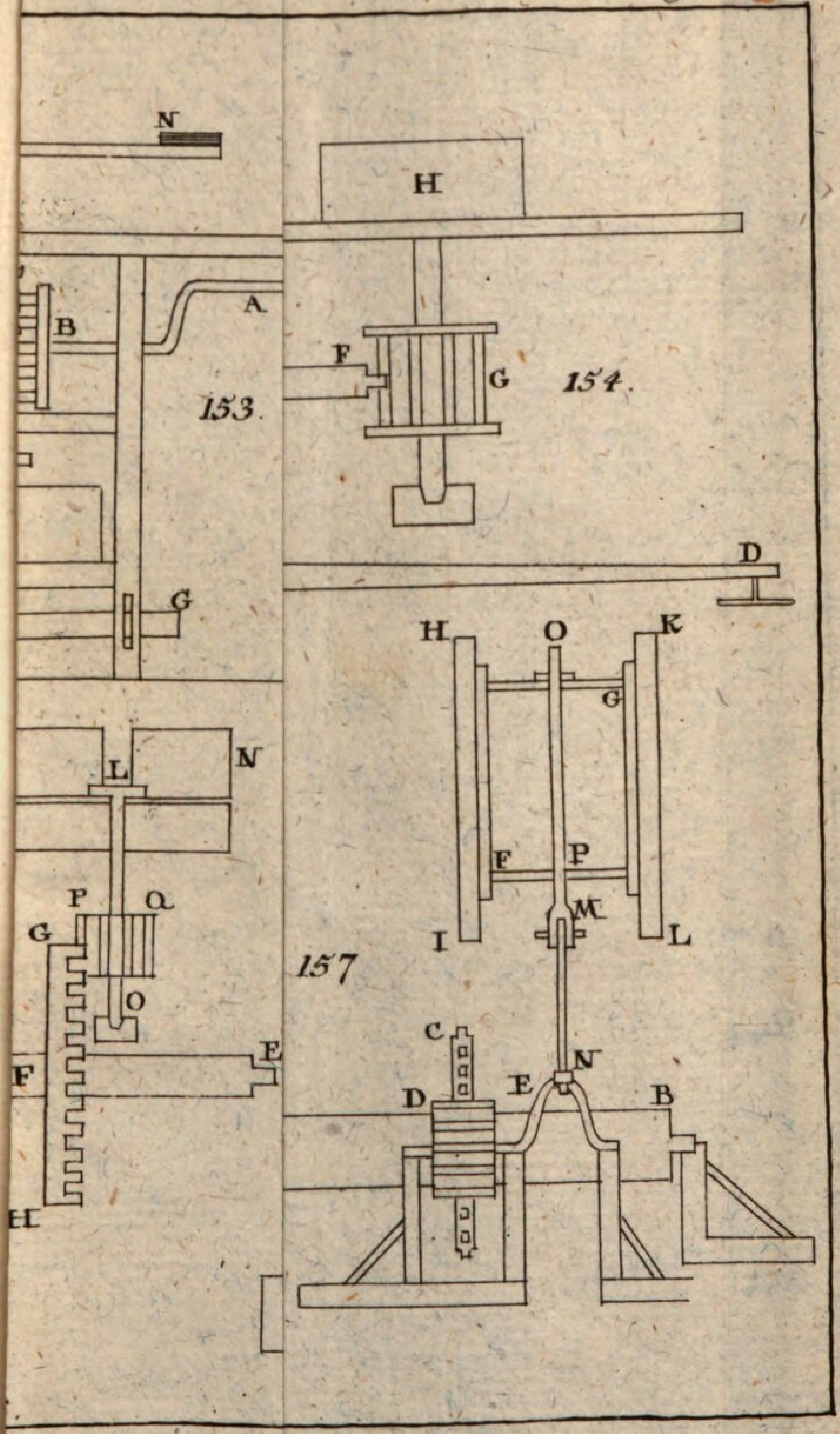

96.
98
Q=2P
100
102
103
S=Q
106
R=P
97
110
113
S=Q

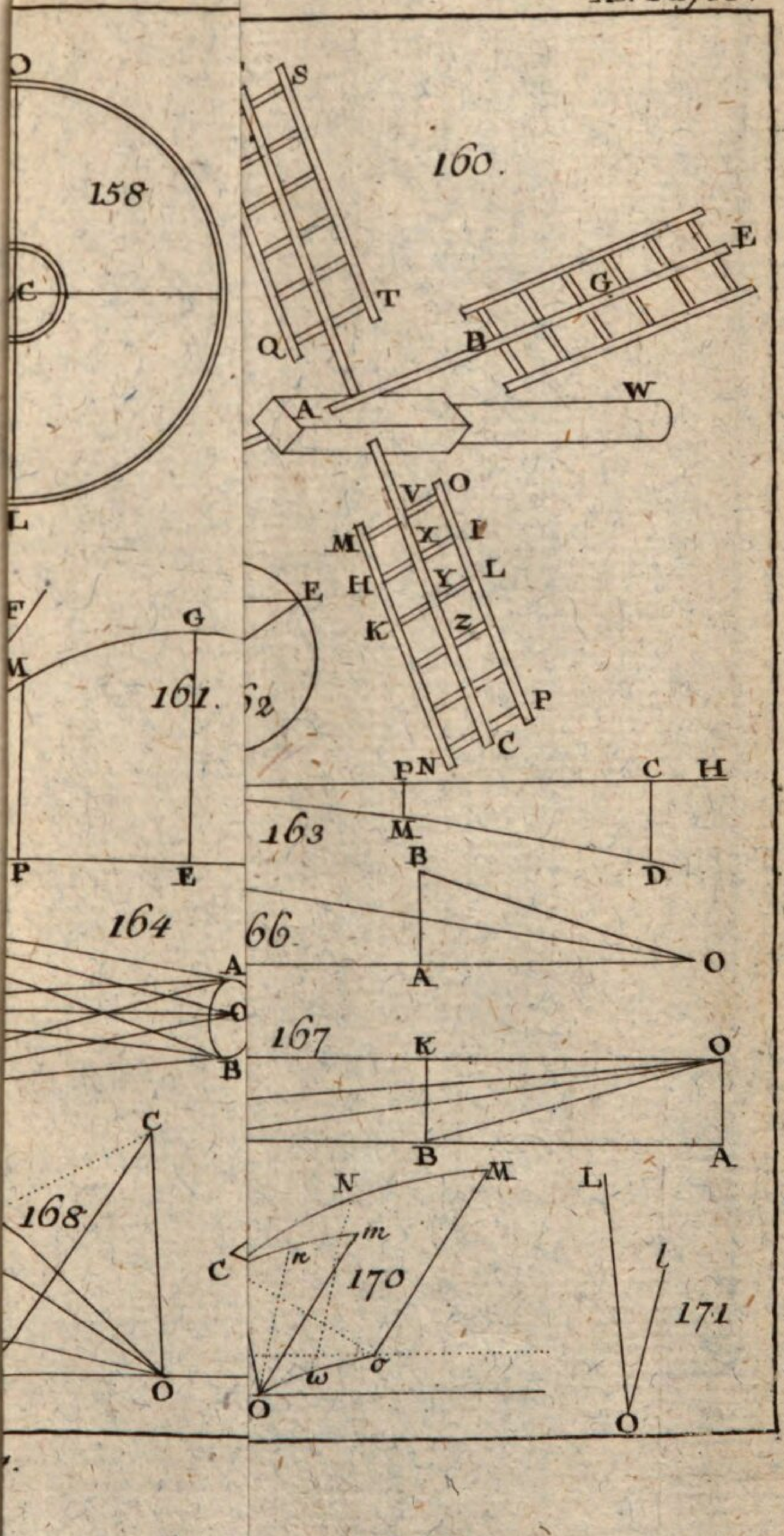

117
121
123
125
129

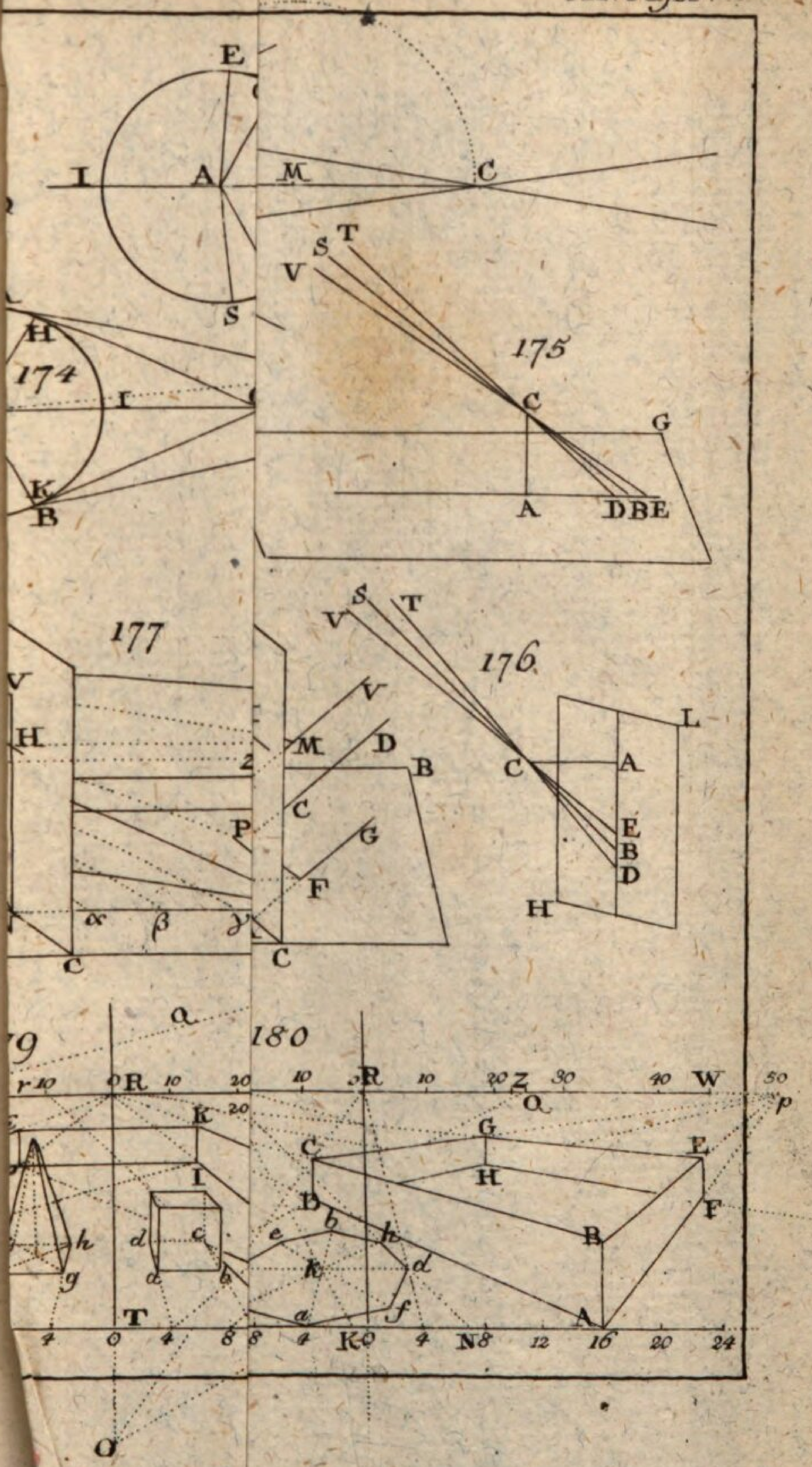

131
134
135
136
138
141
144
145
Fahr. Lambert
212 1370
192 1329
160 1263
128 1197
96 1131
64 1066
32 1000
0 934
32



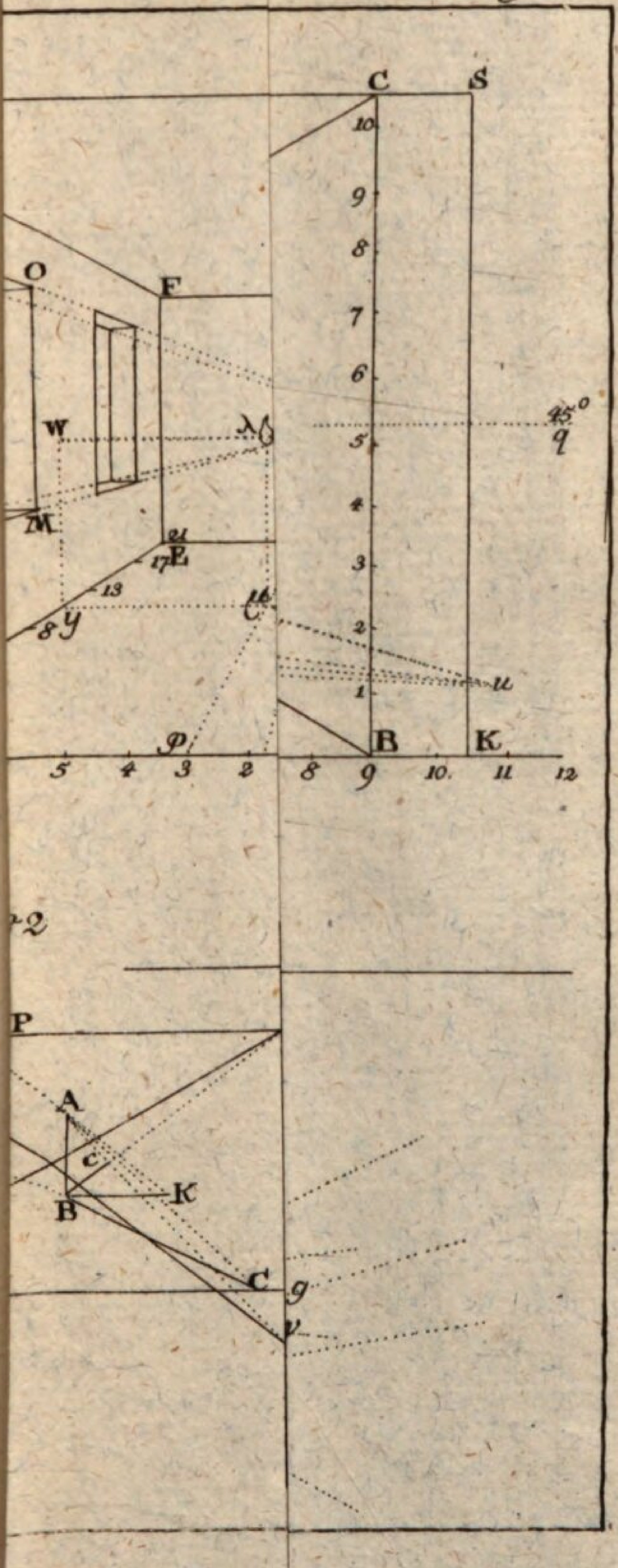
Karstens Auszug


N
H
A
B
F
G
154.
153.
G
D
H
O
K
G
N
L
F
P
P
Q
M
G
I
L
157
O
C
E
N
F
E
D
B
H

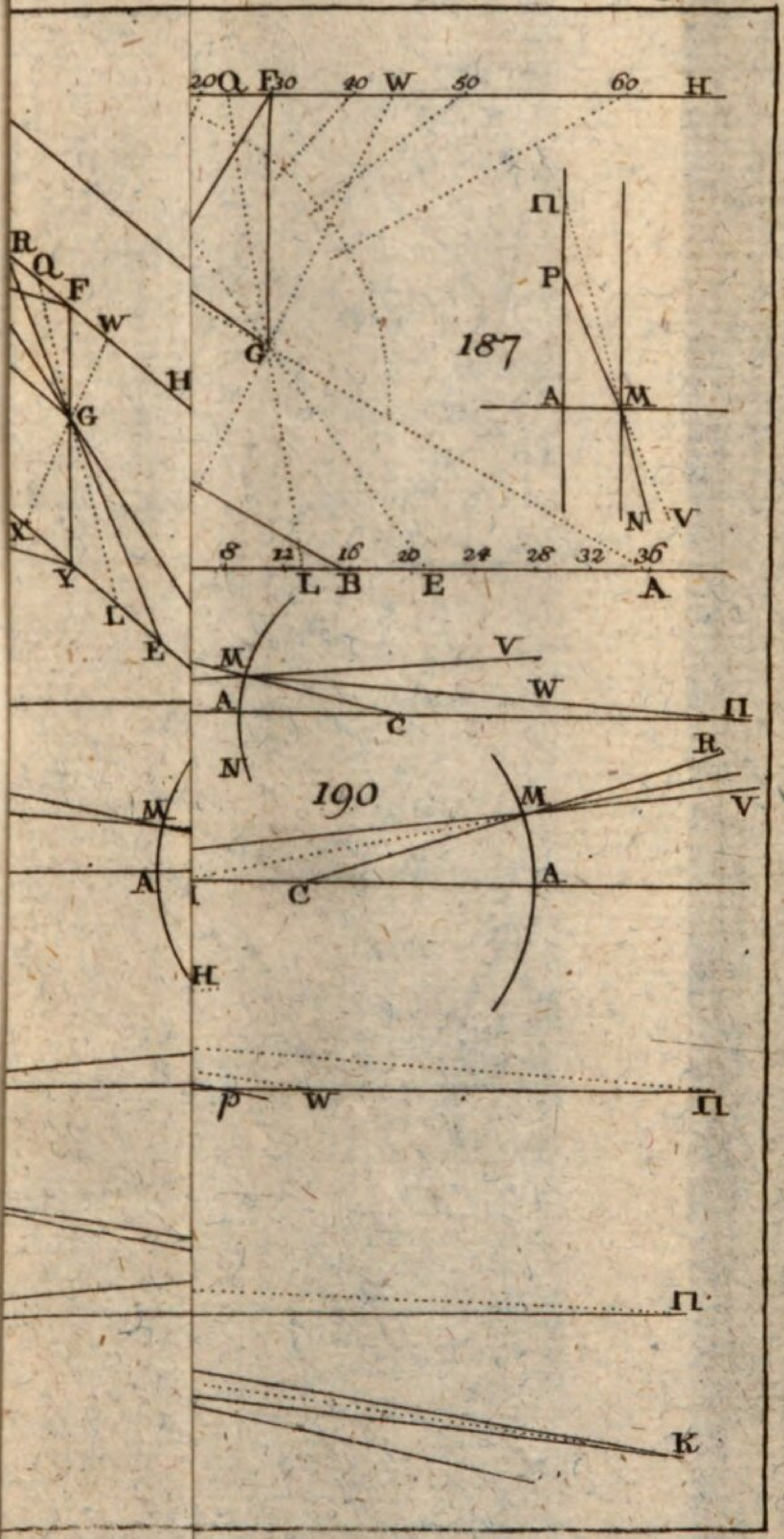

158
O
C
L
160.
S
T
Q
E
G
B
A
W
V
O
X
I
M
Y
L
H
Z
K
P
C
N
F
G
E
M
161.
62
P
E
p N
C
H
163
M
D
B
164
66.
A
O
A
C
B
167
K
O
B
A
C
168
O
N
M
m
n
C
170
o
ω
O
L
l
171
O


174
175
176
177
179
180

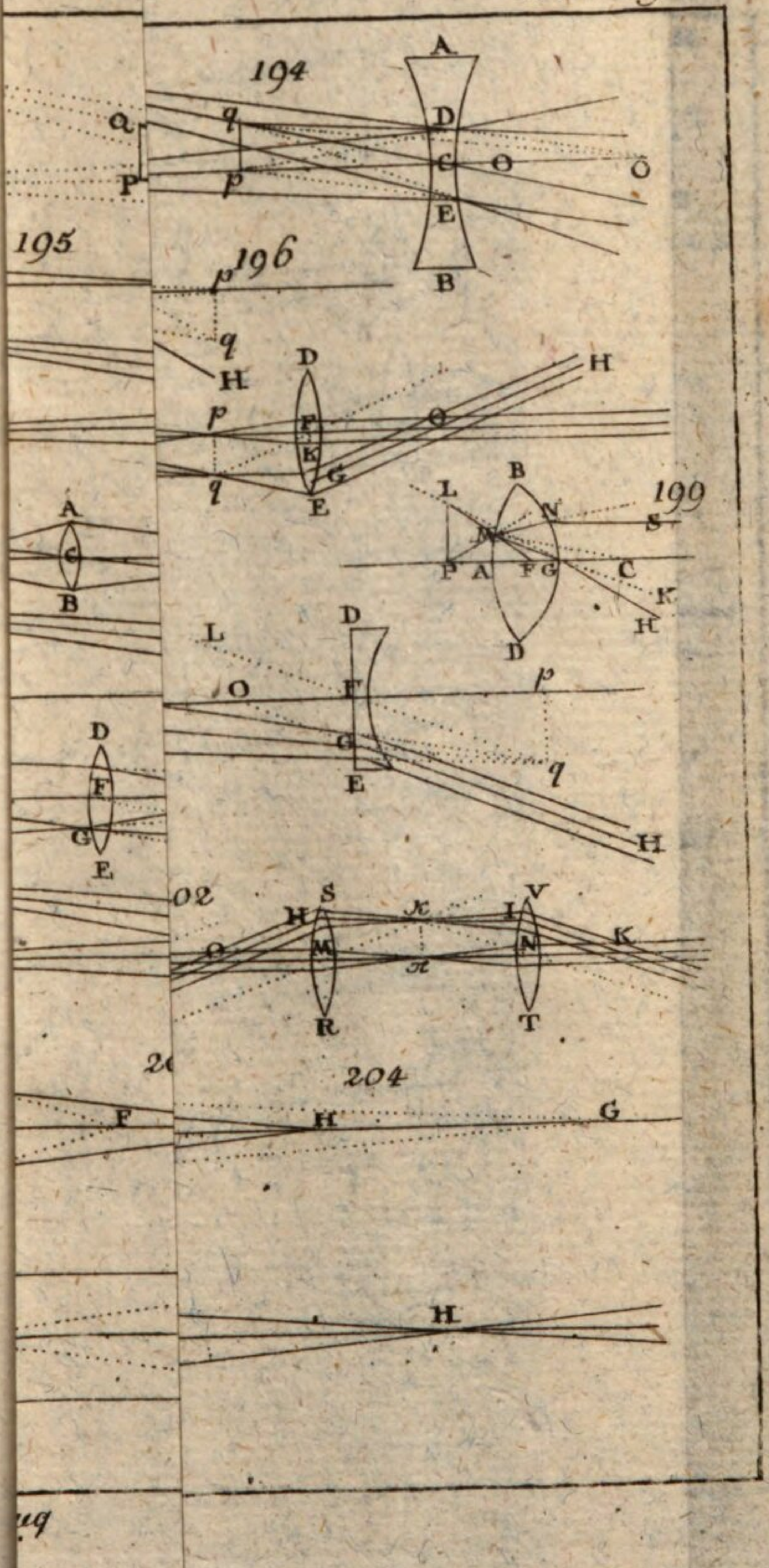
XII. Tafel.

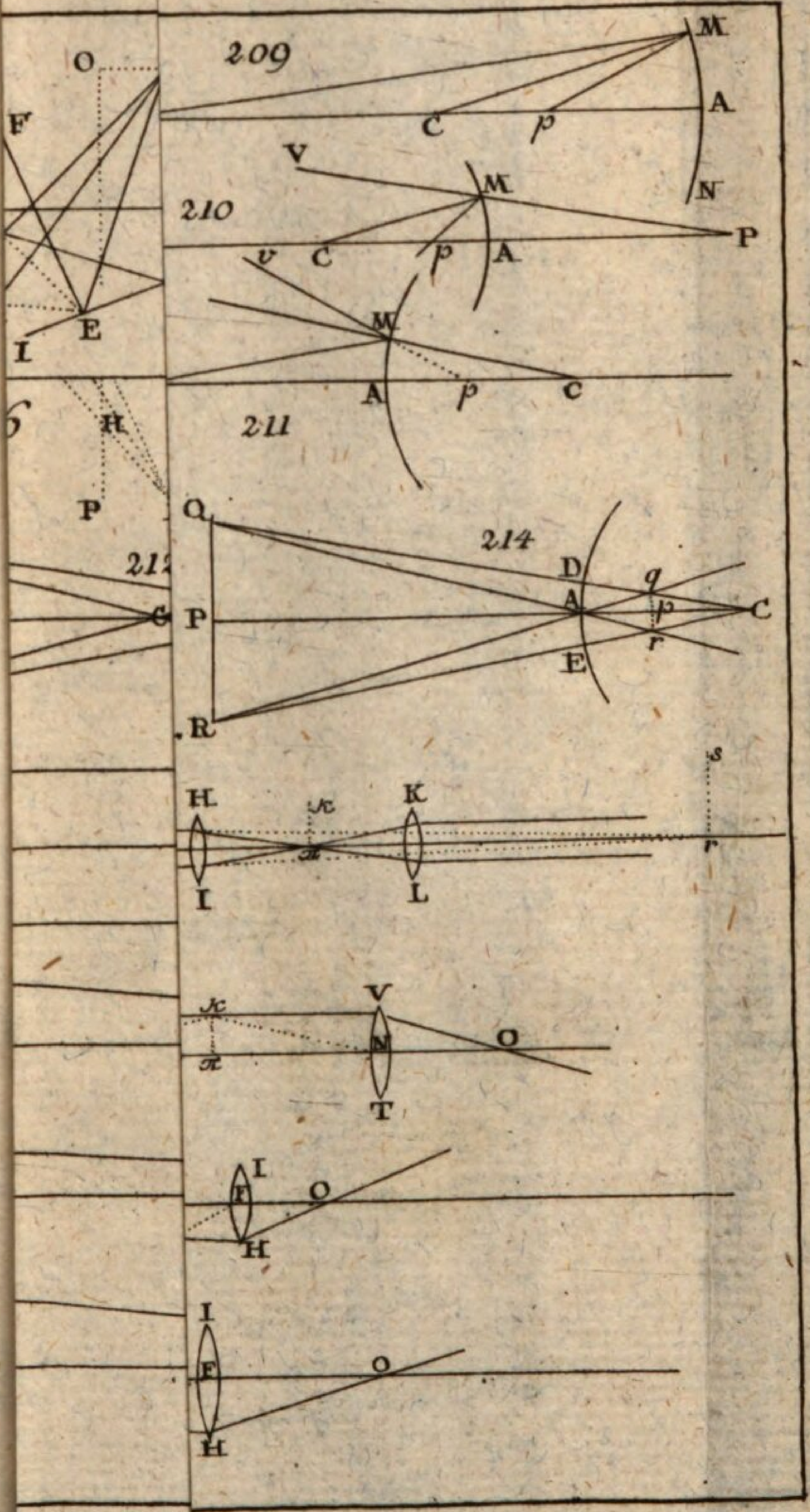


C
S
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
F
W
M
E
21
17
13
8
y
45°
q
u
B
K
5
4
3
2
8
9
10.
11
12
2
P
A
c
B
K
C
g
v

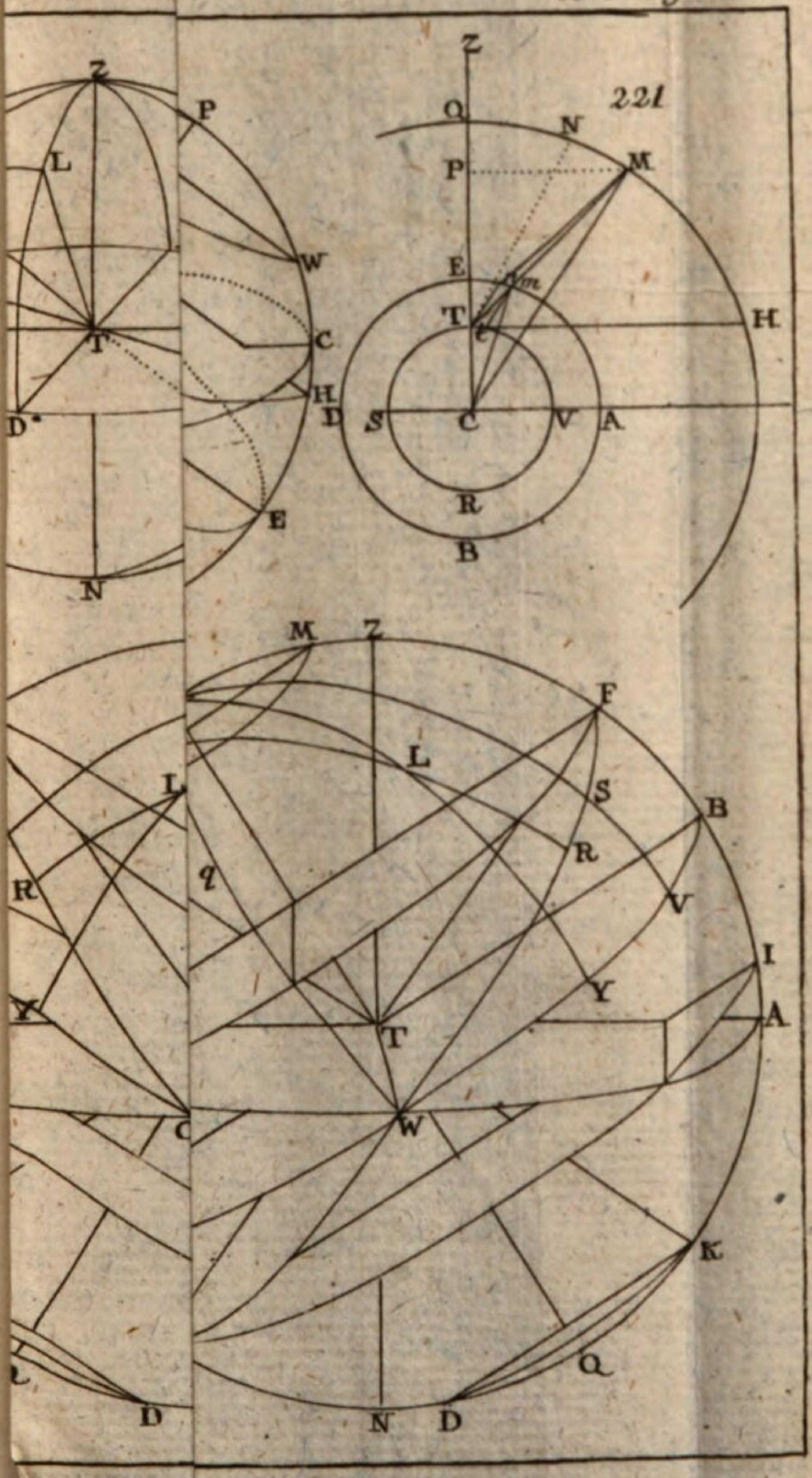


zug.

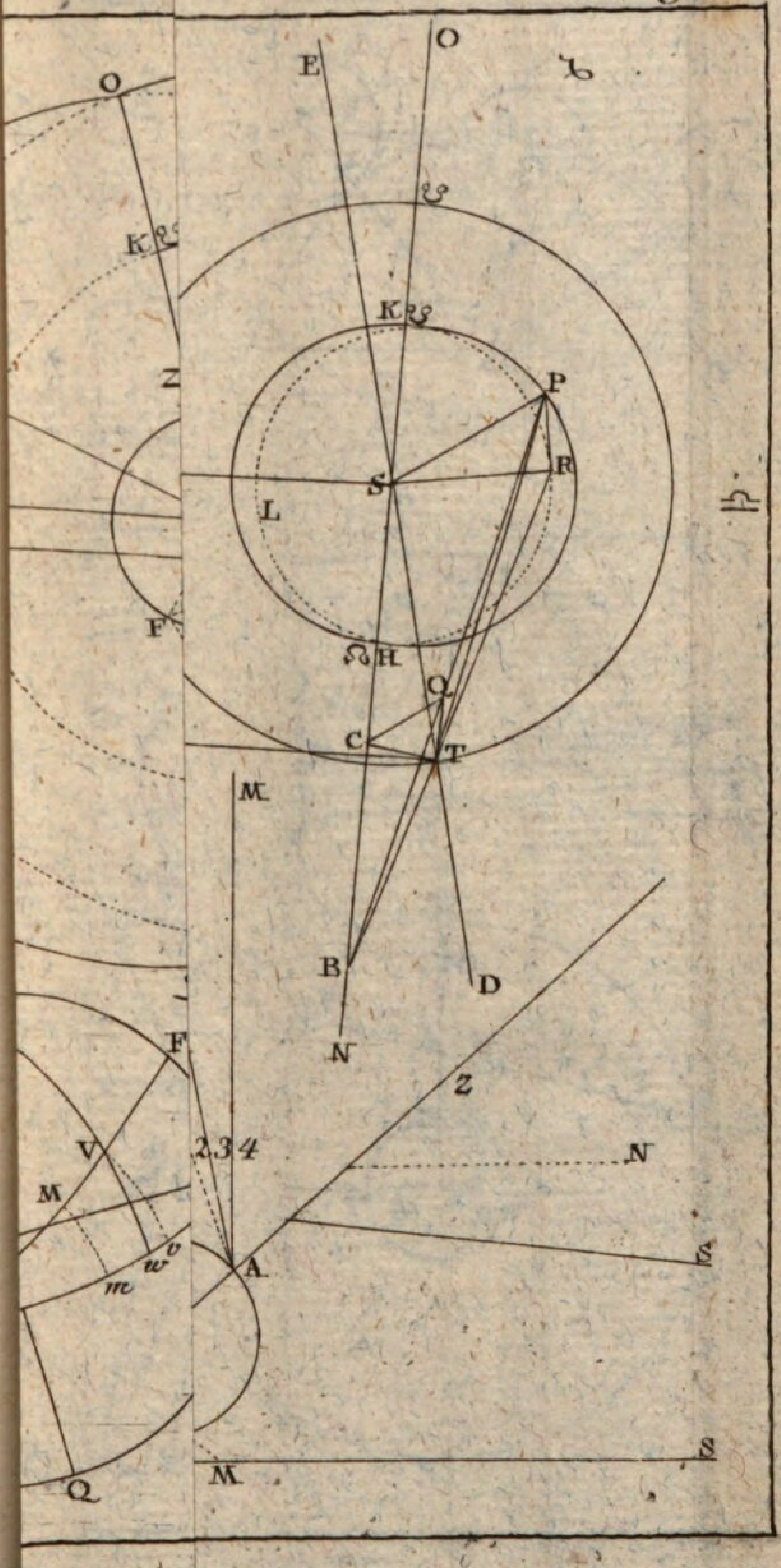

194
195
196
199
204

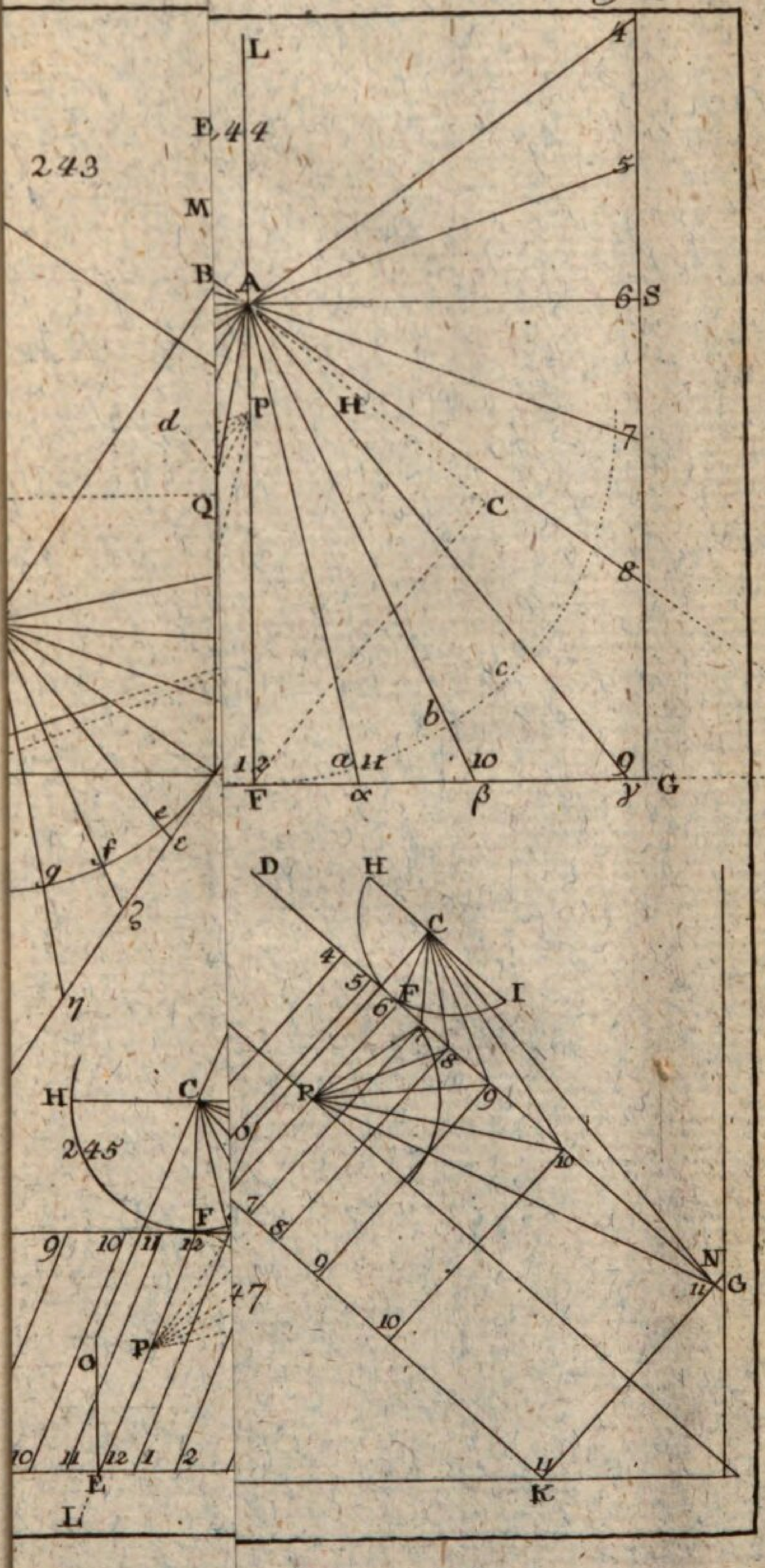


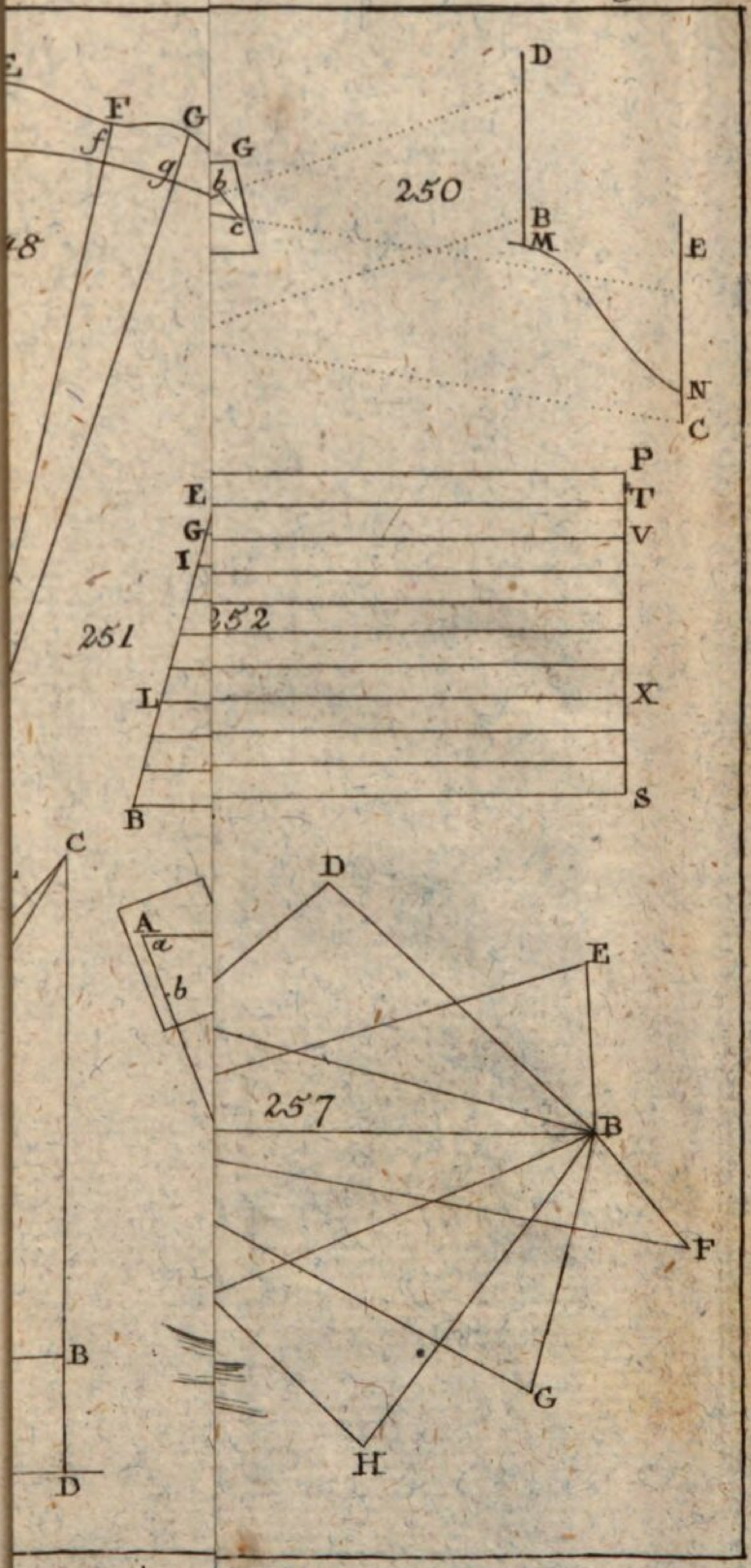
…zug.


221
Z
O
N
P
M
E
m
T
t
H
S
C
V
A
R
B
Z
P
L
W
C
T
H
D
D
E
N
M
Z
F
L
S
B
R
V
q
I
Y
A
T
W
K
Q
N
D
L
R
Y
C
D

XVIII. Tafel

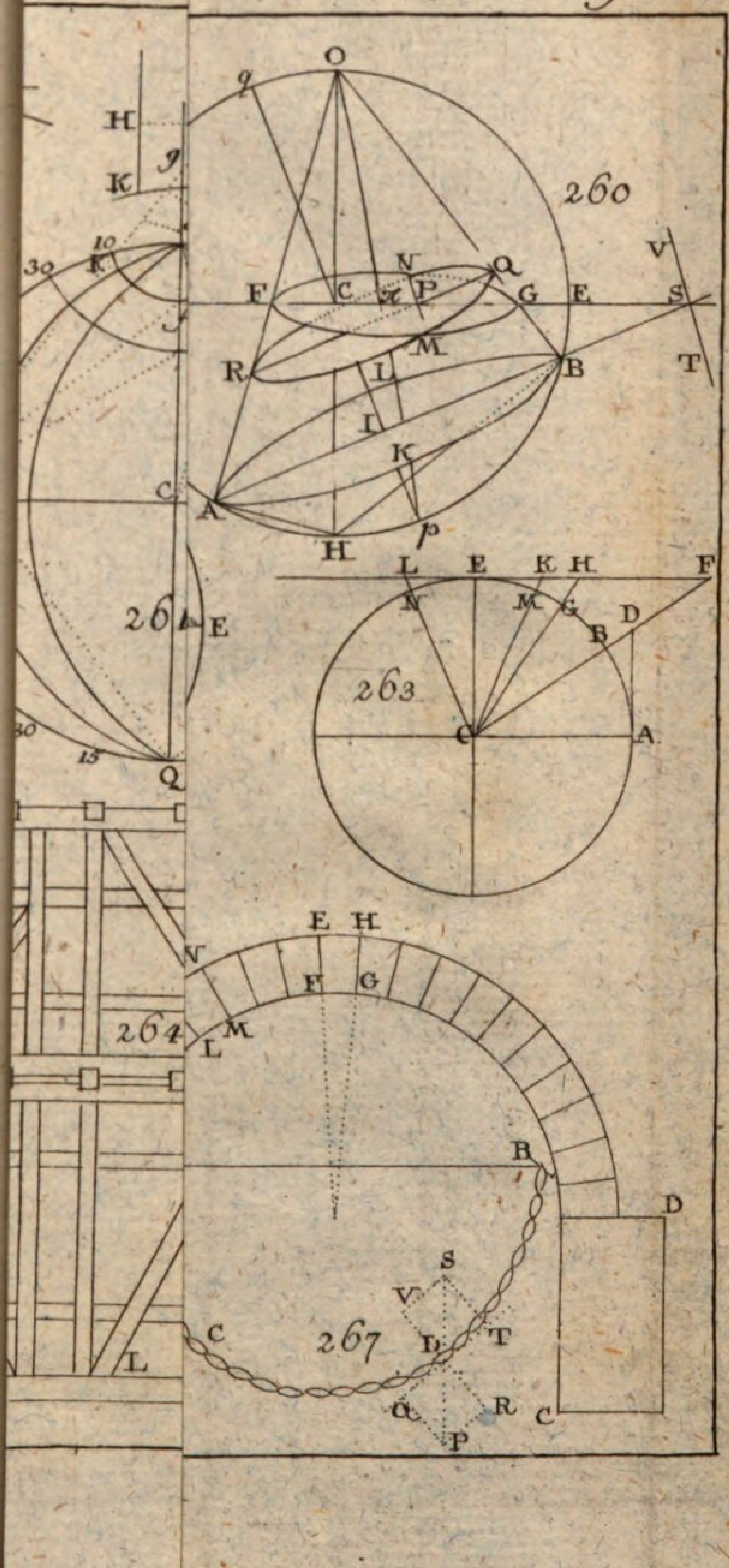


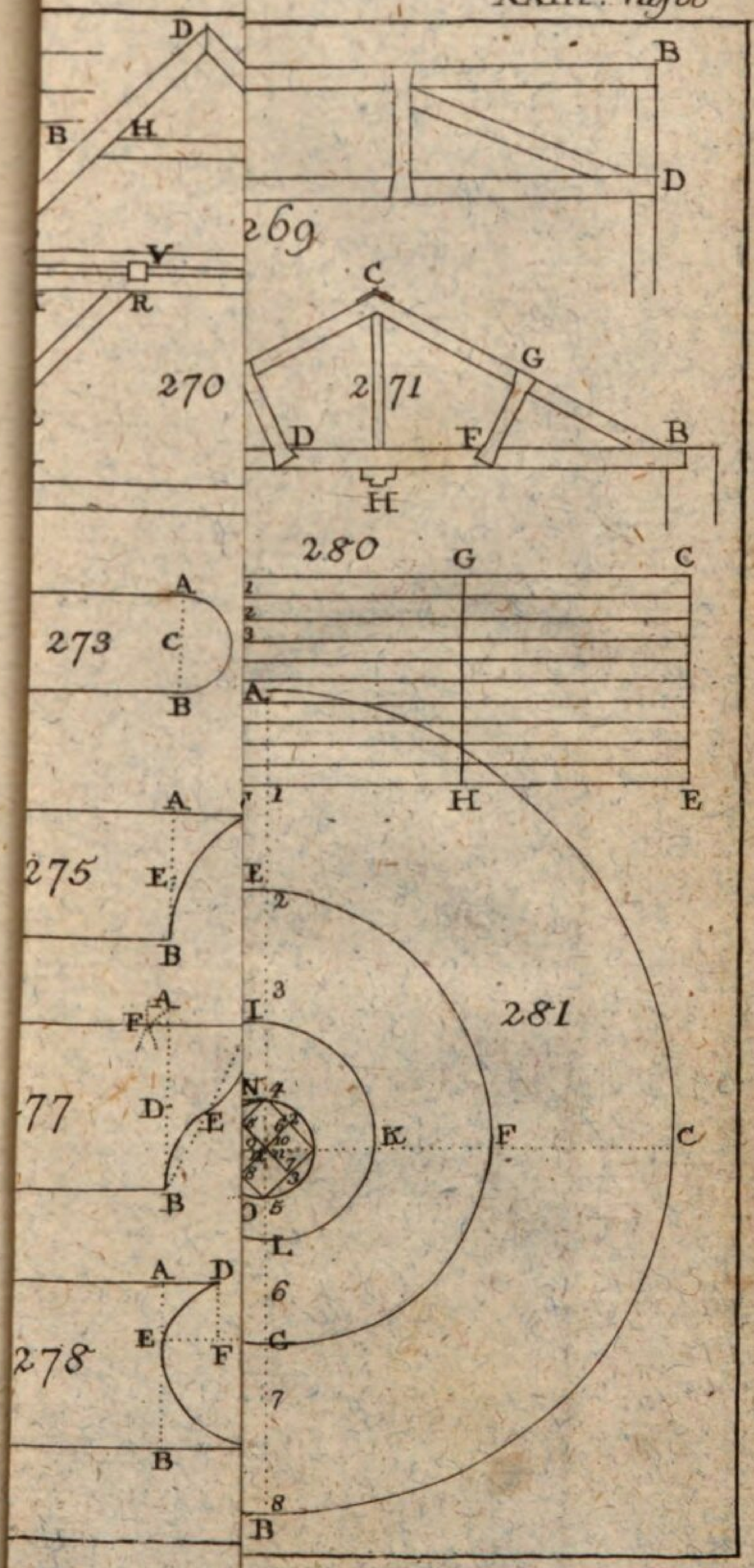

243
44
245
47

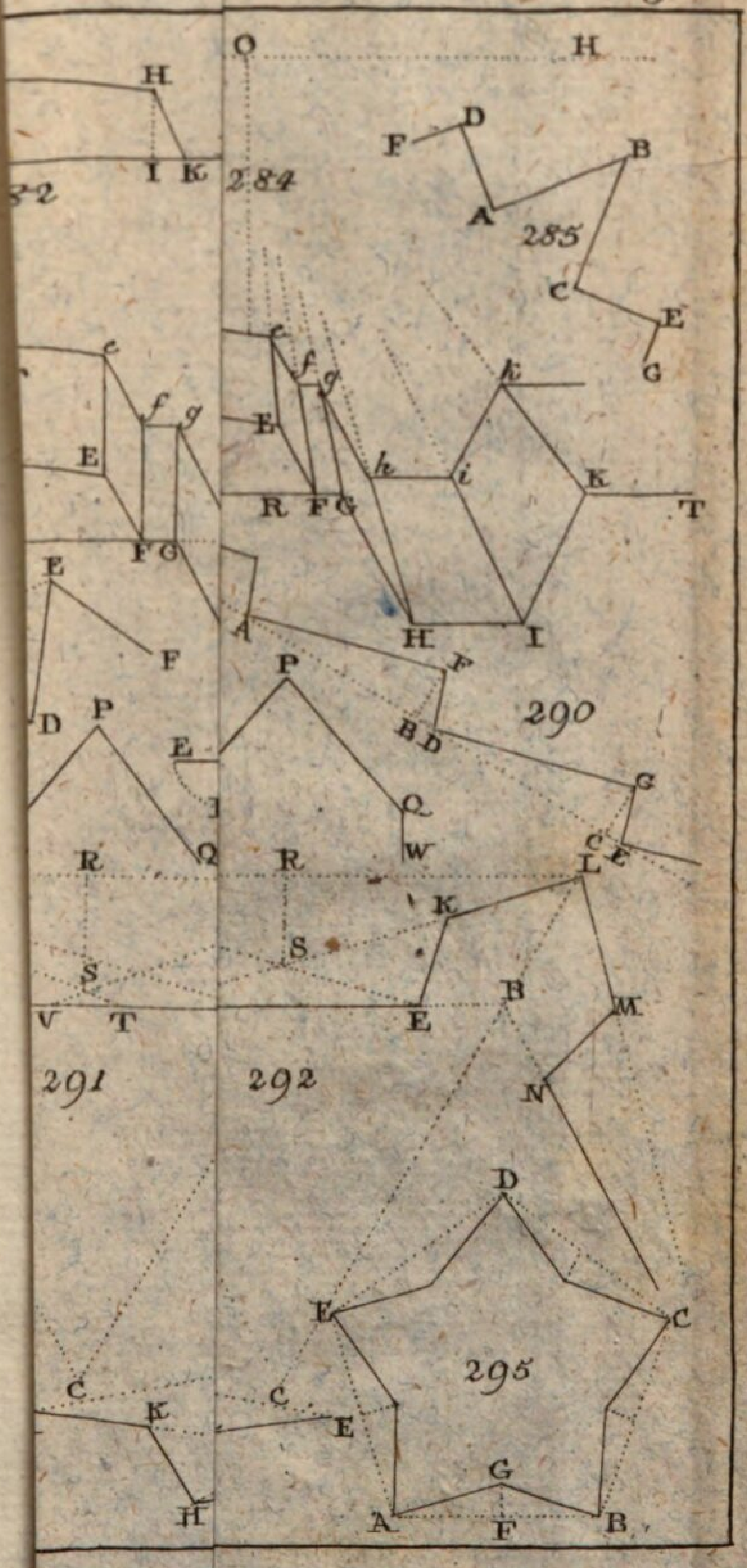


250
D
B
M
E
N
C
G
h
c
F
G
f
g
48
251
252
E
G
I
L
B
P
T
V
X
S
257
C
B
D
A
a
b
D
E
B
F
G
H

XXII. Tafel.




269
270
271
273
275
277
278
280
281


284
285
290
291
292
295

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav

Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der Mathematischen Wissenschaften

Greifswald 1781

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 407
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267531-5
VD18 1448319X-005